

УДК 621.3.01

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В СИСТЕМАХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ОЧИСТКИ ВОЗДУХА

С.П. ЧЕБОТАРЕВ,*канд. техн. наук, доцент А.Ф. ОСЬКИН,**канд. техн. наук, доцент В.П. АВДЕЙКО*

Поставлен вопрос о выборе оптимальной геометрии электродов при разработке устройств электрической очистки воздуха. В качестве критериев оптимизации выступают различные параметры электрического поля, возникающего в процессе работы электрофильтра. Многие параметры невозможно измерить экспериментально, поэтому проводится математическое моделирование электрического поля. Электрическое поле описывается дифференциальными уравнениями в частных производных, и моделирование сводится к численному решению уравнений с заданными граничными условиями.

Принцип работы систем электрической очистки воздуха (или электрофильтров) заключается в использовании сил электрического поля, возникающего между электродами фильтра. Это выглядит следующим образом: воздух, содержащий пыль, подается между электродами электрофильтра, где частицы пыли в поле коронного разряда приобретают некоторый заряд и под воздействием сил электрического поля перемещаются к осадительному электроду. Для генерации подобного поля необходимы электроды со специальной геометрией. В настоящее время существует несколько вариантов геометрии электродов: система плоскости и коронирующего провода, система плоскости и плоскости с ребрами или иглами. Выбор той или иной системы электродов зависит от характеристик фильтруемой пыли (размеры, электрические свойства и т. д.), а также от места использования данного устройства. Наиболее удобной и оптимальной в настоящее время является система электродов «плоскость с иглами – плоскость». Все системы электродов характеризуются набором геометрических параметров. К этим параметрам в основном относятся расстояние между плоскостями электродов, высота игл и расстояние между ними (высота ребер и расстояние между ними), диаметр игл или толщина ребер, радиус закругления иглы (или ребра). Естественно все эти геометрические параметры оказывают влияние на характеристики электрического поля в частности и соответственно на эффективность работы электрофильтра в целом. Поэтому выбор наиболее оптимальной геометрии электродов и ее геометрических параметров является очень важной задачей при разработке устройств электрической очистки воздуха. Существует несколько критериев (или методов) оптимизации геометрии электродов электрофильтра. Наиболее целесообразным является критерий оптимизации – максимизация произведения тока коронного разряда на среднее значение напряженности электрического поля в рабочей зоне электрофильтра.

В соответствии с вышесказанным для нахождения наиболее оптимальной геометрии электродов следует изучить влияние параметров электродов на ток коронного разряда и среднюю напряженность электрического поля. Здесь возникает определенная трудность: изучение зависимости некоторых характеристик поля от геометрии этого поля невозможно экспериментальным способом, и поэтому приходится прибегать к методам моделирования.

Как известно, электрическое поле описывается уравнением Пуассона [1, 2, 3]

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

или его более упрощенной формой – уравнением Лапласа [1, 2, 3]

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

Как видно, оба уравнения являются дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка. Для того чтобы найти частное решение уравнения такого класса, необходимо задать граничные условия: форму границ и значения функции на границе (типичная задача Дирихле). В рассматриваемом нами электрическом поле электрофильтра форму поля будет определять геометрия электродов, а значения функции на границе – величина потенциалов на электродах [3]. Решить дифференциальное уравнение с заданными граничными условиями можно аналитически или численно. Аналитиче-

ское решение является точным, но оно возможно только для дифференциальных уравнений определенных классов. Аналитическое решение уравнений Пуассона и Лапласа можно найти только для полей с относительно простой формой, что далеко не всегда возможно при расчете электрических полей в различных электроустановках. Поэтому единственным вариантом для математического моделирования электрического поля является использование некоторого численного метода. Среди этих методов основными являются метод конечных разностей и метод конечных элементов [2]. Рассмотрим каждый метод более подробно.

Суть метода разностных схем состоит в следующем. Область непрерывного изменения аргументов (или область моделирования) заменяется дискретным множеством точек (узлов), которое называется сеткой или решёткой (рис. 1) [4, 5].

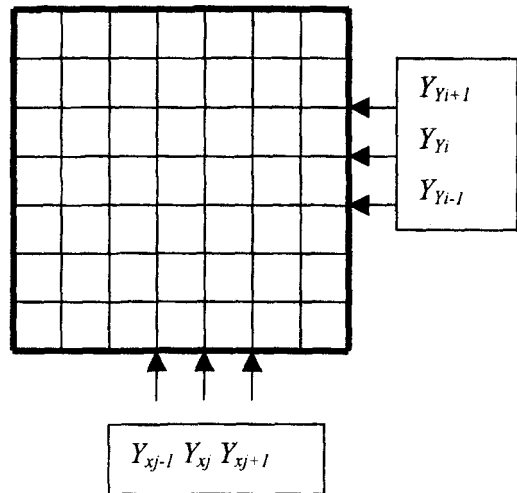


Рис. 1. Сетка разбиения области моделирования

Вместо функции непрерывного аргумента рассматриваются функции дискретного аргумента, определённые в узлах сетки и называемые сеточными функциями. Производные, входящие в дифференциальное уравнение и граничные условия, заменяются разностными производными. Простейшим разностным оператором является оператор дифференцирования сеточной функции, который порождает разностные производные [5]. Пусть W – сетка с шагом h , введённая на R , т.е.

$$W = \{Xi = a + ih, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \tag{3}$$

Тогда разностные производные первого порядка для сеточной функции $Y_i = Y(X_i)$, X_i из W определяются по формулам

$$A_1 Y_i = \frac{Y_i - Y_{i-1}}{h}, \quad A_2 Y_i = A_1 Y_{i+1} \tag{4}$$

и называются соответственно левой и правой производной. Используется также центральная производная

$$A_3 Y_i = \frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{2h} = \frac{(A_1 + A_2) Y_i}{2}. \tag{5}$$

Разностные операторы A_1, A_2, A_3 имеют шаблоны, состоящие из двух точек, и используются при аппроксимации первой производной $Lu = u'$. Разностные производные n -го порядка определяются как сеточные функции, получаемые путём вычисления первой разностной производной от функции, являющейся разностной производной $n-1$ порядка, например

$$Y_{x_{xi}} = \frac{Y_{x_{i+1}} - Y_{x_i}}{h} = \frac{Y_{i-1} - 2Y_i + Y_{i+1}}{h^2}, \tag{6}$$

$$Y_{x_{xi}} = \frac{Y_{x_{i+1}} - Y_{x_{i-1}}}{2h} = \frac{Y_{i-2} - 2Y_i + Y_{i+2}}{4h^2}. \tag{7}$$

Соответствующие разностные операторы имеют трехточечный шаблон. Аналогично не представляет труда определить разностные производные от сеточных функций нескольких переменных.

После этого краевая задача для дифференциального уравнения заменяется системой линейных или нелинейных алгебраических уравнений (сеточных или разностных уравнений) [4, 5]. Такие системы часто называют разностными схемами. И эти схемы решаются относительно неизвестной сеточной функции. В зависимости от вида (линейная или нелинейная) решаться эта система может различными способами [4, 6, 7]. Решение дифференциального уравнения методом разностных схем дает значения функции в узлах сетки (или решетки). При необходимости вычисления значения функции в точке, не находящейся в узле сетки, приходится проводить все вычисления заново, что является несомненным минусом данного метода [3].

Сущность метода конечных элементов заключается в том, что исследуемая область (область, на которой ищется решение некоторого уравнения) разбивается на элементы [3, 8, 9]. Форма элементов выбирается исследователем. Наиболее употребительными элементами для двумерных областей являются треугольники, прямоугольники, шестиугольники, а также элементы с криволинейными границами; для трехмерных областей – прямоугольные призмы, тетраэдры [9]. Пример разбиения двумерной области треугольными элементами приведен на рис. 2. Выбор той или иной формы элемента зависит от характера уравнения, хотя наиболее удобными являются треугольники (для двумерной области) и тетраэдры (для трехмерной области), так как они являются базовыми. В каждом отдельном элементе искомое решение аппроксимируется функцией, построенной по узловым значениям. Выбор функции, как и выбор формы элементов, зависит от характера уравнения. Наиболее простой является аппроксимация кусочно-планарной функцией, но она не обеспечивает точность решения. Более точного решения обычно достигают подбором наиболее подходящей аппроксимирующей функции [3]. Наиболее распространенной в таком случае является аппроксимация различными полиномами – Лагранжа, Эйлера, Чебышева и др.

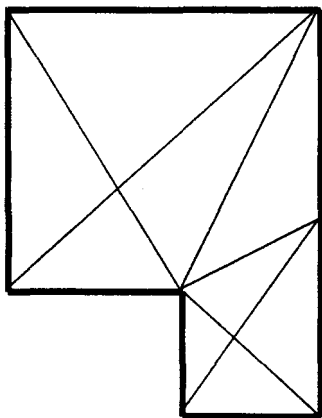


Рис. 2. Пример разбиения области на треугольные элементы

Следует отметить, что в методе конечных элементов в отличие от метода конечных разностей точность решения повышают не за счет уменьшения размеров элементов (шагов сетки разбиения), а за счет подбора наиболее оптимальной аппроксимирующей функции.

В методе конечных элементов используют два основных подхода [8, 9]:

- первый постулирует вариационный экстремальный принцип, справедливый для всей области. При этом решение минимизирует некоторую величину χ , которая является интегралом от неизвестных величин по всей области. Интегрируемая величина χ представляет собой функцию от неизвестных функций (функционал);
- второй использует дифференциальные уравнения, описывающие поведение некоторой произвольной бесконечно малой области.

Каждый из подходов может быть принят за основной, хотя возможен переход от одного к другому с использованием специальных математических методов. Рассмотрим каждый подход в отдельности.

Пусть физическая или математическая постановка задачи требует минимизации функционала χ в некоторой области. Величина χ определяется в виде интеграла по области V и части границы S , на которой неизвестна функция ϕ и (или) ее производные, т.е. она имеет вид

$$\chi = \int_V f(\phi, \frac{\partial}{\partial x} \phi, \dots) dV + \int_S g(\phi, \frac{\partial}{\partial x} \phi, \dots) dS \quad (8)$$

Пусть рассматриваемая область разделена на более мелкие части (элементы) и пусть функции, которые мы хотим определить для каждого элемента, записываются в виде

$$\phi = [N]\{\Phi\}^e \quad (9)$$

Здесь $\{\Phi\}^e$ может содержать узловые значения функции, соответствующие такому элементу, или некоторые характеризующие его параметры (могут быть вектором). $[N]$ – матрица, определяющая зависимость функции формы от координат. Величина ϕ – значение функции в заданной точке.

Для минимизации функционала χ по всем параметрам Φ полной области следует записать систему уравнений

$$\frac{\partial \chi}{\partial \Phi} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \chi}{\partial \Phi_1} \\ \frac{\partial \chi}{\partial \Phi_2} \\ \vdots \end{Bmatrix} = 0 \quad (10)$$

Если справедливо утверждение, что функционал равен сумме вкладов отдельных элементов, то символическое уравнение принимает вид

$$\chi = \sum \chi^e \quad (11)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial \Phi} = \sum \frac{\partial \chi}{\partial \Phi_n} = 0 \quad (12)$$

где суммирование проводится по всем элементам. Это правило составления системы уравнений, минимизирующей функционал для всего ансамбля.

В частности, когда χ является квадратичным функционалом от ϕ и ее производных, производную для элемента e можно записать в виде

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{\Phi\}^e} = [k]^e \{\Phi\}^e + \{F\}^e, \quad (13)$$

где $[k]^e$ и $\{F\}^e$ – постоянные матрицы. Теперь систему уравнений (12) можно записать

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{\Phi\}} = [K]\{\Phi\} + \{F\}, \quad (14)$$

где

$$[K_{ij}] = \sum [k_{ij}]^e \quad (15)$$

$$\{F_i\} = \sum \{F_i\}^e \quad (16)$$

Суммирование производится по всем элементам.

Для того чтобы уменьшение размеров элементов приводило к сходимости, функции, входящие в выражение (8), должны удовлетворять определенным требованиям полноты [8].

При уменьшении размеров элементов функции f и g в интеграле (8) должны оставаться однозначными и хорошо отражать физическую сущность задачи.

Должно оставаться справедливым суммирование (11), и, если не добавлены поверхностные интегралы по границе между элементами, мы должны быть уверены, что величины, подобные f и g , остаются на них ограниченными. Это возможно, если производные наивысшего порядка от ϕ , входящие в выражение для функций f и g , конечны.

На основании предъявленных требований можно выделить следующие два критерия сходимости:

– критерий 1: функции формы элемента $[N]$ должны быть такими, чтобы при соответствующем выборе $\{\Phi\}^e$ и стремлении размеров элемента к нулю можно было получить любые постоянные значения ϕ или ее производных, входящих в функционал;

– критерий 2: функции формы элемента $[N]$ должны быть выработаны так, чтобы ϕ и ее производные, на порядок более низкие, чем производные, входящие в выражения f и g , были непрерывны на границе между элементами.

Последний критерий несложно объяснить. Если элементы разделить между собой очень тонким слоем, который должен быть учтен в определяющих величину χ интегралах, то в нем происходит плав-

ный переход между значениями неизвестных функций в смежных элементах. Если в пределе при его стремлении к нулю вклад в значение χ исчезает, то равенство (9) справедливо.

Следует также отметить, что сходимость метода минимизации функционала зависит от способа разбиения на элементы.

Среди методов минимизации функционала наибольшее распространение получили методы Рунца (классический метод конечных элементов) и метод Канторовича (полудискретный) [9]. В методе Рунца функция в каждом элементе аппроксимируется выражением

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^M \varphi_i \cdot \alpha_i(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad (17)$$

где φ_i – приближенное значение функции в узле, α_i – функция координат (или базисные функции) в N -мерном пространстве.

В методе Канторовича функция в каждом элементе аппроксимируется выражением

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^M \varphi_i(x_1) \cdot \alpha_i(x_2, \dots, x_N), \quad (18)$$

где φ_i – приближенное значение функции в узле, являющееся уже не скаляром, а функцией одной из независимых переменных; α_i – функция от оставшихся $N-1$ переменных.

Наряду с методами, постулирующими вариационный подход, в конечных элементах, широко используются методы, аппроксимирующие решение конечно-разностным способом. Основным является метод взвешенных невязок. Как и в вариационных методах, изучаемая область разделяется на элементы, форма которых выбирается исследователем. В каждом элементе искомая функция обычно аппроксимируется методом Рунца, выражающимся формой записи, представленной в выражении (9).

Преимущества метода взвешенных невязок перед вариационными методами [8]:

- исчезает необходимость искать функциональный эквивалент известным дифференциальным уравнениям;
- эти методы могут быть распространены на задачи, для которых функционал либо вовсе не существует, либо пока еще не получен.

Рассмотрим задачу приближенного решения системы дифференциальных уравнений, которым должна удовлетворять неизвестная функция ϕ в области V . Запишем основное уравнение в виде

$$A(\phi) = 0, \quad (19)$$

а граничное условие на границе S как

$$C(\phi) = 0 \quad (20)$$

Если пробная функция, удовлетворяющая граничным условиям, записана в общей форме

$$\phi_a = [N]\{\Phi\}^e, \quad (21)$$

где $[N]$ – функция координат, $\{\Phi\}$ – система n -параметров, то в общем случае

$$A(\phi_a) = R \neq 0 \quad (22)$$

Наилучшим решением будет то, которое дает во всех точках области V наименьшую невязку R . Это решение можно получить, используя то обстоятельство, что если невязка $R \equiv 0$ всюду в области, то

$$\int_V W R dV = 0, \quad (23)$$

где W – любая функция координат. Если число неизвестных параметров $\{\Phi\}$ равно n , то выбрав n линейно независимых функций W_i , запишем соответствующую систему уравнений

$$\int_V W_i R dV = \int_V W_i A([N]\{\Phi\}) dV = 0, \quad (24)$$

из которой может быть найдена функция $\{\Phi\}$. Этот процесс называется методом взвешенных невязок, а W_i – весовой функцией. Выбор различных весовых функций приводит к различным классическим методам.

Замечание: для метода взвешенных невязок необходимо обеспечить выполнение условий непрерывности функции формы более высокого порядка, чем встречаются в основном уравнении.

Как уже отмечалось, выбор весовых функций приводит к различным частным подходам метода взвешенных невязок. Наиболее известными из них являются методы Галеркина и коллокации [8, 9]. В методе Галеркина в качестве весовых функций берутся функции формы, а в методе коллокации функция в некоторых узлах считается точной и весовая функция в этих узлах равна единице, в остальных узлах – равна нулю.

Как и в методе конечных разностей, после проведения всех преобразований аппроксимирующих функций и объединения элементов мы получаем систему линейных алгебраических уравнений, решение которой дает значения функции в узловых точках.

После проведения обзора можно сделать следующие выводы:

- метод конечных разностей является наиболее старым и изученным методом математического моделирования, к недостаткам которого следует отнести нарушение физической постановки задачи путем сведения к разностным схемам и необходимость перерасчета в случае непопадания интересующей точки в узел сетки;

- метод конечных элементов является современным и широко используемым численным методом решения различных уравнений и их систем, основными преимуществами этого метода являются сохранение физической постановки задачи и непрерывность решения во всей исследуемой области.

На основании этих и других выводов можно сказать, что для наиболее точного расчета электрического поля в системах электрической очистки воздуха наиболее целесообразно использовать метод конечных элементов. Так как электрическое поле является потенциальным, а, как известно, любое потенциальное поле характеризуется своей потенциальной энергией и любая система стремится к минимизации своей потенциальной энергии, то в качестве метода моделирования удобно воспользоваться методом минимизации функционала, где в качестве функционала берется потенциальная энергия [3]

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_V (\nabla \varphi)^2 dV \quad (25)$$

для уравнения Лапласа (электростатическое поле без распределенного пространственного заряда) и

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_V (\nabla \varphi)^2 dV + \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \int_V \rho \cdot \varphi \cdot dV \quad (26)$$

для уравнения Пуассона (электростатическое поле с распределенным пространственным зарядом).

В рамках выполнения работ по созданию электрофильтра для очистки воздуха промышленных помещений было проведено моделирование электростатического поля в системе электродов «игольчатая плоскость – плоскость». В данном случае для расчета поля использовался метод конечных элементов, а именно: метод минимизации функционала. При этом был предпринят ряд упрощений:

- поле рассматривалось как электростатическое, описываемое уравнением Лапласа;
- использовался принцип суперпозиции: поле рассматривалось как сумма полей игл и плоскостей;
- моделирование проводилось в области, заключенной между четырьмя соседними иглами, с учетом нескольких соседних игл (рис. 3).

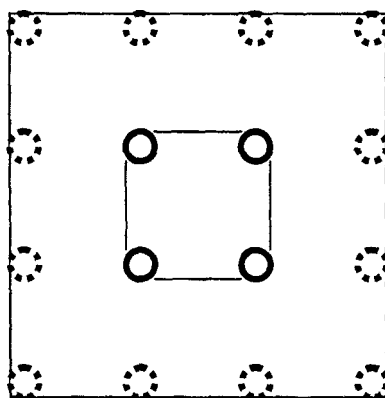


Рис. 3. Система учитываемых игл (вид сверху)

Данные упрощения позволили рассчитывать поле в указанной системе электродов по формуле

$$\vec{E} = \vec{E}_p + \sum \vec{E}_i, \quad (27)$$

где E – полная напряженность поля в точке; E_p – напряженность поля, создаваемого плоскостями; E_i – напряженность поля одной иглы.

Расчет поля между плоскостями не представлял особой сложности, так как это поле является плоскопараллельным, подобным полю внутри конденсатора. Его расчет проводился по широко известным формулам. Поле одной иглы является более сложным трехмерным полем с осевой симметрией. Именно эта его особенность позволяет рассматривать его в двумерном пространстве. Функционал электрического поля с осевой симметрией, описываемого уравнением Лапласа, имеет вид [3]

$$W = \int_V (\nabla \varphi)^2 \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr \cdot dz \quad (28)$$

При аппроксимации использовался метод Ритца, при этом истинное решение заменялось кусочно-планарной функцией, которая адекватно аппроксимирует потенциал внутри типичного треугольного элемента (рис. 4)

$$\varphi = A + Br + Cz \quad (29)$$

Истинное решение заменяется кусочно-планарной функцией; гладкая поверхность фактического распределения потенциала в плоскости (r, z) заменяется многогранной поверхностью аппроксимации [3].

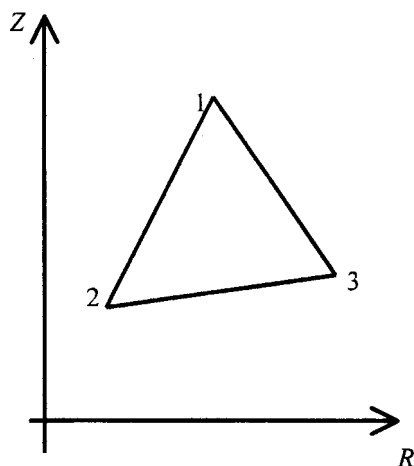


Рис. 4. Типичный треугольный элемент в плоскости

Распределение потенциала вдоль любой стороны треугольника определяется линейной интерполяцией между двумя значениями потенциала в его вершинах. Поэтому, если два треугольника имеют одни и те же вершины, то потенциал на границе между ними будет непрерывным. Таким образом, соблюдаются критерии сходимости метода минимизации функционала, описанные ранее.

Коэффициенты A, B, C в уравнении (29) могут быть найдены из системы трех независимых уравнений, которые получаются из условий, что потенциалы в вершинах треугольника равны $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Данную систему можно записать в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & z_1 \\ 1 & r_2 & z_2 \\ 1 & r_3 & z_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \quad (30)$$

Детерминант матрицы коэффициентов в уравнении (30) равен удвоенной площади треугольника. Подстановка результатов решения системы уравнений (30) в уравнение (29) дает

$$\varphi = \begin{bmatrix} 1 & r & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & r_1 & z_1 \\ 1 & r_2 & z_2 \\ 1 & r_3 & z_3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Комбинируя r, z и элементы обратной матрицы коэффициентов в новые функции положения, приведем уравнение (31) к следующему виду

$$\varphi = \sum_{i=1}^3 \varphi_i \alpha_i(r, z) \quad (32)$$

Здесь

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A} \{ (r_2 z_3 - r_3 z_2) + (z_2 - z_3)r + (r_3 - r_2)z \} \quad (33)$$

есть линейная функция, зависящая только от положения вершин треугольника, площадь которого равна A . Функции $\alpha_2(r, z)$ и $\alpha_3(r, z)$ получаются из (33) циклической перестановкой индексов.

Энергию, связанную с единичным треугольным элементом, можно определить с помощью выражения (28), имея в виду, что областью интегрирования является область данного элемента. Градиент потенциала в пределах элемента может быть найден из уравнения (32) и представлен в виде

$$\nabla \varphi = \sum_{i=1}^3 \varphi_i \nabla \alpha_i \quad (34)$$

Поэтому энергия элемента (28) с учетом выражения (34) приобретает вид

$$W = 2\pi \cdot \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varphi_i \varphi_j \int (\nabla \alpha_i) \cdot (\nabla \alpha_j) \cdot r \cdot dr \cdot dz \quad (35)$$

Для лаконичности введем определение матричных элементов

$$S_{ij}^{(e)} = \int (\nabla \alpha_i) \cdot (\nabla \alpha_j) \cdot r \cdot dr \cdot dz \quad (36)$$

Здесь верхним индексом обозначен треугольный элемент. Таким образом, выражение (35) может быть записано в виде квадратичной формы

$$W^{(e)} = 2\pi \cdot U^T \cdot S^{(e)} \cdot U \quad (37)$$

Здесь U – вектор значений функции $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$. Индекс T обозначает транспонирование. Матрицу S нетрудно вычислить для любого заданного треугольника путем подстановки соотношения, описывающего каждое из α_i , и его циклической перестановки в выражение (36) и выполнение несложных алгебраических преобразований.

Описанный выше способ позволяет получить приближенное выражение для энергии элемента через значения потенциалов в узловых точках. Полная энергия совокупности многих элементов в общем случае равна сумме энергий отдельных элементов

$$W = \sum W^{(e)} \quad (38)$$

Любая сложная модель, составленная из треугольных элементов, может быть построена путем очередного добавления новых треугольников. Рассмотрим этот процесс на примере объединения двух треугольников. На рис. 5 показаны два треугольника до операции объединения и после нее. До операции каждый из элементов характеризуется своим набором потенциалов в вершинах треугольника, и элементы считаются электрически изолированными друг от друга. После объединения треугольники обладают общей системой значений функции в вершинах, что допускается условием непрерывности функции на границах элементов.

Так как каждый треугольник характеризуется тремя значениями потенциала, все возможные состояния этой пары элементов описываются вектором столбцом, содержащим все шесть значений потенциалов в вершинах треугольников

$$U_d^T = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6]_d \quad (39)$$

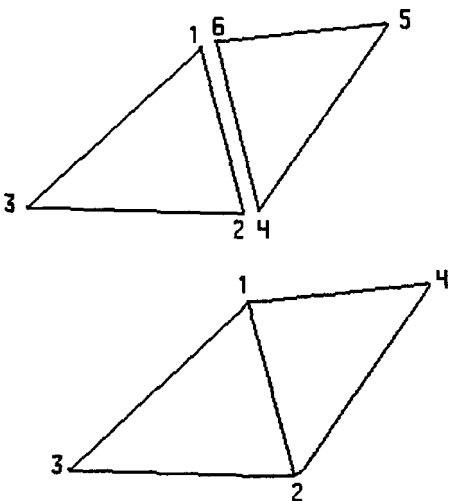


Рис. 5. Элементы до объединения и после него

Здесь индекс d указывает на то, что рассматриваются разъединенные элементы. Полная энергия пары элементов в таком случае равна

$$W = 2\pi \cdot U_d^T \cdot S_d \cdot U_d \tag{40}$$

Здесь

$$S_d = \begin{vmatrix} S_{11}^{(1)} & S_{12}^{(1)} & S_{13}^{(1)} \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} & S_{23}^{(1)} \\ S_{31}^{(1)} & S_{32}^{(1)} & S_{33}^{(1)} \\ & S_{44}^{(2)} & S_{45}^{(2)} & S_{46}^{(2)} \\ & S_{54}^{(2)} & S_{55}^{(2)} & S_{56}^{(2)} \\ & S_{64}^{(2)} & S_{65}^{(2)} & S_{66}^{(2)} \end{vmatrix} \tag{41}$$

Данная матрица является матрицей разъединенной пары элементов, ее можно записать более кратко в блочной форме

$$S_d = \begin{bmatrix} S^{(1)} & 0 \\ 0 & S^{(2)} \end{bmatrix} \tag{42}$$

Как уже указывалось, согласно требованию непрерывности функции на границе между элементами потенциалы в смежных вершинах элементов должны совпадать. Это требование может быть выражено в матричной форме с помощью прямоугольной матрицы C , связывающей потенциалы разъединенных элементов с потенциалами объединенного набора элементов (называемого также связанной системой)

$$U_d = C U_c \tag{43}$$

Здесь индексы d и c обозначают соответственно разъединенные и объединенные совокупности элементов. При нумерации точек, показанной на рис. 5, это соотношение принимает вид

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ 1 & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} \quad (44)$$

В соотношении (44) опущены матричные элементы, которые обращаются в нуль из-за отсутствия связи между соответствующими вершинами. Подставляя соотношение (43) в (40), находим выражение для энергии связанной системы элементов

$$W = 2\pi \cdot U_C^T S U_C \quad (45)$$

Здесь

$$S = C^T S_d C \quad (46)$$

представляет матрицу коэффициентов связанной системы элементов. Для связанной системы из двух треугольников, показанной на рис. 5

$$S = \begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} + S_{66}^{(2)} & S_{12}^{(1)} + S_{64}^{(2)} & S_{13}^{(1)} & S_{65}^{(2)} \\ S_{21}^{(1)} + S_{46}^{(2)} & S_{22}^{(1)} + S_{44}^{(2)} & S_{23}^{(1)} & S_{45}^{(2)} \\ S_{31}^{(1)} & S_{31}^{(1)} & S_{33}^{(1)} & 0 \\ S_{56}^{(2)} & S_{54}^{(2)} & 0 & S_{55}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (47)$$

Для решения задачи необходимо минимизировать запасенную энергию в модели связанной системы конечных элементов. Поскольку выражение для энергии (45) квадратично относительно узловых потенциалов, то оно должно иметь единственный минимум. Следовательно, требование минимума энергии будет соответствовать системе уравнений

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi_k} = 0 \quad (48)$$

Здесь индекс k относится к узловым компонентам вектора связанных потенциалов и, что эквивалентно, к номерам узлов связанной модели. Предположим, что нумерация узлов в связанной модели такова, что все узлы, в которых потенциалы могут варьироваться, нумеруются первыми, а все узлы с заданными потенциалами – последними. Тогда система уравнений (48) может быть записана с использованием матрицы в блочной форме

$$\frac{\partial}{\partial [U_f]_k} [U_f^T U_p^T] \cdot \begin{bmatrix} S_{ff} & S_{fp} \\ S_{pf} & S_{pp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_f \\ U_p \end{bmatrix} = 0, \quad (49)$$

где нижние индексы f и p относятся соответственно к узлам со свободными и заданными значениями потенциалов. Выполняя дифференцирование в системе (49), получаем следующее матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} S_{ff} & S_{fp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_f \\ U_p \end{bmatrix} = 0 \quad (50)$$

Уравнение (50) можно записать в виде

$$S_{ff} U_f = -S_{fp} U_p \quad (51)$$

Матрица коэффициентов S_{ff} в левой части этого уравнения – квадратная и, вообще говоря, не особая. Поэтому формальное решение задачи можно представить в следующей форме

$$U = \begin{bmatrix} -S_{\pi}^{-1} & S_{jp} & U_p \\ & U_p & \end{bmatrix} \quad (52)$$

Приближенное численное решение задачи имеет вид ряда значений узловых потенциалов. Однако важно отметить, что решение задачи методом конечных элементов является единственным и точно определенным везде, а не только на вершинах треугольников, ибо минимизация энергии предполагает особую форму поверхности решения. Ряд значений узловых потенциалов является просто компактным представлением кусочно-планарной поверхности решения, которое дает минимум энергии.

На основании описанной методики было разработано программное обеспечение и проведено моделирование электростатического поля в системе электродов «игольчатая плоскость – плоскость». В ходе проведения моделирования изучалась зависимость средней напряженности поля от высоты игл и расстояния между ними. Полученные результаты позволили подобрать наиболее оптимальные геометрические параметры электродов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.П., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1978. – 289 с., ил.
2. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1974. – 348 с., ил.
3. Сильвестер П., Феррари Р. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков: Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 229 с., ил.
4. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.: Наука, 1980. – 269 с., ил.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 363 с., ил.
6. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 254 с., ил.
7. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 508 с., ил.
8. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике: Пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 546 с., ил.
9. Митчелл Э., Уэйт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными: Пер. с англ. – М.: Мир, 1981. – 246 с., ил.