УДК 528. 23

РЕКУРРЕНТНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

О.Н. СКРИПАЧЕВА

Приводится вывод рекуррентной формулы для класса геодезических проекций, формируемых на основе общей теории их описания из поликонических проекций Лагранжа.

Для широкого класса геодезических проекций, включающего в себя как частные взаимосвязанные варианты наиболее распространенные в мировой геодезической практике проекции, а также объединяющего геодезические проекции, удовлетворяющие критерию Чебышева – Граве о наилучших проекциях, разработана общая теория их описания и общий алгоритм вычислений численных характеристик проекций данного класса [3, 4 и др.]. Данный алгоритм не только допускает широкие возможности минимизации искажений, но и позволяет управлять их распределением внутри изображаемой области для каждой из проекций. Общая теория и алгоритм, полученные на основе теории конформных отображений регулярных поверхностей, обеспечивают возможности расширения семейства конформных проекций при выборе оптимальной геодезической проекции в условиях, регламентируемых требованиями решаемой задачи. Эти требования могут налагать вполне определенные критерии: точности решаемой задачи, размеров информационного поля, степени автоматизации. В этих условиях являются актуальными вопросы совершенствования различных вычислительных аспектов в рамках и на основе общего алгоритма.

В общей теории и алгоритме предусмотрены самые различные пути выбора геодезической проекции с наперед заданными свойствами. На наш взгляд, большой интерес для геодезии представляет детальное исследование места и роли известных в математической картографии [1] поликонических в широком смысле проекций. Эти проекции объединяют в себе как частные случаи цилиндрические, конические и азимутальные проекции эллипсоида на плоскости, и, кроме того, для них даны очень простые правила выполнения критерия Чебышева – Граве [1, 2]. А с учетом того, что общая теория геодезических проекций включает только конформные, мы будем исследовать поликонические в широком смысле конформные проекции Лагранжа.

Чтобы применить общий алгоритм геодезических проекций для класса поликонических проекций Лагранжа, достаточно получить уравнение изображения осевого меридиана [2, 4], которое имеет общее выражение [4]:

$$\Delta X_m = \Sigma C_j P_1^{(j)}. \tag{1}$$

Здесь величины C_j являются постоянными коэффициентами – функциями параметров земного эллипсоида и геодезической широты центральной точки проекции; P_1 определяется разностью изометрических широт текущей и центральной точек на осевом меридиане.

Зная уравнение изображения осевого меридиана, мы имеем конкретный вид конформной проекции, причем только значения коэффициентов C_j определяют конкретный вид геодезической проекции из класса конформных. Можно отметить общее для всего класса геодезических проекций, определяемых уравнением (1), – конформность, симметричность и перспективность относительно центральной точки проекции. Размеры отображаемой области определяются необходимой точностью вычислений численных характеристик проекций, числом коэффициентов C_j. Алгоритм вычисления данных коэффициентов для всего класса геодезических проекций, в том числе и для поликонических, приведен в работах [2, 4].

Известно, что общая теория и алгоритм построены по принципу формирования соответствующих формул для прямого и обратного перехода, т.е. с эллипсоида на плоскость и обратно. Для обратного перехода предполагается использование формул, аналогичных прямому переходу, а коэффициенты формируются методом обращения степенного ряда [3, 4]. Таким образом, значения коэффициентов C_j' для обратного перехода получаются как функции коэффициентов C_j для прямого перехода. Такой подход является оптимальным при реализации общей теории и алгоритма наилучшей геодезической проекции на ЭВМ.

Полученные выражения для обратных коэффициентов поликонических проекций имеют вид:

$$C_1' = V_0 / m_0 c \cos B_0;$$

$$C_2' = \alpha(-1 + 2d) / 2 C_1^2;$$

$$C_3 = \alpha^2(1 - 3d + 3d^2)/3\,C_1^3;$$

$$C_4 = \alpha^3(-1 + 4d - 6d^2 + 4d^3)/4\,C_1^4;$$

$$C_5 = \alpha^4(1 - 5d + 10d^2 - 10d^3 + 5d^4)/5\,C_1^5;$$

$$C_6 = \alpha^5(-1 + 6d - 15d^2 + 20d^3 - 15d^4 + 6d^5)/6\,C_1^6;$$

$$C_7 = \alpha^6(1 - 7d + 21d^2 - 35d^3 + 35d^4 - 21d^5 + 7d^6)/7\,C_1^7;$$

$$C_8 = \alpha^7(-1 + 8d - 28d^2 + 56d^3 - 70d^4 + 56d^5 - 28d^6 + 8d^7)/8\,C_1^8.$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$c = a/(1 - e^2)^{1/2}$ – полярный радиус кривизны эллипсоида;

$\alpha = (1 - (1 - (b/a)^2 \cos^2 B)/(1 + (b/a)^2))^{1/2}$ – параметр, определяющий форму линии равных искажений (изоколы);

$d = (\alpha + \sin B_0)/2$.

Данные выражения получены нами, и сами по себе не представляют большой научной или практической ценности, так как их численные значения могут быть определены в рамках общего алгоритма. Но анализ этих выражений, ранее неизвестных, позволяет сделать весьма интересный вывод о том, что выражения, стоящие в скобках, предоставляют возможность их рекуррентного описания.

Замечаем для любого C_j следующую рекуррентную формулу:

$$C_j = (-1)^{(j-1)}\,C_1^{(j)}\,\alpha^{(j-1)}[(1-d)^j - d^j(-1)^{(j-1)}]/j,\ (j = 1, 2, 3, \ldots, n\ldots).$$

Данная формула представляет большой интерес для науки и практики, поскольку значение n в ней может быть любым, и практически нет ограничений по размерам изображаемой области эллипсоида на плоскости с необходимой точностью, если речь идет о геодезических проекциях на основе поликонических.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бугаевский Л.М. Математическая картография. – М.: Златоуст, 1998. – 400 с.
2. Подшивалов В.П. Геодезические проекции на основе поликонических проекций Лагранжа // Геодезия и картография. – 2001. – № 6. – С. 36 – 40.
3. Подшивалов В.П. Координатная среда для геоинформационных систем // Геодезия и картография. – 1997. – № 6. – С. 51 – 55
4. Подшивалов В.П. Теоретические основы формирования координатной среды для геоинформационных систем. – Новополоцк: ПГУ, 1998. – 125 с.