УДК 528.23

УТОЧНЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КЛАССА ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ, ПРЕДСТАВЛЕННОГО ОБЩЕЙ ТЕОРИЕЙ ОПИСАНИЯ

Ю.А. ГУРЬЕВ

Приведены выражения для коэффициентов класса геодезических проекций, представленных общей теорией описания и методологией формирования. Это позволяет изображать область земного эллипсоида на плоскости в единой системе координат с разностью изометрических широт и долгот до 16° в цилиндрической, конической и азимутальной проекциях. Результаты исследований открывают новые возможности практического применения геодезических проекций.

XXI век характеризуется интенсивным развитием и широким внедрением принципиально новых измерительных технологий в геодезии, основанных на спутниковых системах позиционирования ГЛОНАСС(РФ) и GPS-NAVSTAR (США). Использование таких технологий делает возможным определение взаимного положения пунктов на земной поверхности и в околоземном пространстве с точностью до нескольких миллиметров на десятки километров. В связи с этим актуальной является задача повышения точности формул, благодаря которым возможно высокоточное отображение поверхности земного эллипсоида на плоскости. Таким образом, производится переход от пространственных сфероидических координат к плоским прямоугольным, которые существенно расширяют возможности практического применения баз геодезических данных.

В данной работе приведены результаты вывода более точных формул для проекций класса, описанного в работах профессора В.П. Подшивалова. В работе [1] даны выражения коэффициентов для цилиндрических, азимутальных и конических проекций. Так, например, для квазистереографической азимутальной проекции Руссиля и поперечно-цилиндрической конформной проекции Гаусса – Крюгера приведены формулы для $n = 8$, то есть автор в своей работе ограничивается восьмыми степенями разложения. Это, в свою очередь, позволяет обеспечить необходимую точность вычислений в геодезических проекциях при размерах изображаемой области, когда разность изометрических широт и долгот может достигать 12°. При этом линейные величины на плоскости вычисляются с погрешностью не более 0,001 м, а угловые – 0,001". В конической проекции можно изображать существенно большие области, чем она, собственно, и хороша.

С другой стороны, в геодезии иногда приходится отображать большие по площади контуры земного эллипсоида на плоскости. Так, например, чтобы отобразить территории отдельных государств необходимо несколько шестиградусных координатных зон, принятых в настоящее время, что, в свою очередь, доставляет ряд неудобств исполнителю и в особенности сдерживает развитие и практическое применение автоматизированных информационных систем.

В данной работе приведены формулы, позволяющие изображать область земного эллипсоида с разностью изометрических широт и долгот до 16°. В связи с этим возможно отображение более крупных контуров, что открывает новые возможности в математической картографии.

В работе [2] дано уравнение для изображения осевого меридиана на плоскости в поперечно-цилиндрической конформной проекции Гаусса – Крюгера:

$$\Delta X_m = \left(\frac{dX}{dq}\right)_0 \Delta q + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 X}{dq^2}\right)_0 \Delta q^2 + \ldots, \tag{1}$$

где X – длина дуги меридиана эллипсоида, отсчитанная от экватора до точки с широтой B и имеет место дифференциальная зависимость $dX = \frac{C}{V^3} dB$, поскольку в этой проекции на плоскости осевой меридиан изображается без искажений или, как говорят, в натуральную величину.

Здесь производные вычисляются в фиксированной точке, имеющей координаты B_0 или q_0, при этом $\Delta q = q - q_0$.

В конической конформной проекции Ламберта [2] уравнение меридиана на плоскости имеет вид:

$$\Delta X_m = \frac{C}{V_0} ctgB_0 \left[1 - \exp(-\Delta q \sin B_0\right]. \tag{2}$$

Здесь некоторая параллель эллипсоида с широтой B_0 называется стандартной параллелью и на плоскости проекции изображается без искажений в натуральную величину.

В квазистереографической конформной проекции Руссиля, являющейся частным случаем азимутальных проекций эллипсоида на плоскости, уравнение осевого меридиана имеет вид [2]:

$$\Delta X_m = \Delta X + \frac{\Delta X^3}{12R_0^2} + \frac{\Delta X^5}{120R_0^4} + \ldots, \tag{3}$$

где $R_0 = \frac{C}{V_0^2}$; ΔX – длина дуги осевого меридиана эллипсоида, заключенная между точками B и B_0 или q и q_0, а значение масштаба в точке с координатами B_0, L_0 равно единице.

Выполняя необходимые преобразования формул (1) – (3), приводим их к стандартному виду:

$$\Delta X_m = (X_m - X_0) = \sum_{j=1}^{n} C_j P_1^{(j)} \cdot$$

Тогда с учетом необходимой точности запишем девять коэффициентов для поперечно-цилиндрических проекций

$$c_1 = m_0 \cdot \frac{c}{V_0}\cos B_0;\; c_2 = -\frac{c_1}{2}\sin B_0;\; c_3 = \frac{c_1}{6}\cos^2 B_0 \cdot (tg^2 B_0 - V_0^2);$$

$$c_4 = \frac{c_1}{24}\cdot \sin B_0 \cdot \cos^2 B_0 \cdot (5 - tg^2 B_0 + 9\eta_0'^2 + 4\eta_0'^4);$$

$$c_5 = \frac{c_1}{120}\cos^4 B_0 \cdot (5 - 18tg^2 B_0 + tg^4 B_0 + 14\eta_0'^2 - 58\eta_0'^2 tg^2 B_0 + 13\eta_0'^4 - 64\eta_0'^4 tg^2 B_0);$$

$$c_6 = \frac{c_1}{720}\sin B_0 \cdot \cos^4 B_0 \cdot (58\,tg^2 B_0 - 61 - tg^4 B_0 - 270\eta_0'^2 + 330\eta_0'^2 tg^2 B_0 - 445\eta_0'^4 +$$
$$+ 680\eta_0'^4 tgB_0);$$

$$c_7 = \frac{c_1}{5040}\cos^6 B_0 \cdot (479\,tg^2 B_0 - 179\,tg^4 B_0 - 61 + tg^6 B_0 - 331\eta_0'^2 + 3298\,\eta_0'^2 tg^2 B_0 -$$
$$- 1771\eta_0'^2 tg^4 B_0);$$

$$c_8 = \frac{c_1}{40320}\sin B_0 \cdot \cos^6 B_0 \cdot (1385 - 3111\,tg^2 B_0 + 543\,tg^4 B_0 - tg^6 B_0 + 10899\,\eta_0'^2 -$$
$$- 32802\,\eta_0'^2 tg^2 B_0 + 9219\,\eta_0'^2 tg^4 B_0);$$

$$c_9 = \frac{c_1}{362880}\cos^8 B_0 \cdot (1385 - 19028\; tg^2 B_0 + 18270\; tg^4 B_0 - 1636\; tg^6 B_0 + tg^8 B_0).$$

Здесь и в последующем приняты следующие обозначения: m_0 – масштаб изображения в точке B_0, L_0, сохраняющий своё значение на осевом меридиане в поперечно-цилиндрических проекциях;

$V_0 = \sqrt{1 + \eta_0'^2}$; $c = \frac{a}{\sqrt{1 + e^2}}$ – полярный радиус; $\eta_0'^2 = e'^2 \cos^2 B_0$;

$r = \frac{c}{V_0}\cos B_0$ – радиус кривизны параллели эллипсоида.

Для азимутальной проекции имеем:

$$C_1 = m_0 \cdot \frac{C}{V_0}\cos B_0;\; C_2 = -\frac{C_1}{2}\sin B_0;\; C_3 = \frac{C_1}{12}\cos^2 B_0 \cdot (2\,tg^2 B_0 - V_0^2);$$

$$C_4 = \frac{C_1}{24}\sin B_0 \cos^2 B_0 \cdot (2 - tg^2 B_0 + 6\eta_0'^2 + 4\eta_0'^4);$$

$$C_5 = \frac{C_1}{240}\cos^4 B_0 \cdot (2 - 11\,tg^2 B_0 + 2\,tg^4 B_0 + 12\eta_0'^2 - 91\eta_0'^2 tg^2 B_0 + 18\eta_0'^4 - 128\,\eta_0'^4 tg^2 B_0);$$

$$C_6 = \frac{C_1}{1440}\sin B_0 \cos^4 B_0 \cdot (26\,tg^2 B_0 - 17 - 2\,tg^4 B_0 - 270\eta_0'^2 + 570\eta_0'^2 tg^2 B_0 - 665\eta_0'^4 + 1360\eta_0'^4 tg^2 B_0);$$

$$C_7 = \frac{C_1}{20160}\cos^6 B_0 \cdot (180\,tg^2 B_0 - 17 - 114\,tg^4 B_0 + 4\,tg^6 B_0 - 390\eta_0'^2 + 7200\eta_0'^2 tg^2 B_0 - 6482\eta_0'^2 tg^4 B_0);$$

$$C_8 = \frac{C_1}{40320}\sin B_0 \cos^6 B_0 \cdot (62 - 192\,tg^2 B_0 + 60\,tg^4 B_0 - tg^6 B_0 + 5089\eta_0'^2 - 27510\eta_0'^2 tg^2 B_0 + 8736\eta_0'^2 tg^4 B_0);$$

$$C_9 = \frac{C_1}{725760}\cos^8 B_0 \cdot (62 - 1123\,tg^2 B_0 + 1452\,tg^4 B_0 - 247\,tg^6 B_0 + 2\,tg^8 B_0).$$

В работе [1] для конической проекции уравнение (2) записано в виде рекуррентных выражений для коэффициентов C_j при любом n:

$$C_j = \frac{C_1}{j!}(-1)^{(j-1)}(\sin B_0)^{(j-1)} \; (j = 1,2,3,\ldots,n).$$

Здесь предусмотрена возможность изменения значение масштаба m_0 и формы изоколы, приближая её максимально к контуру изображаемой области. Таким образом, можно получить частную проекцию изображаемой области, которая будет соответствовать критерию Чебышева – Граве о наилучших проекциях.

Ряд задач геодезии и картографии решаются посредством формул, представляющих собой степенные убывающие ряды. Точность решения таких задач зависит от сходимости и числа членов таких разложений. В этих случаях при организации вычислений на ЭВМ рациональнее обратные задачи решать по универсальным формулам обращения степенного ряда. Таким образом можно добиться универсального алгоритма решения обратной задачи, если получен алгоритм решения прямой задачи. Такие подходы описаны, в частности, в работе [2].

Примером рационального применения такого приема также может служить общий алгоритм вычислений для широкого класса геодезических проекций, общая теория которых изложена в работах [4 – 6].

Приведем выражение для восьмого и девятого членов обращенного степенного ряда. Отметим при этом, что до шестой степени такие формулы можно найти в [2], а также в справочниках по математике. До восьмой степени – в работах [1, 3].

$$\left.\begin{aligned}
c_8' = {} & \frac{1}{c_1^{15}}\Big(9c_1^5c_2c_7 - 429c_2^7 - c_1^6c_8 - 45c_1^4c_2^2c_6 - \\
& - 90c_1^4c_2c_3c_5 - 45c_1^4c_2c_4^2 + 495c_1^3c_2^2c_3c_4 + \\
& + 165c_1^3c_2^3c_5 - 495c_1^2c_2^4c_4 + 165c_1^3c_2c_3^3 - \\
& - 990c_1^2c_2^3c_3^2 + 1287c_1c_2^5c_3 - 45c_1^4c_3^2c_4 + \\
& + 9c_1^5c_3c_6 + 9c_1^5c_4c_5\Big) \\
c_9' = {} & \frac{1}{c_1^{17}}(1430c_2^8 - 5005c_1c_2^6c_3 + 2002c_1^2c_2^5c_4 + \\
& + 5005c_1^2c_2^4c_3^2 - 715c_1^3c_2^4c_5 - 2860c_1^3c_2^3c_3c_4 - \\
& - 1430c_1^3c_2^2c_3^3 + 220c_1^4c_2^3c_6 + 660c_1^4c_2^2c_3c_5 + \\
& + 330c_1^4c_2^2c_4^2 + 660c_1^4c_2c_3^2c_4 + 55c_1^4c_3^4 - \\
& - 55c_1^5c_2^2c_7 - 110c_1^5c_2c_3c_6 - 110c_1^5c_2c_4c_5 - \\
& - 55c_1^5c_3^2c_5 - 55c_1^5c_3c_4^2 + 10c_1^6c_2c_8 + 10c_1^6c_3c_7 + \\
& + 10c_1^6c_4c_6 + 5c_1^6c_5^2 - c_1^7c_9)
\end{aligned}\right\}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Подшивалов В.П. Теоретические основы формирования координатной среды для геоинформационных систем: Монография. – Новополоцк: ПГУ, 1998. – 125 с.
2. Морозов В.П. Курс сфероидической геодезии. – М.: Недра, 1979. – 296 с.
3. Бугаевский Л.М. Теория картографических проекций регулярных поверхностей. – М.: Златоуст, 1999. – 144 с.
4. Подшивалов В.П. Общий алгоритм вычислений в геодезических проекциях // Вести ПГУ. Прикладные науки. Т.1. – Новополоцк, 1995. – С. 66 – 74.
5. Подшивалов В.П. Композиционные геодезические проекции // Геодезия и картография. – 2000. – № 8. – С. 39 – 43.
6. Подшивалов В.П. Геодезические проекции на основе поликонических проекций Лагранжа // Геодезия и картография. – 2001. – № 6. – С. 36 – 40.