УДК 519.4

НЕПРИВОДИМЫЕ КОММУТАТИВНЫЕ ПОДГРУППЫ ГРУПП ИЗОМЕТРИЙ ЭРМИТОВЫХ ФОРМ

канд. физ.- мат. наук, доцент А.С. ДЕТИНКО

Пусть f – невырожденная эрмитова форма на пространстве простой размерности q над полем k характеристики $p \geq 0$, $k \neq GF(p^l)$, Γ – одна из групп $U(f, k)$, $SU(f, k)$, где $\Gamma \neq U(f, k)$ при $q = p$. Описываются нормализаторы неприводимых коммутативных подгрупп группы Γ. Доказано, что каждая неприводимая максимальная абелева подгруппа B группы Γ примитивна, а нормализатор $N_\Gamma(B)$ является максимальной разрешимой подгруппой Γ.

Предлагаемая работа является продолжением исследований [1, 2], посвященных изучению неприводимых максимальных разрешимых подгрупп классических групп над произвольным полем k, $char\ k = p \geq 0$. Пусть Γ – одна из групп $G = U(f, k)$, $G' = SU(f, k)$, где f – невырожденная эрмитова форма на векторном пространстве V простой размерности q над полем k. Основная цель статьи – описание максимальных разрешимых подгрупп G, содержащих неприводимый абелев нормальный делитель. Если $k = GF(p^l)$ и $q > 2$, то согласно [2] нормализатор неприводимой коммутативной подгруппы B группы Γ является абсолютно неприводимой примитивной максимальной разрешимой подгруппой группы Γ, кроме случая $q = 3$, $p^l = 4$. Ниже для произвольного бесконечного поля k будет доказано, что $N_\Gamma(B)$ – примитивная максимальная разрешимая подгруппа Γ, где $\Gamma \neq G$ при $q = p$. При изучении в [2] группы $N_\Gamma(B)$ использовались результаты Хупперта из [3] о неприводимых коммутативных подгруппах Γ. В связи с интересом к рассмотренным в [3] циклам Зингера, в [4] было доказано, что при $k = GF(p^l)$ нормализаторы неприводимых коммутативных подгрупп группы $GL(q, k)$ являются максимальными подгруппами в $GL(q, k)$. Изучение неприводимых коммутативных подгрупп вызвано также некоторыми вопросами подгрупповой структуры конечных простых групп. В классификации Ашбахера [5] нормализаторы таких подгрупп содержатся в множестве C_3 . Максимальность групп из класса C_3 в более общей ситуации произвольного поля рассматривалась в [6].

Введем следующие обозначения. Пусть δ: $x \rightarrow \underline{x}$ – инволютивный автоморфизм поля k, F – поле δ – инвариантных элементов из k , $k_l = \{x \in k^*\colon x\underline{x} = 1\}$. Если $\Delta \subset M(q, k)$ – расширение степени q поля kE_q и δ – FE_q-инволюция поля Δ, где $\delta(x) = \underline{x}$ при $x \in kE_q$, то через Δ' и Δ'_l обозначим группы $\{x \in \Delta^*\colon x\delta(x) = E_q\}$ и $\Delta' \cap SL(q, k)$ соответственно. Пусть Φ – матрица формы f в некотором базисе пространства V, B – неприводимая коммутативная подгруппа группы G или G' соответственно. Тогда $< B >_k = \Delta_B = \Delta$ – поле, являющееся расширением степени q поля kE_q, δ:$x \rightarrow \underline{\Phi}^{-1}\underline{x}^T\underline{\Phi}$, $x \in \Delta$, – FE_q-инволюция поля Δ, а Δ' и Δ'_l – неприводимые максимальные коммутативные подгруппы групп G и G' соответственно. Поскольку случай $k = GF(p^l)$ рассматривался в [2], будем предполагать, что поле k бесконечно.

ЛЕММА 1. Если расширение Δ/kE_q сепарабельное, то факторгруппа Δ'/k_1E_q бесконечна.

Доказательство. Покажем, что в группе Δ^* существует элемент x, для которого $\delta(x) \neq x$ и $Tr(x) = \eta$, где $\eta = 0$ при $q \neq p$ и $\eta = 1$ если $q = p$. Поскольку расширение Δ/kE_q сепарабельное, в Δ можно выбрать не содержащийся в kE_q элемент h такой, что $Tr(h) = \alpha \neq 0$. Положим матрицу h_1 равной $h - \alpha^{q-1}E_q$, если $q \neq p$, и $h_l = \alpha^{-1}h$ при $q = p$. Пусть, далее, элемент w равен 1, если $\delta(h_l) \neq h_l$ и w – произвольный фиксированный не содержащийся в F^* элемент из k^* в противном случае. Тогда при $q \neq p$ имеем: $Tr(h_1) = Tr(h - \alpha^{\,q-1}E_q) = \alpha - \alpha = 0$. Следовательно, в качестве x можно взять элемент wh_l, так как $\delta(wh_1) \neq wh_1$ и $Tr(wh_1) = wTr(h_1) = 0$. Если же $q = p$, то в качестве x возьмем элемент $h_1 + wE_q$, ибо $Tr(h_1 + wE_q) = Tr(\alpha^{-1}h) = 1$ и $\delta(h_1 + wE_q) \neq h_1 + wE_q$. Для произвольного $\gamma \in F^*$ положим матрицу b_γ, равной $(x + \gamma E_q)^{-1}\delta(x + \gamma E_q)$. Заметим, что $b_\gamma \in \Delta'$ и $x \neq -\gamma E_q$, так как из определения матрицы x вытекает, что $x \notin kE_q$. Пусть $\tau = Tr(x\delta(x))$, а $\gamma_1 \neq \gamma_2$ – произвольные элементы из F^* такие, что $\gamma_1\gamma_2 \neq -\tau q^{-1}$, если $q \neq p$, и $\gamma_1 + \gamma_2 \neq -\tau$ при $q = p$. Поскольку поле F не является конечным, существует бесконечно много попарно различных элементов γ_1, γ_2, удовлетворяющих этим условиям. Тем самым, для доказательства леммы достаточно показать, что $b_{\gamma_1}b_{\gamma_2} \notin k_lE_q$. Пусть, напротив, $b_{\gamma_1} = \beta b_{\gamma_2}$ для некоторого $\beta \in k^*$. Тогда $(x + \gamma_2E_q)\delta(x + \gamma E_q) = \beta(x + \gamma_1E_q)\delta(x + \gamma_2E_q)$, то есть

$$x\delta(x) + \gamma_2\delta(x) + \gamma_1x + \gamma_1\gamma_2E_q = \beta(x\delta(x) + \gamma_1\delta(x) + \gamma_2x + \gamma_1\gamma_2E_q). \tag{1}$$

Вычисляя след от обеих частей равенства (1), имеем: $a = \beta a$, где $a = \tau + \gamma_2\eta + \gamma_1\eta + \gamma_1\gamma_2q$. Предположим, что $a = 0$. Тогда $\tau + \gamma_1\gamma_2q = 0$ при $q \neq p$ и $\tau + \gamma_1 + \gamma_2 = 0$, если $q = p$. Однако это противоречит выбору элементов γ_1, γ_2. Следовательно, $\beta = 1$ и в силу (1) $x(\gamma_1 - \gamma_2) = \delta(x)(\gamma_1 - \gamma_2)$. Отсюда $\gamma_1 = \gamma_2$ или же $x = \delta(x)$. Полученное противоречие доказывает лемму.

ЛЕММА 2. Пусть $L_0 = \{x \in \Delta': x^q \in k_1E_q\}$. Если расширение Δ/kE_q сепарабельное, то факторгруппа L_0k_1/k_1E_q конечна.

Доказательство. Если $q = p$, то согласно [7, гл. 8] $L_0 \subset k_1E_q$. Пусть $p \neq q$, a – не содержащийся в k_1E_q элемент из L_0, $a^q = \alpha E_q$, $\alpha \in k^*$. Если Δ^* содержит элемент ε порядка q, то $\varepsilon \in k^*E_q$, так как Δ/kE_q – расширение степени q. Предположим, что $\alpha = \alpha_1^q$ для некоторого $\alpha_1 = k^*$. Тогда $(\alpha_1^{-1}) = E_q$, то есть $\alpha_1^{-1}a$ – элемент порядка q и, следовательно, $\alpha_1^{-1} \in k^*E$, что противоречит выбору элемента a. Значит, $\alpha \notin (k^*)^q$ и с учетом леммы 6 из [1] каждый, не содержащийся в k_1E_q элемент b из L_0, принадлежит $a^rk_1E_q$, $1 \leq r \leq q$. Таким образом, $|L_0/k_1E_q| < \infty$.

СЛЕДСТВИЕ. Если расширение Δ/kE_q сепарабельное, то факторгруппа Δ'/L_0k_1 бесконечна.

Доказательство. Согласно лемме 1 факторгруппа Δ'/k_1E_q бесконечна. Поскольку $(\Delta'/L_0k_1)/(L_0k_1/k_1E_q)$ изоморфна Δ'/k_1E_q и в силу леммы 2 $|L_0k_1/k_1E_q| < \infty$, факторгруппа Δ'/L_0k_1 бесконечна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если расширение Δ/kE_q сепарабельное, то Δ'_1 – бесконечная примитивная неприводимая подгруппа Δ^*.

Доказательство. Покажем, что группа Δ'_1 бесконечна. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_n$. – представители различных смежных классов Δ'/k_1E_q, b_i не принадлежат $L_0k_1E_q$, $\det b_i = \gamma_i$. Тогда $\det\gamma_i^{-1}b_i^q$ и $\gamma_i^{-1}b_i^q \in \Delta'_1$ так как $\gamma_i \in k_1$. Если $\gamma_i^{-1}b_i^q = \gamma_i^{-1}b_i^q$ при $i \neq j$, то $(b_ib_j^{-1})^q = \gamma_i\gamma_j^{-1}E_q$, то есть $b_ib_j^{-1} \in L_0$ и $b_i \in b_jL_0$, что противоречит выбору элементов b_i, b_j. Следовательно, $\gamma^{-1}b_1^q, \ldots, \gamma^{-1}b_n^q$ – попарно различные элементы из Δ'_1. Ввиду следствия из леммы 2, множество элементов $b_1, \ldots, b_n$ является бесконечным. Таким образом, группа Δ'_1 бесконечна. Осталось доказать, что группа Δ'_1 примитивна и неприводима. Поскольку $|\Delta'_1 \cap k^*E_q| \leq q$, а группа Δ'_1 бесконечна, то Δ'_1 содержит некоторый нескалярный элемент h. Так как Δ – поле, то неприводимые части $\langle h\rangle$ попарно эквивалентны. Тогда $\langle h \rangle$ неприводима и, следовательно, группа Δ'_1 также неприводима. Предположим, что Δ'_1 импримитивна, $V = V_1 + \ldots + V_q$ – разложение пространства V на системы импримитивности Δ'_1, а D – ядро соответствующего этому разложению гомоморфизма Δ'_1 в симметрическую группу S_q [8]. Поскольку Δ – поле, $D \subset k^*E_q$, тогда $|D| \leq q$. А так как $|\Delta'_1/D| \leq |S_q|$, то $|\Delta'_1| < \infty$. Противоречие. Таким образом, группа Δ'_1 примитивна.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть B – неприводимая максимальная коммутативная подгруппа Γ, где $\Gamma \neq G$ при $q = p$. Тогда B – бесконечная примитивная подгруппа группы Γ.

ЛЕММА 3. Пусть B_1, B_2 – неприводимые коммутативные подгруппы $GL(q, k)$. Если пересечение $B_1 \cap B_2$ не содержится в k^*E_q, то группа B_1B_2 коммутативна.

Доказательство. Пусть $b \notin kE_q$ – элемент из $B_1 \cap B_2$. Поскольку B_i – неприводимая коммутативная группа, $\langle B_i\rangle_k = \Delta_{B_i}$ – поле, являющееся расширением степени q поля kE_q, а так как $b \notin kE_q$, то $\Delta_{B_i} = k(b)$. Следовательно, B_1, B_2 содержатся в мультипликативной группе $\Delta_{B_1}^* = \Delta_{B_2}^*$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть B – неприводимая максимальная коммутативная подгруппа Γ. Если H – коммутативная подгруппа Γ такая, что $H \cap B$ не содержится в k^*E_q, то $H \subset B$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть B – неприводимая коммутативная подгруппа Γ, $N = N_\Gamma(B)$, $C = C_\Gamma(B)$. Тогда группа N разрешима, C – максимальная коммутативная подгруппа Γ и $N = C$ или же $|N/C| = q$.

Доказательство. Ввиду того, что $C = \Delta_B^* \cap \Gamma$, группа C является неприводимой максимальной коммутативной подгруппой Γ. Так как N содержится в нормализаторе Δ_B^* и $N \cap \Delta_B^* = C$, факторгруппа N/C изоморфна подгруппе группы kE_q – автоморфизмов поля Δ_B. Отсюда $N = C$ или $|N/C| = q$, поскольку Δ_B/kE_q – расширение степени q.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $q \neq p$, B – неприводимая коммутативная подгруппа G. Тогда пересечение $C_G(B) \cap G'$ является неприводимой максимальной коммутативной подгруппой группы G'.

Как вытекает из предложения 2 группа $N = N_\Gamma(B)$ коммутативна или же абсолютно неприводима, причем последний случай возможен только когда Δ_B/kE_q – расширение Галуа. Если $k = GF(p^l)$, $q > 2$, то согласно [2] это условие является также достаточным, и группа N всегда абсолютно неприводима. Если же $k \neq GF(p^l)$, то, как показывает следующее предложение, для абсолютной неприводимости группы N необходимо, чтобы расширение Δ_B/kE_q удовлетворяло более сильному требованию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть B – неприводимая коммутативная подгруппа Γ, $q > 2$. Если группа $N = N_\Gamma(B)$ абсолютно неприводима, то расширение Δ_B/FE_q – циклическое.

Доказательство. Так как группа N абсолютно неприводима, существует $t \in N$ такой, что $t \notin C$. Тогда $\sigma: x \to txt^{-1}$, $x \in \Delta_B$, является kE_q-автоморфизмом поля Δ_B порядка q. Поскольку Δ/FE_q – расширение степени $2q$ и $\delta: x \to \underline{\Phi}^{-1}\underline{x}^T\underline{\Phi}$, $x \in \Delta_B$ – FE_q – автоморфизм Δ_B порядка 2, то для доказательства достаточно показать, что $\delta\sigma = \sigma\delta$. Имеем: $\delta\sigma(x) = \sigma(\underline{\Phi}^{-1}\underline{x}^T\underline{\Phi}) = t\underline{\Phi}^{-1}\underline{x}^T\underline{\Phi}t^{-1}$, а $\delta\sigma(x) = \underline{\Phi}^{-1}(\underline{t}^{-1})^T\underline{x}^T\underline{t}^T\underline{\Phi}$. Ввиду того, что $t \in \Gamma$, $t^T\Phi\underline{t} = \Phi$ и $\underline{t}^{-1}\Phi^{-1}(t^T)^{-1} = \Phi^{-1}$, то есть $t\,\underline{\Phi}^{-1} = \underline{\Phi}^{-1}(\underline{t}^T)^{-1}$, откуда $\delta\sigma = \sigma\delta$, что и требовалось доказать.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть B – неприводимая максимальная коммутативная подгруппа группы G'. Тогда B – единственный максимальный абелев нормальный делитель группы $H=N_{G'}(B)$.

Доказательство. Пусть B_1 – еще один максимальный абелев нормальный делитель группы H, $H_1 = N_{G'}(B_1)$, $C_1 = C_{G'}(B_{B_1})$. Поскольку группа B неприводима, с учетом предложения 2 группа C_1 является максимальной коммутативной подгруппой G'. Заметим, что $H \subset H_1$ и, следовательно, $B \subset H_1$. Так как $/H_1/C_1/ \le q$, то $/B/B \cap C_1/ = /BC_1/C_1/ \le q$. В силу предложения 1 группа B бесконечна. Следовательно, $B \cap C_1$ не содержится в k^*E_q, ибо $/G' \cap kE_q/ \le q$. Тогда согласно следствию из леммы 3 $C_1 \subset B$, откуда $B_1 \subset B$.

ТЕОРЕМА. Пусть B – неприводимая коммутативная подгруппа группы G', $H = N_{G'}(B)$. Тогда H – примитивная максимальная разрешимая подгруппа группы G'.

Доказательство. В силу предложения 2 группа H разрешима, причем $H = \langle C, t\rangle$, где $C = \Delta_B^* \cap G'$ – неприводимая максимальная коммутативная подгруппа G', $/H/C/ \le q$. Согласно следствию из предложения 1 группа H примитивна. Пусть $H \subset L$ – максимальная разрешимая подгруппа G', B_1 – максимальный абелев нормальный делитель L. Так как группа L примитивна, то $B_1 \subset k_1E_q$ или же группа B_1 неприводима. Пусть $B_1 \subset k_1E_q$. Тогда каждый максимальный абелев нормальный делитель L содержится в k^*E_q и в силу [8] $|L/B_1/ < \infty$. Однако в силу следствия из предложения 1 группа $C/B_1 = C/G' \cap k^*E_q$ бесконечна. Отсюда группа B_1 неприводима. Ввиду предложения 2 B_1 – максимальная абелева подгруппа G' и $/L/B_1/ \le q$. Отсюда $/C/B_1 \cap C/ = /CB_1/B_1/ \le q$. Так как группа C бесконечна, $B_1 \cap C$ не содержится в k^*E_q и ввиду следствия из леммы 3 $B_1 = C$. Отсюда $H = L$, поскольку $H = N_{G'}(C)$, а $L = N_{G'}(C)$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $q \ne p$ и B – неприводимая коммутативная подгруппа группы G. Тогда $N_G(B)$ примитивная максимальная разрешимая подгруппа группы G.

Доказательство. С учетом предложения 2 без ограничения общности будем считать, что B – максимальная коммутативная подгруппа G. Согласно предложению 2 и следствию из предложения 1, группа H является примитивной и разрешимой. Пусть $L \subset H$ – максимальная разрешимая подгруппа G, B_1 – максимальный абелев нормальный делитель L. Если $B_1 = k_1E_q$, то в силу [8] $/L/B_1/ < \infty$. Тогда $/B/k_1E_q/ < \infty$, что противоречит лемме 1. Следовательно, группа B_1 неприводима, причем в силу предложения 2 B_1 – максимальная коммутативная подгруппа G. Пусть $B' = B \cap G'$, $B'_1 = B_1 \cap G'$. В силу следствия из предложения 2 группы B', B'_1 являются неприводимыми максимальными абелевыми подгруппами G'. Согласно теореме $H' = N_{G'}(B') = H \cap G'$ – максимальная разрешимая подгруппа G', а так как $H' \subset L'$, где $L' = N_{G'}(B'_1) = L \cap G'$, то $H' = L'$. Отсюда B', B'_1 – максимальные абелевы нормальные делители группы H' и в силу предложения 4 $B' = B'_1$. Тогда ввиду следствия из леммы 3 $B = B_1$ и $L = H$, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Детинко А.С. Максимальные разрешимые подгруппы специальной линейной группы над произвольным полем // Сиб. мат. журн. – 1992. – Т. 33. – № 6. – С. 39 – 46.
2. Detinko A.S. Solvable subgroups of the classical groups over finite fields // III междунар. конф. по алгебре: Тез. докл. конф. – Красноярск, 1993. – С. 76.
3. Huppert B. Singer-Zuklen in klassichen Gruppen // Math. Z. –1970. – Bd. 117. – S. 141 – 150.
4. Kantor W. Linear groups containing a Singer cycle // J. Algebra. – 1980 . – V. 62. – P. 232 – 234.
5. Aschbacker M. On the maximal subgroups of the finite classical groups // Inv. Math. – 1984. – V. 76. – P. 469 – 514.
6. Zi S. Overgroups of certain subgroups in the classical groups over division rings // Contemp. Math. – 1989. – V. 82. – P. 53 – 57.
7. Ленг С. Алгебра. – М.: Мир, 1968. – 350 с.
8. Супруненко Д.А. Группы матриц. – М.: Наука, 1972. – 351 с.