УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ, ДОПУСКАЮЩИХ КОПРОСТОЙ АВТОМОРФИЗМ БОЛЬШОГО ПОРЯДКА

доктор физ.- мат. наук, профессор Э.М. ПАЛЬЧИК,
А.М. ШМИДТ, С.Ю. БАШУН

Доказывается, что если конечная К-группа X допускает копростой автоморфизм y большого порядка (например, $|<y>|$ больше порядка любой силовской подгруппы из X), то $X = C \cdot F(X)$, где F(X) – подгруппа Фаттинга группы X, а $C = C_X(y)$.

1. Введение

В работе используются стандартные обозначения и терминология теории конечных групп, которые можно найти в [1 – 3].

1.1. СОГЛАШЕНИЕ. Всюду ниже запись $(X, y, C, r) \in 1.1$ означает, что X – конечная группа, допускающая автоморфизм y простого порядка r, $(|X|, r) = 1$, $C = C_X(y)$. (Тогда y называют копростым автоморфизмом группы X).

Изучению строения группы X в зависимости от свойств C посвящено довольно много работ. Начало исследованиям положил, по-видимому, результат Д. Томпсона [1, теорема Y.8.14]: если $C = 1$, то $X = F(X)$. Упомянем здесь также важную работу [4], в которой проведено исследование непростого случая, когда $|C| = 2$.

Отметим также работы [5] и [6], в которых доказывается, что при любом C для конечной K-группы X (то есть группы, у которой простые неабелевы композиционные факторы принадлежат множеству $Chev \cup Spor \cup \{A_n / n \geq 5\}$) верно одно из следующих двух утверждений: 1) $X = F(X) \cdot C$, или 2) X содержит y-инвариантную секцию X^* порядка $p^\alpha \cdot q^\beta$ со специальными свойствами.

Целью этой работы является уточнение строения X^* и применение этого для описания строения X в ряде частных случаев, например, когда $|<y>| = r$ – большое число.

2. Основные используемые результаты и понятия

$A(H)$ – множество абелевых подгрупп наибольшего порядка группы H. Примарная группа – группа, порядок которой есть степень одного простого числа.

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть y-инвариантная группа X имеет y-инвариантные подгруппы A и B, причем $A \triangleleft B$. Тогда $B^* = B/A$ условимся называть y-инвариантной секцией группы X.

2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть X – конечная группа, обладающая свойствами:

2.2(1) $|X| = p^{ar} q^b$, где p, q, r – попарно различные простые числа, $b/(r-1)$, $q^b \equiv 1 \pmod r$ и b – наименьшее целое число с этим свойством;

2.2(2) $\Phi(X) = 1 = Z(X)$;

2.2(3) силовская p-подгруппа P нормальна в X и $C_X(P) = P$;

2.2(4) силовская q-подгруппа Q из X обладает свойствами: $\Phi(Q) = 1$, $C_X(Q) = Q$.

Будем в дальнейшем такую группу X называть группой типа (p, q, ar, b).

Будем говорить, что группа G, допускающая копростой автоморфизм y порядка r, имеет y-инвариантную секцию X типа (p, q, ar, b), если выполняются следующие условия:

2.2(5) X – группа типа (p, q, ar, b);

2.2(6) в группе $Y = X\lambda < y>$ ее силовская p-подгруппа является минимальной нормальной подгруппой;

2.2(7) $|C_X(y)| = p^a$.

2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть X – конечная группа, обладающая свойствами:

2.3(1) $|X| = q^{2k+1} \cdot p^c$, $p > 2$, $Z(X) = 1 = \Phi(X)$;

2.3(2) силовская p-подгруппа P нормальна в X и $C_X(P) = P$;

2.3(3) силовская q-подгруппа T из X является экстраспециальной, $exp(T) = q$ при $q > 2$, $C_X(T) = Z(T)$, $c = q^k \cdot c_1$ или $T \cong Q_8$.

В дальнейшем такую группу X назовем группой типа (p, q, k, c).

Будем говорить, что y-инвариантная группа G имеет y-инвариантную секцию X типа (p, q, k, c), если выполняются следующие условия:

2.3(4) X – группа типа (p, q, k, c);

2.3(5) в группе $Y = X\lambda < y >$ ее силовская p-подгруппа P является минимальной нормальной подгруппой;

2.3(6) $Z(T) \lhd T\lambda < y >$ и $T < y > / Z(T)$ имеет только примарные собственные подгруппы, $C_X(y) = C$ есть или группа Фробениуса порядка $p^a \cdot q$, или $C = C_T(y) = Z(T)$;

2.3(7) если $C_X(y) = Z(T)$, то $q = 2$ и $r = 2^k + 1$; если $|C| = p^a \cdot q$, то $|P : C_p| \geq p^{r-1}$.

В [6] приведены примеры, показывающие, что y-инвариантные секции типа (p, q, ar, b) встречаются в y-инвариантных подгруппах Бореля групп лиевского типа.

2.4. ЗАМЕЧАНИЕ. То, что в определении 2.3 $exp\ (T) = q$ при $q \neq 2$ следует из доказательства теоремы 2 в [5]. В самом деле, из промежуточных пунктов (10) и (16) в доказательстве теоремы 2 в [5] следует, что $Z(T) = C_T(y) \cong Z_q$ есть единственная наибольшая собственная y-инвариантная подгруппа в T. В частности, $Z(T)$ есть единственная характеристическая подгруппа в T. Но тогда по теореме III.13.10 a) в [1] $exp\ (T) = q$.

2.5. ТЕОРЕМА [8, теорема 8]. Пусть P – конечная p-группа и P' – циклическая группа с $\Omega_1(P') \leq Z(P)$ для $p > 2$. Если B – абелева нормальная подгруппа в P, то B содержится в подгруппе $A \in A(P)$.

2.6. ТЕОРЕМА [9, лемма 1.1]. Пусть X – конечная группа с неинвариантной силовской TI-подгруппой P. Если X – p-разрешимая группа, то P или циклическая, или обобщенная группа кватернионов.

2.7. ЛЕММА [1, с. 355]. Пусть H – экстраспециальная q-группа экспоненты $q > 2$ порядка q^{2k+1}. Тогда $H = <x_1,\ldots,x_k; y_1,\ldots,y_k>$, $x_i^q = y_i^q = [x_i, y_i]^q = 1$, $[x_i, x_j] = [y_i, y_j] = 1$, $[x_i, y_j] = 1$ для $i \neq j$, $[x_i, y_i, x_j] = [x_i, y_i, y_j] = 1$.

2.8. ЛЕММА. Пусть H – экстраспециальная q-группа экспоненты $q > 2$ порядка q^{2k+1}. A и B – максимальные абелевы нормальные подгруппы из H такие, что $AB = H$, $A \cap B = Z(H) = Z$. Тогда $|A| = |B| = q^{k+1}$, A и B – элементарные абелевы подгруппы из $A(H)$, $A = <x_1,\ldots,x_k>$, $B = <y_1,\ldots,y_k>$ и $\{x_i, y_i / i = \overline{1,k}\}$ удовлетворяют соотношениям, указанным в лемме 2.7.

Доказательство. То, что A и B существуют, следует из теоремы III.13.7 в [1]. Поэтому все следует из $Z = H'$ и теоремы 2.5. Лемма доказана.

2.9. ТЕОРЕМА [12, теорема 2.5]. Предположим, что H есть экстраспециальная q-группа порядка q^{2k+1} для простого числа q. Пусть $G = H\lambda R$, $|R| = n$, $(n, q) = 1$ и для всех $1 \neq x \in R$ $C_H(x) = Z(H) = Z$. Пусть F – поле, характеристика которого не делит $|G|$. Тогда n делит $q^k + 1$ или $q^k - 1$, и если $n \neq q^k + 1$, то для каждого точного нетривиального FG-модуля V имеет место: $C_V(R) \neq 0$.

2.10. ТЕОРЕМА [13]. Пусть p и q – два простых числа, m и n – натуральные числа, $m \geq 1$, $n \geq 1$. Предположим, что $p^m = q^n + 1$. Тогда имеет место одна из возможностей:

(1) $q = 2, p = 3, n = 3, m = 2$;

(2) $q = 2$, $m = 1$, n – степень числа 2, $p = 2^n + 1$ – простое число Ферма;

(3) $p = 2$, $n = 1$, $q = r^m - 1$ – простое число Мерсенна (в частности, m – простое число).

3. Предварительные результаты

3.1. ЛЕММА. Пусть элементарная абелева q-группа E порядка q^2 действует точно на элементарной абелевой p-группе P порядка p^n так, что одна из ее подгрупп Q порядка q действует на P регулярно (то есть $P\lambda Q$ – группа Фробениуса). Пусть $Q_1,\ldots,Q_q$ – остальные подгруппы порядка q из E, $C_P(Q_i) = P_i$, $i = \overline{1,q}$. Тогда $P_1 \times \ldots \times P_q = P$. Если $P_i \cong P_j$ для $i \neq j$, то $|C_P(Q_i)| = p^{n/q}$.

Доказательство. По лемме X.1.9 [2] $P=<P_i/i=\overline{1,q}>$. Для $i\neq j$ $P_i\cap P_j=D=1$, ибо в противном случае $[D,<Q_i,Q_j>]=1$, что противоречило бы условию леммы ввиду $E=<Q_i,Q_j>$. Поэтому подгруппа $P_1\times P_2$ в P существует. Пусть $P_1\times P_2\times\ldots\times P_l$ – наибольшая такая подгруппа, но $l<q$. Тогда имеется подгруппа P_{l+1} такая, что $1\neq c\in P_1\times\ldots\times P_l\cap P_{l+1}$. Так как $c\in P_{l+1}$, то $[c,Q_{l+1}]=1$. Тогда для $1\neq t\in Q_{l+1}$ имеем: $c_1\cdots c_l=c=c^t=c_1^t\cdots c_l^t$, где $c_i\in P_i, i=\overline{1,l}$. Пусть $1\neq c_i\in P_i$. Если $c_i^t\in P_j, j\neq i$, то $[c_i^t,Q_j]=1$. Тогда $[c_i,Q_j^{t^{-1}}]=1$. Но $t\in Q_{l+1}\subseteq E$, поэтому $Q_j^{t^{-1}}=Q_j$. Поэтому $[c_i,Q_j]=1$. Кроме того, $[c_i,Q_i]=1$. Тогда $[c_i,<Q_j,Q_i>=E]=1$, что противоречит условию, так как $E\supset Q$ и $P\lambda Q$ – группа Фробениуса по условию. Если же $c_i^t\in P_i$, то в силу единственности разложения c должно быть $c_i^t=c_i,[t,c_i]=1$. Тогда и $[Q_{l+1},c_i]=1$. Из $[Q_i,c_i]=1$ опять следует, что $[c_i,Q_iQ_{l+1}=E]=1$. Поэтому $l=q$ и $P_1\times\ldots\times P_q=P$. Лемма доказана.

Следующая теорема уточняет теорему 4.1 из [6].

3.2. ТЕОРЕМА. Пусть экстраспециальная q-группа H экспоненты q при $q>2$ порядка q^{2k+1} действует на элементарной абелевой p-группе P так, что $Z(H)=Z$ действует на P регулярно. Пусть T – наибольшее q-силовское пересечение $H\cap H^x$ группы $G=P\lambda H$ в смысле Бернсайда. Пусть $N=N_G(T)=P_o\lambda Q$, где $P_o\subset P, Q\subseteq H$. Пусть P_1 – любая нормальная в N подгруппа порядка p^b, где $p^b\equiv 1(\mathrm{mod}\,q)$ и b – наименьшее целое число с этим свойством. Тогда

(1) $|P|=p^{b\cdot q^k\cdot m}$;

(2) если T_o – элементарная абелева подгруппа порядка p^l из H, не содержащая Z, то $|C_P(T_o)|=p^{b\cdot q^{k-l}\cdot m}$.

Доказательство. Если $q=2$, то оба утверждения (1) и (2) доказаны в лемме 2.10 – заключения (i) и (iii) работы [4]. Поэтому пусть q > 2, $\exp(H)=q$.

Если $H\cap H^g=1$ для всех $g\in G$, то по теореме 2.7.7 из [7] X есть группа Фробениуса. По теореме 1.3.1 из [7] тогда H – циклическая группа. Поэтому впредь можно считать, что $H\cap H^g\neq 1$ для некоторого $g\in G$. Пусть T – наибольшее q-силовское пересечение подгрупп H и H^x, $x\in G$. Тогда в группе $N_G(T)/T$ любые две S_q-подгруппы уже пересекаются по 1 и их порождение не является q-группой. Поэтому p делит $|N|$, где $N=N_G(T)=P_o\lambda Q$, где P_o есть S_P-подгруппа в N, а Q есть S_q-подгруппа в N, лежащая в H. Из условия следует, что Z не принадлежит T, ввиду $[P_o,T]=1$. По теореме III. 13.7 [1] $|Z|=q$, в $A(H)$ существуют подгруппы A и B такие, что $H=A\cdot B$ и $A\cap B=Z(H)$. Так как $Z=H'$, то группа TZ нормальна в H и $TZ=T\times Z$. По теореме 2.5 можно считать, что $TZ\subseteq A$, так как $(TZ)'=1$. Из теоремы 2.6 следует, что Q/T – циклическая группа. Поэтому из $\exp(H)=q$ следует, что $Q=A=T\times Z$. Из $[P_o,T]=1$ следует, что

$$[P_o^x,T^x]=1 \text{ для всех } x\in H-Q. \tag{3.1}$$

Если $P_o\cap P_o^x=D\neq 1$, то $[D,<T,T^x>]=[D,A]=1=[D,Z]$, что противоречит условию, что ZP – группа Фробениуса. Итак,

$$P_o^z\cap P_o^x=1 \text{ для всех } x,z\in H-Q. \tag{3.2}$$

Так как $|A|=|B|=q^{k+1}$, то $|T|=q^k$. Из $A\cap B=Z$ следует, что $B=Z+x_2Z+\ldots+x_lZ$, где $l=q^k$. Пусть $H=Q+x_2Q+\ldots+x_lQ$ ввиду $Q=A$. Пусть

$$P_i=P_o^{x_i},\ i=\overline{2,l}, \text{ где } P_1\lhd N,\ |P_1|=p^b \text{ и } b \text{ – показатель числа } p \text{ по модулю } q. \tag{3.3}$$

Покажем, что в P имеется подгруппа $P_1 \times \ldots \times P_l \lhd G$. В самом деле, из (3.2) следует, что подгруппа $P_1 \times P_2$ существует. Пусть $P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_s$ – наибольшая такая подгруппа, но $s < l$. Это значит, что существует подгруппа P_{s+1} такая, что $1 \neq c \in P_1 \times \ldots \times P_s \cap P_{s+1}$. Из $c \in P_{s+1}$ и $[P_{s+1}, T^{x_{s+1}}] = 1$ по (3.1) и (3.3) следует, что для $1 \neq t \in T^{x_{s+1}}$ имеем: $c_1 \cdot c_2 \cdots c_s = c = c^t = c_1^t \cdot c_2^t \cdots c_s^t$, где $c_i \in P_i$, $i = \overline{1,s}$. Если для $1 \neq c_i$ $c_i^t \in P_i$, то в силу единственности разложения c имеем $c_i = c_i^t$ и тогда для $t \in T^{x_{s+1}} - T^{x_i}$ имеем $[t, c_i] = 1$. Так как $T^{x_{s+1}} \cap T^{x_i}$ имеет индекс q в T^{x_i}, то $[< t > (T^{x_{s+1}} \cap T^{x_i}), c_i] = [T^{x_{s+1}}, c_i] = 1$. Но тогда $[< T^{x_{s+1}}, T^{x_i} >, c_i] = [A, c_i] = [Z, c_i] = 1$, что противоречит условию о том, что ZP – группа Фробениуса. Если же $c_i^t \in P_j$, $j \neq i$, то $[t^{-1} c_i t, T^{x_j}] = 1$ по (3.1). Тогда $[c_i, T^{x_j t^{-1}}] = [c_i, T^{x_j}] = 1$, так как $t \in T^{x_{s+1}} \subset A$ и $T^{x_j} \subset A \lhd H$. Тогда $[< T^{x_j}, T^{x_i} >, c_i] = 1$, $[A, c_i] = 1$, так как $A = T^{x_i} T^{x_j}$. Но тогда из $Z \subset A$ следует и $[Z, c_i] = 1$, что опять противоречит условию. Поэтому $s = l$.

Пусть $L = N_G(P_1)$ и $Q \leq L_q$. Тогда $C = C_L(P_1) \lhd L$. Пусть C_q есть S_q-подгруппа на C, содержащая T. Предположим, что $T \subset C_q$. Тогда для $1 \neq x \in P_1$ имеем $C_q \subseteq H \cap H^x$. Но тогда $T \subset H \cap H^x$, что противоречит выбору T как максимального q-силовского пересечения. Поэтому $T = C_q \lhd L_q$. Поэтому $Q = L_q$. Поэтому из $s = l$ следует, что $\{P_i, i = \overline{1,l}\}$ есть полный класс сопряженных в G подгрупп и $M = P_1 \times \ldots \times P_l \lhd G$. Если $M = P$, то все доказано. Если $M \subset G$, то группа $\overline{G} = G / M$ удовлетворяет условию. Если $\overline{R}$ – наибольшее q-силовское пересечение в $\overline{G}$, $N_{\overline{G}}(\overline{R}) = \overline{P^* \lambda S}$, где $\overline{S} \subseteq \overline{H}$, то $\overline{P^* \lambda Z(\overline{H})}$ – группа Фробениуса. По теореме 4.3.1 из [10] в $\overline{P^* \lambda Z(\overline{H})}$ имеется подгруппа Шмидта $\overline{S}$ порядка $p^a \cdot q$, все собственные подгруппы которой примарные. Из свойств таких групп Шмидта следует [11], что $p^a \equiv 1 (\operatorname{mod} q)$ и a – наименьшее целое число с этим свойством. Поэтому $a = b$. Ясно, что $\overline{P^*} \lhd N_{\overline{G}}(\overline{R})$. По индукции $|\overline{P}| = p^{bq^k c}$. Тогда $|P| = p^{bq^k c} \cdot p^{bq^k} = p^{bq^k (c+1)}$ и заключение (1) доказано.

Заключение (2) докажем индукцией по l. Если $l = 1$, то $|T_o| = q$, $E = ZT_o \lhd H$, так как $Z = H'$. Поэтому q-подгруппы порядка q из E, отличные от Z, сопряжены в H и, значит, в G. Поэтому их централизаторы сопряжены в G, а S_P-подгруппы P_i этих централизаторов имеют одинаковые порядки, $i = \overline{1,q}$. По лемме 3.1 тогда $P = P_1 \times \ldots \times P_q = |P_i|^q$. Так как $|P| = p^{b \cdot q^k \cdot m}$, то $|C_P(T_o)| = p^{bq^{k-1} m}$ и утверждение верно для $l = 1$.

Пусть теперь $|T_o| = q^l, l > 1$. Пусть T^* – подгруппа индекса q в T_o. Тогда $R = C_H(T^*) = T^* \times T_1$, где $T_1 \supseteq Z$. Тогда $T_o = T^* \times (T_o \cap T_1)$, $|T_o \cap T_1| = q$.

По индукции $|C_P(T^*)| = p^{b \cdot q^{k-l+1} \cdot m}$. Так как T^* есть T_1-инвариантная группа, то и $C_P(T^*) = P \cap C_{PR}(T^*) = P^*$ есть T_1-инвариантная подгруппа. Так как $E = Z \times (T_o \cap T_1) \subseteq T_1$, то P^* есть E-инвариантная группа. По теореме 2.5 можно считать, что $E \subseteq A \in A(H)$. Пусть $B \in A(H)$ и A и B удовлетворяют условию леммы 2.8. Из $|T^*| < |T_o| \leq |A|$ следует ввиду лемм 2.7 и 2.8, что T_1 кроме E содержит еще одну подгруппу D порядка q, причем ED – неабелева экстраспециальная q-группа порядка q^3. Поэтому P^* есть ED-инвариантная подгруппа в G и мы можем рассматривать группу $P^* \lambda ED$. Поэтому отличные от Z подгруппы порядка q и E сопряжены в ED. Опять по лемме 3.1 $C_{P^*}(T_o \cap T_1) = |P^*|^{1/q}$. Поэтому из $C_{P^*}(T_o) \leq P^* \cap C_{P^*}(T_o \cap T_1)$ и $C_{P^*}(T_o \cap T_1) \leq C_P(T_o)$ следует, что $C_{P^*}(T_o \cap T_1) = C_P(T_o)$. Поэтому $|C_P(T_o)| = |P^*|^{1/q} = p^{b \cdot q^{k-l+1} \cdot m \cdot 1/q} = p^{b \cdot q^{k-l} \cdot m}$ и заключение (2) доказано. Теорема доказана.

3.3. ЛЕММА. Пусть H – экстраспециальная q-группа порядка q^{2k+1}, $G = H\lambda R$, где $|R| = r$ – простое число, $r \neq q$, $r > 2$. Пусть $C_H(R) = Z(H) = Z$, а $G/Z = \overline{G}$ и $\overline{R}$ – максимальная подгруппа в $\overline{G}$. Пусть G действует неприводимо на элементарной абелевой p-группе P так, что $Z\lambda P$ – группа Фробениуса, $q \neq p \neq r$. Пусть $1 \neq p^a = |C_P(R)|$. Тогда в P есть подгруппа $P_1 \times P_2 \times P_3$ порядка p^{3a}.

Доказательство. Пусть $C = C_{PG}(R)$. Тогда $|C| = p^a \cdot q$. Пусть $C_P(R) = P_1$. Тогда $N_H(P_1) = Z$ (в противном случае $N_{PG}(P_1) = PZ^*R$, где $Z \subset Z^* \subset H$, и тогда $R \subset RZ \subset RZ^*$ и $\overline{R} \subset \overline{RZ^*} \subset \overline{G}$ и $\overline{R}$ – не максимальная подгруппа в $\overline{G}$, что противоречит условию). Пусть $H = Z + Hx_2 + \ldots + Hx_l$, где $l = q^{2k}$. Из $[P_1, R] = 1$ следует, что $[P_1^{x_i}, R^{x_i}] = 1$ для всех $i = \overline{1,l}$. Пусть $P_1^{x_i} = P_i$. Предположим, что $P_i \cap P_j = D \neq 1$, $i \neq j$. Тогда $[D, < R^{x_i}, R^{x_j} >] = [D, G] = 1$. Но тогда $[D, Z] = 1$, что противоречит условию, что $P\lambda Z$ – группа Фробениуса. Итак,

$$P_i \cap P_j = 1 \text{ для всех } i \neq j. \tag{3.4}$$

Предположим, что $P_i \times P_j \cap P_k = D \neq 1$, $i \neq k \neq j$. Тогда для $1 \neq c \in D$ и $1 \neq t \in R^{x_k}$ имеем: $c_i \cdot c_j = c = c^t = c_i^t \cdot c_j^t$, где $c_i \in P_i, c_j \in P_j$.

Если $c_i^t \in P_i$, то $c_j^t \in P_j$ и в силу единственности способа разложения С из $P_i \times P_j$ должно быть $c_i = c_i^t$, $c_j = c_j^t$. Но тогда $< c_i, c_j > \subseteq C_{PG}(t) = C_{PG}(R^{x_k}) = P_1^{x_k} = P_k$. Но тогда или $1 \neq c_i \in P_k$, или $1 \neq c_j \in P_k$. То есть, либо $P_i \cap P_k \neq 1$, либо $P_j \cap P_k \neq 1$, что противоречит (3.4).

Если же $c_i^t \in P_j$, то $c_j^t \in P_i$. Тогда в силу единственности способа разложения c в $P_i \times P_j$ должно быть $c_i^t = c_j$, $c_j^t = c_i$. Но тогда $c_i^{t^2} = c_j^t = c_i$ и $c_i \in C_P(t^2) = C_P(R^{x_k})$, ибо $(2, r) = 1$ и $< t^2 >= R^{x_k}$. Но тогда $< R^{x_k}, R^{x_i} >= G$ централизует $1 \neq c_i$. Опять тогда $[Z, c_i] = 1$, что противоречит условию. Итак, $P_k \cap P_i \cap P_j = 1$ и в P существует подгруппа $P_i \times P_j \times P_k$ порядка p^{3a}. Лемма доказана.

Далее мы докажем свойство (7) из определения 2.3, которое уточняет свойство (7) из определения 1.6 в [6].

3.4. ЛЕММА. Пусть y-инвариантная секция X^* удовлетворяет свойствам (1) – (6) из определения 2.3. Тогда при $|C| = p^a \cdot q$ и $p^a \neq 1$ $|P : C_p| \geq p^{r-1}$. При $p^a = 1$, $r = 2^k + 1$, $q = 2$.

Доказательство. $|X^*| = p^{bq^k m} \cdot q^{2k+1} \cdot r$. Это следует из определения 2.3, теоремы 3.2. По лемме 3.3 p^{3a} делит $p^{bq^k m}$. По теореме 2.9 r делит $q^k + 1$, так как r не делит $q^k - 1$, ибо r делит $q^{2k} - 1$ и $2k$ – наименьшее целое число с этим свойством (из промежуточного факта (11) в доказательстве теоремы 2 в [5] о строении X^* следует, что в холловской p'-подгруппе $H\lambda < y >$ порядка $q^{2k+1} \cdot r$ факторгруппы $H\lambda < y > / Z(H)$ есть группа, у которой все собственные подгруппы являются примарными и из $|H\lambda < y > / Z(H)| = q^{2k} \cdot r$ и [11] следует, что $q^{2k} \equiv 1(r)$ и $2k$ – наименьшее число с этим свойством).

Так как $3a < bq^k m$, то $a < \frac{1}{3} bq^k m$ и $|P : C_p| = p^{bq^k m} : p^a \geq p^{bq^k m} : p^{\frac{bq^k m}{3}} = p^{\frac{2}{3} bq^k m}$. Нам нужно доказать, что $p^{\frac{2}{3} bq^k m} \geq p^{r-1}$, то есть $\frac{2}{3} bq^k m \geq r - 1$. Предположим противное, то есть, что $\frac{2}{3} bq^k m < r - 1$.

Тогда $r > \frac{2}{3} bq^k m + 1$. Пусть $r = \frac{2}{3} bq^k m + l$, где $l > 1$. Так как r делит $q^k + 1$, то $\dfrac{q^k + 1}{\frac{2}{3} bq^k m + l} = z$ – целое число. Тогда $q^k + 1 = \frac{2}{3} bq^k mz + lz$, $q^k - \frac{2}{3} bq^k mz = lz - 1$, $q^k (1 - \frac{2}{3} bmz) = lz - 1 > 0$, $1 - \frac{2}{3} bmz > 0$, $1 > \frac{2}{3} bmz$, $bmz < \frac{3}{2}$. Но тогда $bmz = 1$, $b = 1$, $m = 1$, $z = 1$. Тогда $r = \frac{2}{3} q^k + l$. Но $q^k (1 - \frac{2}{3}) = l - 1$ влечет $q^k \cdot \frac{1}{3} = l - 1$. Откуда $q = 3$, $l = q^{k-1} + 1$. Тогда $r = \frac{2}{3} q^k + q^{k-1} + 1 = 2q^{k-1} + q^{k-1} + 1 = 3q^{k-1} + 1 = 3^k + 1$. Из теоремы 2.10 тогда следует, что это невозможно. Поэтому $\frac{2}{3} bq^k m \geq r - 1$ и $|P : C_p| \geq p^{r-1}$.

Если же $|C_p| = 1$, то $C = C_{X^*}(y) = q$ и из леммы 2.8 в [4] следует, что q = r и $r = 2^k + 1$. Лемма доказана.

4. Основные результаты

После доказательства свойства (7) y-инвариантной секции X^* типа (p, q, k, c), где q делит $|C|$, в предыдущем разделе (замечание 2.4, теорема 3.2, лемма 3.4) с помощью дословного повторения рассуждений из доказательства теоремы 2 в [5] получается следующая

4.1. ТЕОРЕМА. Пусть X есть разрешимая группа, $(X, y, C, r) \in 1.1$. Тогда имеет место одно из утверждений:

(1) $X = C \cdot F(x)$;

(2) X обладает y-инвариантной секцией X^* типа (p, q, ar, b);

(3) X обладает y-инвариантной секцией X^* типа (p, q, k, c), где либо q делит $|C|$, либо $p \cdot q$ делит $|C|$.

4.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Определение секции типа (p, q, k, c) в определении 3 в [5] и в определении 2.3 совпадают, но в [5] она названа секцией типа (q, p, k, c).

С использованием теоремы 4.1 вместо теоремы 2 в [5] с помощью дословного повторения рассуждений из доказательства теоремы 4.4 в [6] получаем следующий факт

4.3. ТЕОРЕМА. Пусть X – конечная K-группа, $(X, y, C, r) \in 1.1$. Если в X нет y-инвариантных секций типов (p, q, ar, b), где p делит $|C|$, и (p, q, k, c), где q делит $|C|$, то $X = C \cdot F(X)$.

4.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $(X, y, C, r) \in 1.1$, $|C| = 2^\beta \cdot p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$, $|X| = 2^\alpha \cdot p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} \cdot m$, где p_i – простые числа, $p_i \neq p_j$ для $i \neq j$, $i = \overline{1,k}$. Тогда $\alpha(X, y) = \max\{\alpha_i - \beta_i / i = \overline{1,k}\}$.

4.5. ТЕОРЕМА. Пусть $(X, y, C, r) \in 1.1$. Пусть X есть K-группа. Предположим, что выполняется одно из следующих условий:

(1) $r > \alpha(X, y) + 1$ и $r > 2^{\alpha - \beta}$; или

(2) $r > \alpha(X, y) + 1$ и r – не простое число Ферма.

Тогда $X = C \cdot F(X)$.

Доказательство. Из теоремы 4.3 следует, что нам нужно доказать отсутствие в X y-инвариантных секций типов (p, q, ar, b) и (p, q, k, c).

Предположим, что в X имеется y-инвариантная секция X^* типа (p, q, ar, b). Из определения 2.2 известно, что $|X^*| = p^{ar} \cdot q^b$, $|C_{X^*}(y)| = p^a$. Тогда $|X_p : C_p| \geq |X_p^* : C_p^*| = p^{ar} : p^a = p^{a(r-1)} \geq p^{r-1}$. Но по условию теоремы $r - 1 > \alpha(X, y)$, то есть для $p_i > 2$ $r - 1 > \alpha_i - \beta_i$, где можно полагать $p = p_i$. Но тогда $p^{r-1} > |X_p : C_p|$. Для $p = 2$ по условию $r - 1 > 2^{\alpha - \beta} - 1$ и поэтому $p^{r-1} > p^{2^{\alpha-\beta} - 1} \geq p^{\alpha - \beta}$. Поэтому в X нет y-инвариантных секций типа (p, q, ar, b).

Предположим, что в X есть y-инвариантная секция X^* типа (p, q, k, c). Из определения 2.3 известно, что $|X^*| = p^{b \cdot q^k \cdot m} \cdot q^{2k+1}$ и $|C_{X^*}(y)| = p^a \cdot q$ или q. Если $p^a \neq 1$, то по лемме 3.4 $|P : C_p| \geq p^{r-1}$. Эта возможность исключается так же, как и выше в случае секции типа (p, q, ar, b).

Поэтому пусть $p^a = 1$. Тогда по лемме 3.4 $q = r$, $r = 2^k + 1$, $\left|X_q^* : C_q^*\right| = 2^{2k} > 2^{2k} - 1 = (2^k + 1)(2^k - 1) = r(2^k - 1) > r$. Поэтому $\left|X_q : C_q\right| \geq \left|X_q^* : C_q^*\right| > r$. Но по условию (1) теоремы $r > \left|X_q : C_q\right|$. Поэтому условия (1) и (2) не выполняются. Итак, в X нет y-инвариантных секций типа (p, q, ar, b) или типа (p, q, k, c). По теореме 4.3 тогда $X = C \cdot F(X)$. Теорема доказана.

4.6. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $(X, y, C, r) \in 1.1$, X – K-группа. Если r больше порядка любой силовской подгруппы из X, то $X = C \cdot F(X)$.

4.7. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $(X, y, C, r) \in 1.1$. Если C – холловская подгруппа в X, то $X = C \cdot F(X)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Huppert B. Endliche Gruppen, I. // Berlin, Springer – Verlag. – 1967. – 793 p.
2. Huppert B., Blackburn N. Finite groups, III // Berlin: Springer – Verlag. – 1982. – 454 p.
3. Горенстейн Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир.– 1985. – 352 с.
4. Collins M., Rickman B. Finite groups admitting an automorphism with two fixed points. // J. Algebra. – 1977. – Vol. 49. – № 2. – P. 547 – 563.
5. Пальчик Э.М., Шмидт А.М. О конечных группах, допускающих копростой автоморфизм. // Весці НАНБ. Сер. фіз.-мат. навук, – 2001. – № 4. – С. 15 – 18.
6. Пальчик Э.М., Шмидт А.М. О конечных группах с копростым автоморфизмом // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины (Вопросы алгебры – 18). – 2002. – № 5(14). – С. 29 – 42.
7. Gorenstein D. Finite groups // New York: Harper and Row. – 1968. – 527 p.
8. Laffey T.J. Centralizers of elementary abelian subgroups in finite p-groups. // J. Algebra. – 1978. – Vol. 51. – № 1. – P. 88 – 96.
9. Blau H., Michler G. Modular representation theory of finite groups with T.J. Sylow p-subgroups. // Trans. AMS. – 1990. – Vol. 319. – № 2. – P. 417 – 468.
10. Чунихин С.А. Подгруппы конечных групп. – Мн.: Наука и техника, 1964. – 154 с.
11. Гольфанд Ю.А. О группах, все подгруппы которых специальные // ДАН СССР. – 1948. – Т. 60. – № 8. – С. 1313 – 1315.
12. Bender H., Glauberman G. Local analysis for the odd order theorem // Cambridge, Cambridge Univ. Press. – 1994. – 174 p.
13. Zsigmondy K. Zur Theorie der Potenzrests. // Monatsh. Math. Phys. – 1892. – Vol. 3. – № 2. – P. 265 – 284.