

УДК 528. 23

## ОСНОВНЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ ДЛЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ МАЛЫХ ОБЛАСТЕЙ

А.И. КОЗАКЕВИЧ

*Проанализированы величины поправок в длины линий и в сближение меридианов для территорий, на которых инженерно-геодезические изыскания можно производить в системах координат, формируемых на основе геодезических проекций. Данные системы координат имеют преимущества перед применяемыми до настоящего времени в изысканиях условными системами.*

Как отмечено в [1 – 3], в условных и местных системах координат, применяемых для инженерно-геодезических изысканий на малых площадях, в общем алгоритме геодезических проекций можно весьма существенно упростить формулы для вычислений. Если, например, принять размеры территории не более чем  $8 \times 8$  км, а координаты вычислять с точностью до 0,001 м, то в общем алгоритме достаточно ограничиться только малыми величинами второго порядка. Рассмотрим, каким образом влияют малые величины третьего порядка и выше на значения масштаба и сближения меридианов. Оценку будем производить с помощью остаточного члена в форме Лагранжа [2].

Формулы для вычисления плоских прямоугольных координат с удержанием трех членов разложения будут иметь вид (1). Они представляют собой быстро убывающие степенные ряды, так как при данных условиях величины  $P_j$  и  $Q_j$  суть ни что иное, как степени приращений изометрических широт и долгот в радианной мере.

$$\left. \begin{aligned} x &= c_1 P_1 + c_2 P_2 + \dots + (c_3 P_3) \\ y &= c_1 Q_1 + c_2 Q_2 + \dots + (c_3 Q_3) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Для вычисления частного масштаба длин формула (1), общая для широкого класса геодезических проекций, для малых областей указанных ранее размеров может быть представлена выражением (2) и вид проекции в этом случае определяется только коэффициентом  $c_3$ , так как для всех геодезических проекций, описываемых общим алгоритмом [1, 2], первые два коэффициента одинаковы:

$$m = m_0 \left[ 1 + \frac{\cos 2B_0}{2c_1^2} x^2 + \frac{\sin^2 B_0}{2c_1^2} y^2 + 3 \frac{c_3}{c_1^3} (x^2 - y^2) \right]. \quad (2)$$

Для получения формулы масштаба проекции определенного вида достаточно взять соответствующее выражение из [1, 2] для  $c_3$ , например, для цилиндрических проекций достаточно принять выражение

$$c_3 = -\frac{c_1^2}{6} \cos 2B_0, \quad (3)$$

тогда значение масштаба имеет вид известного выражения

$$m = m_0 \left[ 1 + \frac{\cos^2 B_0}{2c_1^2} y^2 \right]. \quad (4)$$

Значение коэффициента  $c_3$  конических проекций из [1, 2] принимает следующий вид:

$$c_3 = \frac{c_1}{6} \sin^2 B_0, \quad (5)$$

а значение масштаба в этом случае также хорошо известно:

$$m = m_0 \left[ 1 + \frac{\cos^2 B_0}{2c_1^2} x^2 \right]. \tag{6}$$

Коэффициент  $c_3$  для азимутальных проекций имеют вид [1, 2]:

$$c_3 = \frac{c_1}{6} \left( \sin^2 B_0 - \frac{1}{2} \cos^2 B_0 \right), \tag{7}$$

тогда значение масштаба в этой проекции:

$$m = m_0 \left[ 1 + \frac{\cos^2 B_0}{4c_1^2} (x^2 + y^2) \right]. \tag{8}$$

Для того чтобы указать на возможности практического применения не только приведенных выше формул для вычислений, но и определить значимость редуционных поправок, обусловленных частным масштабом длин, приведем результаты их вычислений. Для территорий, ограниченных размерами 8 x 8 км, результаты вычислений приведены в табл. 1 – 3.

Таблица 1

Численные значения масштабов в азимутальной проекции

$B_0 = 56^\circ$		x, м				
Масштаб		-8000	-4000	0	4000	8000
y, м	8000	1,00000078297	1,00000048936	1,00000039148	1,00000048936	1,00000078297
	4000	1,00000048936	1,00000019574	1,00000009787	1,00000019574	1,00000048936
	0	1,00000039148	1,00000009787	1,00000000000	1,00000009787	1,00000039148
	-4000	1,00000048936	1,00000019574	1,00000009787	1,00000019574	1,00000048936
	-8000	1,00000078297	1,00000048936	1,00000039148	1,00000048936	1,00000078297

Таблица 2

Численные значения масштабов в конической проекции

$B_0 = 56^\circ$		x, м				
Масштаб		-8000	-4000	0	4000	8000
y, м	8000	1,00000078297	1,00000019574	1,00000000000	1,00000019574	1,00000078297
	4000	1,00000078297	1,00000019574	1,00000000000	1,00000019574	1,00000078297
	0	1,00000078297	1,00000019574	1,00000000000	1,00000019574	1,00000078297
	-4000	1,00000078297	1,00000019574	1,00000000000	1,00000019574	1,00000078297
	-8000	1,00700007829	1,00000019574	1,00000000000	1,00000019574	1,00000078297

Таблица 3

Численные значения масштабов в поперечно-цилиндрической проекции

$B_0 = 56^\circ$		x, м				
Масштаб		-8000	-4000	0	4000	8000
y, м	8000	1,00000078297	1,00000078297	1,00000078297	1,00000078297	1,00000078297
	4000	1,00000019574	1,00000019574	1,00000019574	1,00000019574	1,00000019574
	0	1,00000000000	1,00000000000	1,00000000000	1,00000000000	1,00000000000
	-4000	1,00000019574	1,00000019574	1,00000019574	1,00000019574	1,00000019574
	-8000	1,00000078297	1,00000078297	1,00000078297	1,00000078297	1,00000078297

Здесь возможно также, как это предусмотрено в общем алгоритме [1, 2], уменьшить примерно в два раза численные значения максимальных для данных областей значений частных масштабов длин и, следовательно, поправок в длины линий за редуцирование на плоскость проекции. Мы получили числен-

ные значения масштабов трех видов проекций для ограниченной области при  $m_0 = 1$  (см. табл. 1 – 3). Используя полученные численные значения масштабов проекций, определим значения  $m_0$ , приводящие к оптимальному распределению линейных искажений в любой проекции согласно [2], получим:

$$m_0^{opt} = \frac{2}{1 + m_{max}^{(m,-1)}} = \frac{2}{1 + 1,00000078}, \tag{9}$$

тогда  $m_0^{opt} = 0,99999961$ . Здесь мы берем  $m_{max}^{(m,-1)}$  из табл. 1 – 3.

Численные значения масштабов для оптимального распределения линейных искажений предложенной области приведены в табл. 4 – 6.

Таблица 4

Численные значения масштабов в азимутальной проекции при  $m_0^{opt}$

$B_0 = 56^\circ$		X, м				
Масштаб		-8000	-4000	0	4000	8000
Y, м	8000	1,00000039297	1,00000009936	1,00000000149	1,00000009936	1,00000039297
	4000	1,00000009936	0,9999980574	0,9999970787	0,9999980574	1,00000009936
	0	1,00000000149	0,9999970787	0,9999961000	0,9999970787	1,00000000149
	-4000	1,00000009936	0,9999980574	0,9999970787	0,9999980574	1,00000009936
	-8000	1,00000039297	1,00000009936	1,00000000149	1,00000009936	1,00000039297

Таблица 5

Численные значения масштабов в конической проекции при  $m_0^{opt}$

$B_0 = 56^\circ$		X, м				
Масштаб		-8000	-4000	0	4000	8000
Y, м	8000	1,00000039297	0,9999980574	0,9999961000	0,9999980574	1,00000039297
	4000	1,00000039297	0,9999980574	0,9999961000	0,9999980574	1,00000039297
	0	1,00000039297	0,9999980574	0,9999961000	0,9999980574	1,00000039297
	-4000	1,00000039297	0,9999980574	0,9999961000	0,9999980574	1,00000039297
	-8000	1,00000039297	0,9999980574	0,9999961000	0,9999980574	1,00000039297

Таблица 6

Численные значения масштабов в поперечно-цилиндрической проекции при  $m_0^{opt}$

$B_0 = 56^\circ$		X, м				
Масштаб		-8000	-4000	0	4000	8000
Y, м	8000	1,00000039297	1,00000039297	1,00000039297	1,00000039297	1,00000039297
	4000	0,9999980574	0,9999980574	0,9999980574	0,9999980574	0,9999980574
	0	0,9999961000	0,9999961000	0,9999961000	0,9999961000	0,9999961000
	-4000	0,9999980574	0,9999980574	0,9999980574	0,9999980574	0,9999980574
	-8000	1,00000039297	1,00000039297	1,00000039297	1,00000039297	1,00000039297

Для проведения исследований численных значений сближения меридианов, как отмечено в [1, 2], использованы только три члена разложения. Для сближения меридианов всех приведенных видов проекций имеем общую формулу [3]:

$$tg\gamma = \left( 1 + \frac{5 \sin B_0}{2 c_1} x \right) \frac{y}{c_1} \sin B_0 - \frac{6}{c_1^3} c_3 xy. \tag{10}$$

Для того чтобы оценить значимость последнего члена разложения (10), который отличается в различных видах проекций, произведем вычисления его значений, применительно к области, указанных выше размеров. Результаты приведены в табл. 7 – 9.

Значение коэффициента  $c_3$  с принятой точностью для трех видов проекций имеют вид [3]: для азимутальных проекций:

$$c_3 = -\frac{c_1}{12} (\cos 2B_0 - \sin^2 B_0), \quad (11)$$

тогда сближение меридианов:

$$i\gamma = \frac{y}{c_1} \left( \sin B_0 + \frac{\sin^2 B_0}{c_1} x + \frac{1}{2c_1} x^2 \right). \quad (12)$$

Таблица 7

Численные значения сближения меридианов в азимутальной проекции

		$B_0 = 56^\circ$	x, м				
		Гамма	-8000	-4000	0	4000	8000
y, м	8000	Σ	0°06'21,44"	0°06'22,06"	0°06'22,67"	0°06'23,28"	0°06'23,90"
		I	0°06'22,67"	0°06'22,67"	0°06'22,67"	0°06'22,67"	0°06'22,67"
		II	-0°00'01,77"	-0°00'00,89"	0°00'00,00"	0°00'00,89"	0°00'01,77"
		III	0°00'00,55"	0°00'00,27"	0°00'00,00"	-0°00'00,27"	-0°00'00,55"
	4000	Σ	0°03'10,72"	0°03'11,03"	0°03'11,34"	0°03'11,64"	0°03'11,95"
		I	0°03'11,34"	0°03'11,34"	0°03'11,34"	0°03'11,34"	0°03'11,34"
		II	-0°00'00,89"	-0°00'00,44"	0°00'00,00"	0°00'00,44"	0°00'00,89"
		III	0°00'00,27"	0°00'00,14"	0°00'00,00"	-0°00'00,14"	-0°00'00,27"
	0	Σ	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"
		I	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"
		II	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"
		III	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"
	-4000	Σ	-0°03'10,72"	-0°03'11,03"	-0°03'11,34"	-0°03'11,64"	-0°03'11,95"
		I	0°03'11,34"	0°03'11,34"	0°03'11,34"	0°03'11,34"	0°03'11,34"
		II	0°00'00,89"	0°00'00,44"	0°00'00,00"	-0°00'00,44"	-0°00'00,89"
		III	-0°00'00,27"	-0°00'00,14"	0°00'00,00"	0°00'00,14"	0°00'00,27"
-8000	Σ	-0°06'21,44"	-0°06'22,06"	-0°06'22,67"	-0°06'23,28"	-0°06'23,90"	
	I	-0°06'22,67"	-0°06'22,67"	-0°06'22,67"	-0°06'22,67"	-0°06'22,67"	
	II	0°00'01,77"	0°00'00,89"	0°00'00,00"	-0°00'00,89"	-0°00'01,77"	
	III	-0°00'00,55"	-0°00'00,27"	0°00'00,00"	0°00'00,27"	0°00'00,55"	

Для конических проекций

$$c_3 = \frac{c_1}{6} \sin^2 B_0, \quad (13)$$

соответственно сближение меридианов будет иметь вид:

$$\text{tgy} = \frac{y}{c_1} \left( \sin B_0 + \frac{3 \sin^2 B_0}{2 c_1} x \right). \quad (14)$$

Таблица 8

Численные значения сближения меридианов в конической проекции

У, м		$B_0 = 56^\circ$	х, м				
		Гамма	-8000	-4000	0	4000	8000
У, м	8000	Σ	0°06'21,61"	0°06'22,14"	0°06'22,67"	0°06'23,20"	0°06'23,74"
		I	0°06'22,67"	0°06'22,67"	0°06'22,67"	0°06'22,67"	0°06'22,67"
		II	-0°00'01,77"	-0°00'00,89"	0°00'00,00"	0°00'00,89"	0°00'01,77"
		III	0°00'00,71"	0°00'00,35"	0°00'00,00"	-0°00'00,35"	-0°00'00,71"
	4000	Σ	0°03'10,80"	0°03'11,07"	0°03'11,34"	0°03'11,60"	0°03'11,87"
		I	0°03'11,34"	0°03'11,34"	0°03'11,34"	0°03'11,34"	0°03'11,34"
		II	-0°00'00,89"	-0°00'00,44"	0°00'00,00"	0°00'00,44"	0°00'00,89"
		III	0°00'00,35"	0°00'00,18"	0°00'00,00"	-0°00'00,18"	-0°00'00,35"
	0	Σ	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"
		I	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"
		II	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"
		III	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"
	-4000	Σ	-0°03'10,80"	-0°03'11,07"	-0°03'11,34"	-0°03'11,60"	-0°03'11,87"
		I	-0°03'11,34"	-0°03'11,34"	-0°03'11,34"	-0°03'11,34"	-0°03'11,34"
		II	0°00'00,89"	0°00'00,44"	0°00'00,00"	-0°00'00,44"	-0°00'00,89"
		III	-0°00'00,35"	-0°00'00,18"	0°00'00,00"	0°00'00,18"	0°00'00,35"
-8000	Σ	-0°06'21,61"	-0°06'22,14"	-0°06'22,67"	-0°06'23,20"	-0°06'23,74"	
	I	-0°06'22,67"	-0°06'22,67"	-0°06'22,67"	-0°06'22,67"	-0°06'22,67"	
	II	0°00'01,77"	0°00'00,89"	0°00'00,00"	-0°00'00,89"	-0°00'01,77"	
	III	-0°00'00,71"	-0°00'00,35"	0°00'00,00"	0°00'00,35"	0°00'00,71"	

Для поперечно-цилиндрических проекций третий коэффициент разложения  $c_3$  имеет значение

$$c_3 = -\frac{c_1}{6} \cos 2B_0, \quad (15)$$

а сближение меридианов

$$\text{tgy} = \frac{y}{c_1} \left( \sin B_0 + \frac{1 \sin^2 B_0}{2 c_1} x + \frac{1}{c_1} x \right). \quad (16)$$

Таблица 9

Численные значения сближения меридианов в поперечно-цилиндрической проекции

Y, м		$B_0 = 56^0$		X, м			
		Гамма	-8000	-4000	0	4000	8000
Y, м	8000	Σ	0°06'21,28"	0°06'21,98"	0°06'22,67"	0°06'23,36"	0°06'24,06"
		I	0°06'22,67"	0°06'22,67"	0°06'22,67"	0°06'22,67"	0°06'22,67"
		II	-0°00'01,77"	-0°00'00,89"	0°00'00,00"	0°00'00,89"	0°00'01,77"
		III	0°00'00,39"	0°00'00,19"	0°00'00,00"	-0°00'00,19"	-0°00'00,39"
	4000	Σ	0°03'10,64"	0°03'10,99"	0°03'11,34"	0°03'11,68"	0°03'12,03"
		I	0°03'11,34"	0°03'11,34"	0°03'11,34"	0°03'11,34"	0°03'11,34"
		II	-0°00'00,89"	-0°00'00,44"	0°00'00,00"	0°00'00,44"	0°00'00,89"
		III	0°00'00,19"	0°00'00,10"	0°00'00,00"	-0°00'00,10"	-0°00'00,19"
	0	Σ	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"
		I	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"
		II	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"
		III	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"	0°00'00,00"
-4000	Σ	-0°03'10,64"	-0°03'10,99"	-0°03'11,34"	-0°03'11,68"	-0°03'12,03"	
	I	-0°03'11,34"	-0°03'11,34"	-0°03'11,34"	-0°03'11,34"	-0°03'11,34"	
	II	0°00'00,89"	0°00'00,44"	0°00'00,00"	-0°00'00,44"	-0°00'00,89"	
	III	-0°00'00,19"	-0°00'00,10"	0°00'00,00"	0°00'00,10"	0°00'00,19"	
-8000	Σ	-0°06'21,28"	-0°06'21,98"	-0°06'22,67"	-0°06'23,36"	-0°06'24,06"	
	I	-0°06'22,67"	-0°06'22,67"	-0°06'22,67"	-0°06'22,67"	-0°06'22,67"	
	II	0°00'01,77"	0°00'00,89"	0°00'00,00"	-0°00'00,89"	-0°00'01,77"	
	III	-0°00'00,39"	-0°00'00,19"	0°00'00,00"	0°00'00,19"	0°00'00,39"	

Приведенные вычисления позволяют сделать следующие выводы:

1. Поправки в расстояния, обусловленные частным масштабом длин при редуцировании на плоскость геодезической проекции, во всех трех видах геодезических проекций одинаковы и их максимальное значение не превышает относительной величины 1 : 1 280 000 при  $m_0 = 1$  и 1 : 2 560 000 при  $m_0$  оптимальном. Эти величины пренебрегаемо малы при всех видах изысканий.

2. Величины сближения меридианов, влияющие на определение дирекционных углов на плоскости проекции, внутри областей указанных размеров могут меняться от 0° до 6'23", что существенно и должно учитываться. При этом различие в ориентировке для различных видов проекций может достигать не более нескольких долей секунд, что несущественно во всех видах изысканий.

3. Для формирования систем плоских прямоугольных координат для целей инженерно-геодезических изысканий на территориях с размерами до 8 × 8 км можно использовать геодезические проекции, описанные общим алгоритмом, при этом мы будем иметь координатные системы, имеющие строгую математическую связь с любой другой системой, в том числе общегосударственной или системой координат геоинформационных систем.

Приведенные формулы позволяют сравнительно просто производить расчеты искажений, имеющих место в системах координат, полученных на средней горизонтальной плоскости без учета кривизны Земли.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Подшивалов В.П. Координатная среда для геоинформационных систем // Геодезия и картография. – 1997. – № 6. – С. 51 – 55.
2. Подшивалов В.П. Теоретические основы формирования координатной среды для геоинформационных систем. – Новополоцк: ПГУ, 1998. – 125 с.
3. Козакевич А.И. Формулы геодезических проекций для изображения малых областей / Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк, 2003. – 7 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 1.09.03 № 815 ГД 2003 ДЕП.).