

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

С.А. ВАБИЩЕВИЧ, В.А. ГРУЗДЕВ, Г.А. ДУБЧЕНОК

В.Г. ЗАЛЕССКИЙ, Г.М. МАКАРЕНКО

ФИЗИКА

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

для студентов технических специальностей

В двух частях

Часть 2

Новополоцк 2005

УДК 53 (075.8)

ББК 22 я73

В 12

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

В.И. Семенов, член.-корр. БИА, канд. техн. наук,
генеральный директор ОАО Полоцкий завод «Проммашремонт»;
Н.В. Ощепкова, доцент кафедры физики, канд. техн. наук;
Л.И. Прокопович, доцент кафедры физики, канд. физ.-мат. наук

Рекомендован к изданию методической комиссией
геодезического факультета

В 12 Вабищевич С.А., Груздев В.А., Дубченко Г.А., Залесский В.Г., Макаренко Г.М.
Физика: учеб. - метод. комплекс для студентов технических специальностей. В 2-х ч.
Ч. 2. – Новополоцк: ПГУ, 2005. – 256 с.
ISBN 985-418-323-8 (Ч. 2)
ISBN 985-418-324-6

Вторая часть УМК включает три модуля: «Электростатика. Постоянный ток»,
«Электромагнетизм», «Волновые процессы и оптические явления». Объединение этих
модулей в одну книгу обусловлено рабочей программой по физике на семестр.

Предназначен для студентов технических специальностей.

УДК 53 (075.8)

ББК 22 я73

ISBN 985-418-323-8 (Ч. 2)

ISBN 985-418-324-6

© Вабищевич С.А., Груздев В.А., Дубченко Г.А.,
Залесский В.Г., Макаренко Г.М., 2005
© УО «ПГУ», 2005

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
УЧЕБНЫЙ МОДУЛЬ № 4 «ЭЛЕКТРОСТАТИКА. ПОСТОЯННЫЙ ТОК»	7
Введение	7
Учебно-методическая структура модуля	7
Методическая программа модуля	8
1. УЧЕБНЫЙ БЛОК «ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ЗАРЯДОВ»	9
1.1. Краткое содержание теоретического материала	10
1.2. Вопросы для самоконтроля	25
1.3. Методические указания к практическим занятиям	26
1.3.1. Содержание практических занятий	26
1.3.2. Пример методической структуры практического занятия	27
1.4. Примеры решения задач	28
1.5. Задачи для самостоятельного решения	41
2. УЧЕБНЫЙ БЛОК «ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ»	46
2.1. Краткое содержание теоретического материала	47
2.2. Вопросы для самоконтроля	53
2.3. Методические указания к практическим занятиям	55
2.3.1. Содержание практических занятий	55
2.3.2. Методическая структура практического занятия	55
2.4. Примеры решения задач	56
2.5. Задачи для самостоятельного решения	65
3. УЧЕБНЫЙ БЛОК «ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В РАЗЛИЧНЫХ СРЕДАХ»	68
3.1. Краткое содержание теоретического материала	69
3.2. Вопросы для самоконтроля	79
3.3. Практические занятия	80
3.4. Примеры решения задач	81
3.5. Задачи для самостоятельного решения	90
УЧЕБНЫЙ МОДУЛЬ № 5 «ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ»	93
Введение	93
Учебно-методическая структура модуля	94
Методическая программа модуля	94
1. УЧЕБНЫЙ БЛОК «МАГНИТНОЕ ПОЛЕ»	96
1.1. Краткое содержание теоретического материала	97
1.2. Вопросы для самоконтроля	112
1.3. Методические указания к практическим занятиям	113
1.3.1. Перечень типовых задач	113

1.3.2. Методические рекомендации	113
1.4. Примеры решения задач	114
1.5. Задачи для самостоятельного решения	121
2. УЧЕБНЫЙ БЛОК «ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ. МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА»	123
2.1. Краткое содержание теоретического материала	124
2.2. Вопросы для самоконтроля	139
2.3. Методические указания к практическим занятиям	140
2.4. Примеры решения задач	141
2.5. Задачи для самостоятельного решения	144
3. УЧЕБНЫЙ БЛОК «ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАКСВЕЛЛА»	146
3.1. Краткое содержание теоретического материала	146
УЧЕБНЫЙ МОДУЛЬ № 6 «ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ И ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ»	153
Введение	153
Учебно-методическая структура модуля	153
Методическая программа модуля	154
1. УЧЕБНЫЙ БЛОК «ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ»	155
1.1. Краткое содержание теоретического материала	156
1.2. Методические указания к лекционным занятиям	179
1.3. Методические указания к практическим занятиям	179
1.4. Примеры решения задач	180
2. УЧЕБНЫЙ БЛОК «ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА»	184
2.1. Краткое содержание теоретического материала	185
2.2. Методические указания к лекционным занятиям	194
2.3. Методические указания к практическим занятиям	194
2.4. Примеры решения задач	197
3. УЧЕБНЫЙ БЛОК «ВОЛНОВАЯ ОПТИКА»	202
3.1. Краткое содержание теоретического материала	203
3.2. Методические указания к лекционным занятиям	223
3.3. Методические указания к практическим занятиям	224
3.4. Примеры решения задач	226
4. УЧЕБНЫЙ БЛОК «ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА»	235
4.1. Краткое содержание теоретического материала	236
4.2. Методические указания к лекционным занятиям	247
4.3. Методические указания к практическим занятиям	248
4.4. Примеры решения задач	249
ЛИТЕРАТУРА	255

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемый комплекс содержит систему взаимосвязанных и взаимодополняющих средств и способов обучения на основе действующей программы по физике и является второй частью учебно-методического комплекса (УМК) по физике.

Данное пособие содержит три модуля, построенных на тех же методических и структурных принципах, что и первая часть УМК. Каждый модуль содержит учебную и методическую программы, рекомендованную литературу, перечень требований к знаниям, умениям и навыкам студентов, краткое содержание теоретического материала, примеры решения типовых задач с подробными пояснениями, задачи для самостоятельного решения.

Для проведения контрольных работ и самостоятельной подготовки к экзамену данный комплекс дополнен отдельным методическим пособием, содержащим банк задач с примерами и рекомендациями по их решению.

Вторая часть УМК по физике разработана коллективом преподавателей кафедры физики ПГУ в составе профессоров В.А. Груздева и Г.М. Макаренко, доцентов С.А. Вабищевича и В.Г. Залесского, старшего преподавателя Г.А. Дубченка, под общей редакцией заведующего кафедрой физики, лауреата государственной премии России, д. т. н., профессора В.А. Груздева.

УЧЕБНЫЙ МОДУЛЬ № 4 «ЭЛЕКТРОСТАТИКА. ПОСТОЯННЫЙ ТОК»

Введение

Электростатикой называется раздел физики, в котором изучаются взаимодействия заряженных частиц (тел) и свойства электрических полей, создаваемых ими. Основная задача при изучении электростатики состоит в том, чтобы научиться определять характеристики электростатического поля отдельных зарядов и их совокупности в любой точке пространства. К основным характеристикам относятся: энергетические (потенциал, энергия, плотность энергии) и силовая (напряженность поля). Кроме этого необходимо научиться применять законы механики движения или равновесия систем заряженных частиц и тел, которые находятся в электростатическом поле. Перемещение зарядов в электрическом поле связано с работой перемещения, поэтому необходимо уяснить потенциальный характер электрического поля, научиться определять потенциальную энергию зарядов в электрическом поле и изолированных систем зарядов. Направленное (упорядоченное) движение зарядов, его закономерности и условия для различных сред изучаются в разделе «Постоянный ток». Кроме указанных разделов в модуле предусматривается изучение систем, аккумулирующих заряды и обеспечивающих их движение по внешним электрическим цепям.

Учебно-методическая структура модуля

Модуль № 4. «Электростатика. Постоянный ток»		
1. Учебный блок «Электрическое поле зарядов»	2. Учебный блок «Электрическое поле в веществе»	3. Учебный блок «Постоянный ток»
<ul style="list-style-type: none"> – элементарные заряды; закон сохранения зарядов; – кулоновская сила взаимодействия зарядов; – параметры электрического поля точечных зарядов; – напряженность, индукция, потенциал; – принцип суперпозиции электрических полей; – распределенные заряды; – поле распределенных зарядов; теорема Остроградского – Гаусса; – электрическая емкость тел; – движение зарядов в электрическом поле 	<ul style="list-style-type: none"> – электрический диполь; – поляризация молекул вещества; – проводники в электрическом поле; электростатическая защита; – диэлектрики в электрическом поле; – сегнетоэлектрики; электростатический гистерезис; – пьезоэлектрический эффект; – энергия электрического поля; – плотность энергии электрического поля 	<ul style="list-style-type: none"> – условия возбуждения электрического тока; – электронная теория проводимости; – принцип непрерывности; – законы Ома для участка цепи и полной цепи; эквивалентные цепи; – закон Джоуля – Ленца; – электропроводность полупроводников; – электропроводность газов, газовые разряды; – электрический ток в вакууме; заряд и разряд конденсаторов; – правила Кирхгофа для расчета сложных электрических цепей постоянного тока

Методическая программа модуля

Тема занятия	Тип занятия	Вид занятия	Часы
1. Элементарные заряды, закон сохранения зарядов, способы заряда тел. Взаимодействие точечных зарядов (кулоновская сила). Параметры электрического поля, физический смысл параметров	Диагностика и углубление остаточных знаний	лекция, самост.	2
2. Принцип суперпозиции электрических полей, нахождение результирующих параметров поля системы точечных зарядов. Распределенные заряды, поле распределенных зарядов, к которым не применима теорема Остроградского – Гаусса	Углубление знаний	лекция	2
3. Расчет параметров поля точечных зарядов и систем зарядов (без применения теоремы Остроградского – Гаусса)	Формирование новых навыков	практ. занятие	3
4. Теорема Остроградского – Гаусса, методика ее использования для расчета поля распределенных зарядов	Формирование новых знаний	лекция	2
5. Расчет поля распределенных зарядов: объемных, линейных, поверхностных	Формирование новых навыков	практ. занятие	3
6. Вещество в электрическом поле: проводники, диэлектрики, сегнето- и пьезоэлектрики	Формирование новых знаний	лекция	1
7. Емкость тел, конденсаторы, системы конденсаторов	Углубление знаний	лекция	1
8. Движение зарядов в электрических полях	Углубление навыков	практ. занятие	1
9. Системы конденсаторов. Энергия электрического поля	Углубление навыков	практ. занятие	1
10. Моделирование поля в электростатических системах	Формирование новых навыков	лабор. занятие	4
11. Электронная теория электропроводности. Электропроводность полупроводников и газов	Формирование новых знаний	лекция	2
12. Законы Ома для цепей постоянного тока в интегральной и дифференциальной формах. Эквивалентные цепи	Углубление знаний и формирование новых знаний	лекция, самост.	1
13. Расчет электрических цепей с применением законов Ома и Джоуля – Ленца	Формирование новых навыков	практ. занятие	2
14. Правила Кирхгофа для расчета сложных электрических цепей постоянного тока	Формирование новых знаний	лекция	1
15. Расчет сложных электрических цепей с использованием правил Кирхгофа	Формирование новых навыков	практ. занятие	2
16. Исследование цепей постоянного тока	Формирование новых навыков	лабор. занятие	4

1. УЧЕБНЫЙ БЛОК «ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ЗАРЯДОВ»

Введение

В данном учебном блоке основное внимание уделяется расчету параметров электрического поля точечных и распределенных зарядов. Дана методика расчета параметров поля с учетом принципа суперпозиции полей зарядов. Показано, что электрическое поле имеет потенциальный характер, т.е. может изменять энергию зарядов, перемещающихся в поле, на основе принципа эквивалентности работы и энергии.

Учебная программа блока

Содержание блока	Форма подготовки	Литература
1. Элементарные заряды. Закон сохранения заряда. Заряды в телах, способы заряда тел	лекция, самост.	[6, § 2.5] [7, § 11.1] [10, § 77]
2. Взаимодействие зарядов, кулоновская сила, поле сил	лекция, самост.	[6, § 2.6] [7, § 11,2] [10, § 78]
3. Силовая (напряженность) и энергетическая (потенциал) характеристики поля точечных зарядов. Индукция электрического поля. Графическое отображение поля. Принцип суперпозиции электрических полей	лекция, самост.	[6, § 2.7 – 2.10] [7, § 11.3] [10, § 79, 80]
4. Распределенные заряды: линейные, поверхностные, объемные. Расчет поля распределенных зарядов методом точечных зарядов	лекция	[7, § 11.5]
5. Теорема Остроградского – Гаусса. Применение (методика) теоремы для расчета поля распределенных зарядов. Следствия: возможность сведения распределенных зарядов к точечным	лекция	[6, § 2.12] [7, § 11.6] [10, § 81]
6. Движение зарядов в электрическом поле, работа по перемещению зарядов в электрическом поле	лекция	[7, § 11.7; 11.9] [10, § 85, 86]
7. Электрическая емкость тел	лекция	[6, § 2.11 – 2.18] [7, § 12.5 – 12.6] [10, § 93; 94]

Цели обучения

Для успешного изучения материалов блока студент должен иметь представление (в рамках школьной программы) об элементарных зарядах, о зарядовой структуре атомов, о сущности законов сохранения (в частности – зарядов) в природе, о векторных величинах, об энергии и эквивалентности работы и энергии, о потенциальном поле сил.

После изучения блока

студент должен знать	студент должен уметь
<ul style="list-style-type: none"> – параметры электрического поля: напряженность, потенциал, индукция и связь между параметрами; – методику расчета параметров поля распределенных зарядов методом точечных зарядов и принцип суперпозиции полей зарядов; – теорему Остроградского – Гаусса, методику ее применения для расчета параметров поля распределенных зарядов; – понятие емкости тел 	<ul style="list-style-type: none"> – определять параметры поля точечных зарядов; – рассчитывать параметры поля распределенных зарядов; – в возможных случаях сводить распределенные заряды к точечным; – определять работу и изменение энергии зарядов при их перемещении в электрическом поле; – определять потенциальную энергию системы зарядов и ее изменение при изменении их взаимного расположения; – находить взаимосвязь между зарядом тел и их потенциалом

Методическая программа блока

Тема	Тип занятия	Вид занятия	Часы
1. Заряды в телах, элементарные заряды. Закон сохранения зарядов. Способы заряда тел. Точечные заряды. Поле точечных зарядов. Напряженность и потенциал. Индукция поля. Принцип суперпозиции полей. Движение зарядов в поле	Углубление знаний и формирование новых знаний	лекция	2
2. Графическое изображение полей. Циркуляция и поток вектора E . Распределенные заряды (системы зарядов). Теорема Остроградского – Гаусса. Методика расчета полей распределенных зарядов	Формирование новых знаний	лекция	2
3. Методика точечных зарядов расчета поля системы зарядов. Емкость тел	Формирование новых знаний	лекция	2
4. Параметры электрического поля точечных зарядов. Движение зарядов в поле	Углубление и систематизация навыков	практ. занятие	2
5. Расчет поля системы распределенных зарядов	Формирование новых навыков	практ. занятие	3
6. Расчет электрической емкости. Расчет эквивалентных электрических емкостей	Формирование новых навыков	практ. занятие	1
7. Исследование электрического поля	Формирование новых навыков и умений	лабор. работа	4

1.1. Краткое содержание теоретического материала

Все тела (вещества) состоят из нейтральных атомов. Однако каждый атом содержит два различных типа элементарных зарядов (отрицательные – электроны и положительные – протоны) в равном количестве. Нарушение

нейтральности атомов (тел) происходит в случае, когда тем или иным способом нарушается равенство разноименных элементарных зарядов в атоме, молекуле или теле.

Положительный или отрицательный (избыточный) заряд тела может быть обнаружен, если к этому телу поднести другое заряженное тело. Опыт показывает, что тела, обладающие зарядами одного знака, отталкиваются друг от друга, а тела, обладающие зарядами разных знаков – притягиваются друг к другу. Впервые количественное значение силы взаимодействия заряженных тел было получено Кулоном для точечных зарядов. При этом под точечным зарядом понимают заряженное тело, размеры которого малы по сравнению с расстояниями до других заряженных тел.

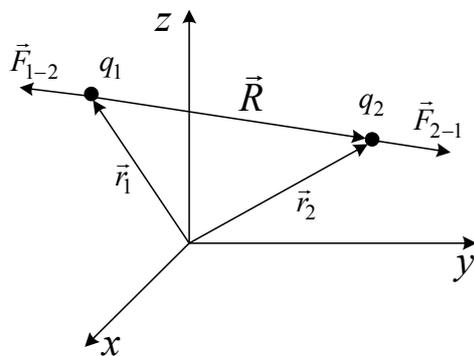


Рис. 1.1

Рассмотрим два одноименных точечных заряда q_1 и q_2 , положение которых в пространстве определяется радиус-векторами \vec{r}_1 и \vec{r}_2 (рис. 1.1). Пусть \vec{F}_{1-2} – сила, с которой заряд q_2 действует на заряд q_1 , а \vec{F}_{2-1} – сила, действующая на заряд q_2 со стороны заряда q_1 . Измерения, проведенные Кулоном, Ампером и другими исследователями, показали, что сила

взаимодействия точечных зарядов пропорциональна величине этих зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена вдоль прямой, соединяющей заряды. Этот закон называют законом Кулона. Математически в системе СИ он может быть записан в виде:

$$\vec{F} = k \frac{q_1 \cdot q_2}{R^3} \vec{R}, \quad (1)$$

где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц. В системе СИ $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$.

Для упрощения ряда уравнений электродинамики k принято записывать

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0},$$

где $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$ – электрическая постоянная.

Соотношение (1) справедливо для любых знаков зарядов q_1 и q_2 .

Если имеется N точечных зарядов q_i (где $i = 1, 2, 3, \dots, N$), то сила, с которой заряд q_i действует на некоторый точечный заряд q , не зависит от присутствия других зарядов:

$$\vec{F}_i = \frac{q_i \cdot q}{4\pi\epsilon_0 R_i^3} \vec{R}_i,$$

где $\vec{R}_i = \vec{r} - \vec{r}_i$ – вектор, соединяющий заряд q_i с зарядом q ; R_i – его модуль.

Если учитывается среда, в которой находятся заряды, то последняя формула принимает вид

$$\vec{F}_i = \frac{q_i \cdot q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon \cdot R_i^3} \vec{R}_i,$$

где ϵ – диэлектрическая проницаемость среды.

Очевидно, что результирующая сила \vec{F} , с которой система зарядов q_i действует на заряд q , равна векторной сумме сил \vec{F}_i , действующих на этот заряд со стороны каждого из зарядов системы:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (2)$$

В этом суть принципа суперпозиции полей.

Электрическое поле

Силовые взаимодействия между разобщенными телами могут передаваться только при наличии некоторой среды, окружающей эти тела, последовательно от одной части этой среды к другой, и с конечной скоростью. Такой средой является особый вид материи – электрическое поле. Оно является неизменным спутником каждого электрического заряда. Судить о существовании электрического поля в данной точке пространства можно только по наличию силы, с которой поле действует на помещенный в эту точку электрический заряд.

Напряженность электрического поля

Поместим точечный заряд q в начало системы координат и рассмотрим силы, действующие на заряды q_i (где $i = 1, 2, 3, \dots$), которые поочередно будем помещать в некоторую точку с координатами x, y, z (рис. 1.2). Из (1) следует, что при изменении заряда q_i сила $\vec{F}_i = \frac{q_i \cdot q}{4\pi\epsilon_0 R_i^3} \vec{R}_i$ также будет меняться. По-

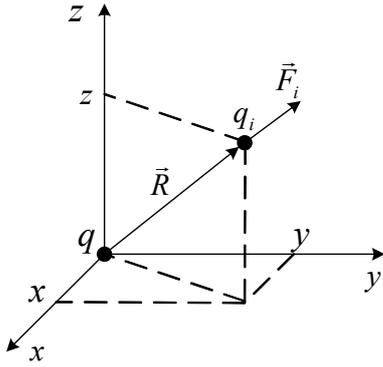


Рис. 1.2

существует в точке с координатами x, y, z безотносительно к заряду q_i .

Вектор, равный отношению силы \vec{F} , с которой заряд q действует на точечный малый положительный заряд q_0 (так называемый пробный заряд), помещенный в некоторую точку пространства

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}, \quad (3)$$

называют напряженностью электрического поля, создаваемого зарядом q в данной точке. С другой стороны, если напряженность электрического поля в данной точке известна, то сила, действующая на помещенный в эту точку произвольный заряд q

$$\vec{F} = q\vec{E}. \quad (4)$$

Используя понятие электрического поля, можно сказать, что заряд q создает электрическое поле напряженностью \vec{E} , и на заряд q_i , находящийся в этом поле, действует сила $\vec{F} = q_i\vec{E}$. Это удобно, так как формула (4) справедлива для электрических полей, создаваемых любой системой зарядов.

Из соотношений (3) и (4) следует, что напряженность электрического поля точечного заряда q на расстоянии R от него

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{R}; \quad E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \quad (5)$$

Если система N неизвестных зарядов q_i (где $i = 1, 2, 3, \dots, N$) действует на пробный заряд q_0 , помещенный в некоторую точку пространства, то согласно (2) она будет равна векторной сумме сил, действующих на этот заряд со стороны каждого из зарядов системы. Разделив обе части соотношения (2) на q_0 , получим

$$\frac{\vec{F}}{q_0} = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{F}_i}{q_0}.$$

Поскольку отношение $\frac{\vec{F}}{q_0}$ есть напряженность электрического поля \vec{E}_i , создаваемого зарядом q_i в точке, где расположен заряд q_0 , то напряженность электрического поля $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$ системы зарядов в данной точке

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i,$$

т.е. векторы напряженности электрического поля (как и векторы сил) подчиняются принципу суперпозиции.

Для описания электрического поля нужно задать векторы напряженности в каждой точке поля. Это можно сделать аналитически, в виде зависимостей напряженности поля от координат. Для наглядности такую зависимость можно представить и графически с помощью силовых линий (рис. 1.3). Силовой линией называют такую линию, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора напряженности поля в этой точке. Силовым линиям приписывают определенное направление, отмечая его на



Рис. 1.3

чертеже стрелкой в направлении вектора напряженности. При этом силовые линии нигде не пересекаются. В противном случае в точках пересечения вектор напряженности поля имел бы одновременно разные направления.

Из определения силовых линий следует, что они начинаются только на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных (или «уходят» на бесконечность от положительного заряда, или «приходят» из бесконечности к отрицательному заряду).

Если напряженность электрического поля во всех точках одинакова, то такое поле называют однородным.

Электрический потенциал

Рассмотрим электрическое поле, созданное положительным точечным зарядом q . В любой точке этого поля на пробный заряд q_0 действует сила

$$\vec{F} = \frac{q_0 \cdot q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}.$$

Вычислим работу сил электрического поля при перемещении заряда q_0 из точки 1 в точку 2 (рис. 1.4) по произвольной траектории. Эта работа равна

$$A_{1-2} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = \int_1^2 \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\alpha \cdot dl,$$

где α – угол между направлением радиус – вектора \vec{r} и бесконечно малым перемещением $d\vec{l}$. Из рис. 1.4 видно, что произведение $dl \cdot \cos\alpha$ равно величине приращения $dr = |d\vec{r}|$ радиус – вектора \vec{r} в данной точке траектории. Следовательно

$$A_{1-2} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} \right) = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r_2}. \quad (6)$$

Таким образом работа сил электрического поля по перемещению точечного заряда в поле другого точечного заряда не зависит от формы траектории, а определяется лишь начальным и конечным положениями зарядов. Такие силовые поля называются потенциальными. Это означает, что в электрическом поле можно ввести понятие потенциальной энергии одного заряда в силовом поле другого.

Поскольку работа консервативной силы равна убыли потенциальной энергии, то

$$A_{1-2} = W_1 - W_2$$

(чтобы не путать с напряженностью E , обозначим энергию буквой W). Из (6) следует

$$W_1 = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \text{const}; \quad W_2 = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \text{const}.$$

Если нулевой уровень потенциальной энергии выбрать на бесконечности, то $\text{const} = 0$ и потенциальная энергия заряда q_0 , находящегося на расстоянии r от заряда q

$$W = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Отношение $\frac{W}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ не зависит от значения q_i , а определяется

лишь зарядом q и расстоянием r от него до данной точки пространства.

Поэтому отношение $\frac{W}{q_0}$ наряду с напряженностью поля является его харак-

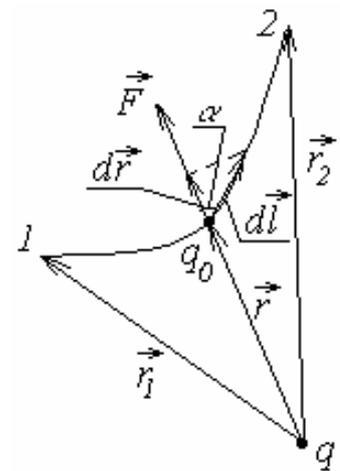


Рис. 1.4

теристикой. Скалярная величина, равная отношению потенциальной энергии заряда q_0 в электрическом поле заряда q к величине этого заряда

$$\varphi = \frac{W}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (7)$$

называется потенциалом электрического поля заряда q в данной точке.

Если поле создается системой N точечных зарядов q_i , то потенциал поля системы зарядов в данной точке равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i.$$

Это соотношение также выражает суть принципа суперпозиции полей.

Соотношения (5) и (7) справедливы для вакуума и воздуха. Однако заряды могут находиться и взаимодействовать в других средах, которые, как будет показано далее, могут влиять на силу взаимодействия. Это влияние учитывается введением в формулы (5) и (7) множителя $\frac{1}{\epsilon}$, где ϵ – относительная диэлектрическая проницаемость среды. С учетом ϵ в общем случае можно записать

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}, \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}. \quad (8)$$

Если среда неоднородна и E зависит от ϵ , при решении задач удобно применять индукцию электрического поля (электрическое смещение)

$$D = \epsilon\epsilon_0 E. \quad (9)$$

Используя (7), выражение для работы (6) можно переписать в виде

$$A_{1-2} = q_0(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (10)$$

Поскольку потенциал точечного заряда убывает обратно пропорционально расстоянию от него до рассматриваемой точки поля, то на бесконечности $\varphi_\infty = 0$. Поэтому работа сил поля A_∞ по перемещению единичного положительного заряда из данной точки в бесконечность численно равна потенциалу в этой точке

$$\varphi_\infty = \frac{A_\infty}{q}.$$

Часто за «ноль» потенциала принимают не его значение в бесконечности, а значение в некоторой точке пространства. Это возможно также как и принятие за ноль потенциальной энергии в любой точке. Особенно это удобно, когда определяется не абсолютное значение потенциалов в точках, а разность потенциалов между ними.

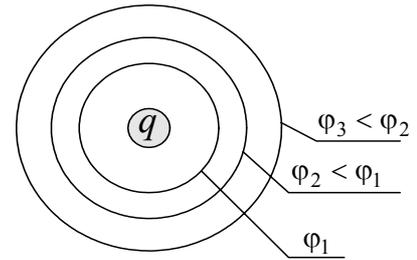


Рис. 1.5

Объединяя в электрическом поле точки с одинаковым потенциалом, можно получить поверхности, называемые поверхностями равного потенциала или эквипотенциальными поверхностями (рис. 1.5).

Связь между потенциалом и напряженностью электрического поля

Пусть имеется однородное электрическое поле с напряженностью \vec{E} . Поместим в точку 1 заряд q и перенесем его в точку 2 вдоль вектора $\Delta\vec{l}$ (рис. 1.6). Работу сил электрического поля при этом перемещении можно выразить:

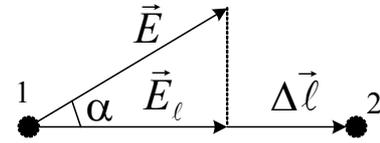


Рис. 1.6

а) через напряженность поля

$$A_{1-2} = q\vec{E} \cdot \Delta\vec{l} = qE \cos \alpha \cdot \Delta l = qE_l \Delta l,$$

где Δl – величина перемещения; E_l – проекция вектора \vec{E} на направление перемещения;

б) через разность потенциалов точек 1 и 2

$$A_{1-2} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = -q(\varphi_2 - \varphi_1) = -q\Delta\varphi.$$

Приравнявая оба выражения для работы, получаем

$$E_l = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}. \quad (11)$$

В общем случае неоднородного поля, точки 1 и 2 нужно выбирать достаточно близко друг от друга (бесконечно близко), чтобы напряженность поля при перемещении заряда на $\Delta\vec{l}$ можно было считать постоянной. Переходя к пределу при $\Delta\vec{l} \rightarrow 0$ из равенства (11) получим

$$E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l} \quad \text{или} \quad E = -\text{grad}\varphi. \quad (12)$$

Производная, стоящая в правой части выражения (12), характеризует изменение потенциала в данном направлении.

Силловые линии поля всегда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям и направлены от поверхности с большим потенциалом φ_1 к поверхности с потенциалом $\varphi_2 < \varphi_1$.

Теорема Остроградского – Гаусса

Рассмотрим плоскую поверхность S , которую пронизывают силловые линии однородного электрического поля напряженностью \vec{E} , составляющие угол α с нормалью \vec{n} к поверхности (рис. 1.7).

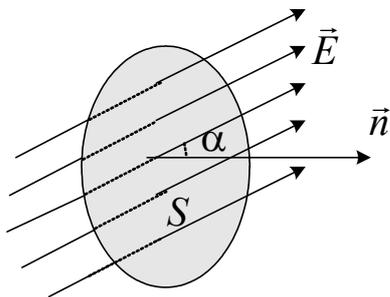


Рис. 1.7

Величину $N_E = E \cdot S \cdot \cos \alpha = E_n S$, (где $E_n = E \cos \alpha$ – проекция вектора \vec{E} на направление нормали) называют потоком вектора напряженности электрического поля через поверхность S .

Если поле неоднородно и поверхность S , через которую рассчитывают поток, не является плоскостью, то эту поверхность можно разбить на бесконечно малые элементы dS и каждый элемент считать плоским, а поле, его пронизывающее, – однородным. Элементарный поток через такую площадку равен

$$dN_E = E dS \cos \alpha = E_n dS,$$

а полный поток N_E через всю поверхность S

$$N_E = \int_S E_n dS.$$

Из определения потока видно, что он может быть положительным (если направление вектора \vec{E} составляет острый угол с нормалью), отрицательным (если направление вектора \vec{E} составляет тупой угол с нормалью) и равным нулю (если вектор \vec{E} перпендикулярен нормали).

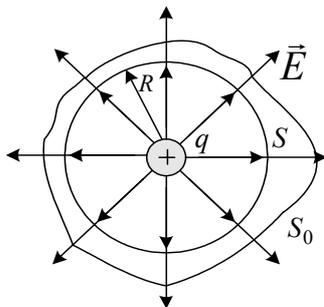


Рис. 1.8

Рассмотрим поток напряженности электрического поля неподвижного точечного заряда $q > 0$ (рис. 1.8).

Окружим заряд воображаемой сферой S радиуса R с центром в точке расположения заряда. Площадь поверхности сферы $S = 4\pi R^2$. Так как векторы напряженности электрического поля во всех точках на поверхности S направлены по ра-

диусу (т.е. по нормали к поверхности сферы) и одинаковы по величине, то поток вектора напряженности электрического поля точечного заряда q через поверхность S

$$N_E = E_n S = E_n 4\pi R^2.$$

Поскольку в точках на поверхности сферы

$$E_n = E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^2}, \text{ то } N_E = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0}.$$

Данный результат справедлив для любой замкнутой поверхности S_0 (см. рис. 1.8) и для произвольного расположения заряда (или зарядов) внутри этой поверхности. В этом суть теоремы Гаусса: поток вектора напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри этой поверхности, деленной на $(\epsilon\epsilon_0)$

$$N_E = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i,$$

или в общем случае

$$\oint_S E_n dS = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0}, \quad (13)$$

где q – алгебраическая сумма заряда, охватываемого произвольной замкнутой поверхностью, а E_n – компонента E , перпендикулярная dS .

Рассмотрим применение теоремы Гаусса на трех полезных для понимания методики решения задач примерах.

Введем понятия поверхностной, объемной и линейной плотностей заряда.

Если заряд располагается по поверхности, то распределение заряда можно характеризовать с помощью *поверхностной плотности заряда* σ , которая определяется как величина заряда, приходящаяся на единицу площади поверхности тела, несущего заряд.

Если заряд распределен по объему, то используется *объемная плотность заряда* ρ – заряд, находящийся в единице объема.

Если заряд распределен вдоль некоторой линии (нить, тонкий стержень и т.п.), то его распределение описывается *линейной плотностью заряда* τ – заряд, отнесенный к единице длины заряженной линии.

В случаях равномерного распределения заряда q по поверхности площадью S тела или по его объему V , или вдоль заряженной линии l :

$$\sigma = \frac{q}{S}, \quad \text{или} \quad \rho = \frac{q}{V}, \quad \tau = \frac{q}{l} \quad \text{соответственно.}$$

1. Вычислим напряженность электрического поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью. Пусть для определенности поверхностная плотность заряда на плоскости $\sigma > 0$. Из соображений симметрии вытекает, что векторы напряженности поля в любой точке направлены перпендикулярно плоскости. Также очевидно, что в симметрично удаленных от плоскости точках векторы напряженности одинаковы по величине и противоположны по направлению.

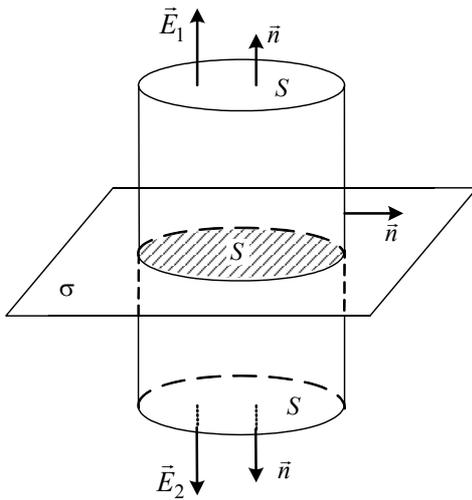


Рис. 1.9

Представим мысленно цилиндрическую поверхность с образующими, перпендикулярными к плоскости, и основаниями площадью S (рис. 1.9). Для такой воображаемой поверхности легко определить поток (записать значение интеграла $\oint_S E_n dS$). В силу симметрии $E_1 = E_2 = E$ и $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$ перпендикулярны основаниям цилиндра. Поскольку векторы напряженности поля параллельны боковой поверхности, то поток вектора напряженности через всю поверхность цилиндра будет равен потоку через его основания:

$$\oint_S E_n dS = N_E = E_1 S + E_2 S = 2ES.$$

С другой стороны по теореме Гаусса $N_E = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0}$, где q – заряд, заключенный внутри поверхности цилиндра, $q = \sigma S$. Следовательно $E = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0}$.

Результат свидетельствует о том, что величина напряженности поля бесконечной заряженной плоскости на любых расстояниях от нее одинакова.

Для отрицательно заряженной плоскости результат будет таким же, лишь направление вектора напряженности изменится на противоположное.

2. Вычислим напряженность электрического поля, создаваемого равномерно заряженной сферой радиуса R . Поле, создаваемое сферической поверхностью, заряженной равномерно, будет центрально-симметричным, т.е. в любой точке векторы напряженности поля будут направлены вдоль радиусов сферы.

Поэтому удобно взять воображаемую концентрическую с заряженной сферой поверхность радиуса $r > R$ (рис. 1.10). Во всех точках поверхности величина проекции вектора напряженности \vec{E} на нормаль будет одинакова. Поэтому суммарный поток вектора напряженности поля через выбранную поверхность

$$N_{E(r>R)} = E \cdot 4\pi r^2.$$

С другой стороны, весь заряд сферы находится внутри этой поверхности. Поэтому

$$\oint_S E_n dS = N_{E(r>R)} = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0}.$$

Следовательно, $E_{(r>R)} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}$, т.е.

электрическое поле вне заряженной сферы тождественно полю точечного заряда, помещенного в центр сферы (для области $r > R$).

Поверхность радиуса $r_1 < R$ не будет содержать зарядов. Поэтому внутри заряженной сферы

$$E_{(r_1 < R)} = 0.$$

Для отрицательно заряженной сферы формулы остаются справедливыми, только векторы напряженности будут направлены в противоположные стороны (к центру сферы).

Поскольку поле, создаваемое точечным зарядом, такое же, как поле вне заряженной сферы, то потенциал сферы при условии, что $r > R$, может быть вычислен по формуле для точечного заряда

$$\Phi_{(r>R)} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}.$$

Внутри сферы поле отсутствует, поэтому потенциал во всех точках внутри сферы одинаков и равен потенциалу на ее поверхности

$$\Phi_{(r_1 < R)} = \Phi_{(r_1 = R)} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R}.$$

3. Вычислим напряженность электрического поля, создаваемого шаром радиуса R , равномерно заряженным по объему с плотностью заряда ρ .

Поле, создаваемое таким шаром, будет центрально-симметричным. Вне шара для поля получится такой же результат, что и для поля вне сферы.

Найдем напряженность поля внутри шара. Вообразим концентрическую с шаром сферическую поверхность радиуса $r < R$ (рис. 1.11). Поток вектора напряженности поля через поверхность этой сферы

$$N_{E(r<R)} = E \cdot 4\pi r^2.$$

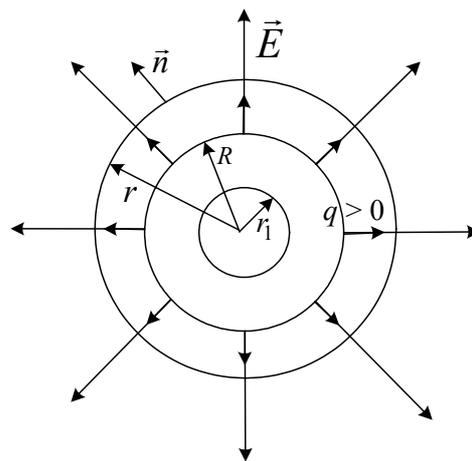


Рис. 1.10

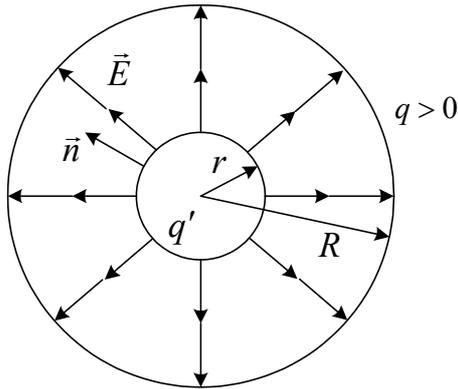


Рис. 1.11

С другой стороны по теореме Гаусса

$$N_{E(r < R)} = \frac{q'}{\epsilon_0 \epsilon}$$

где $q' = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{q \frac{4}{3} \pi r^3}{\frac{4}{3} \pi R^3} = \frac{qr^3}{R^3}$ – заряд, заключенный в сфере радиуса r . Следовательно

$$E_{(r < R)} = \frac{qr}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^3}.$$

Таким образом, внутри равномерно заряженного шара напряженность поля растет линейно с увеличением расстояния от его центра.

Расчет напряженности электрического поля методом точечных зарядов

Иногда распределенный заряд образует систему, к которой применить теорему Остроградского – Гаусса затруднительно из-за математических сложностей. В этом случае используется метод точечных зарядов. Вся система распределенного заряда разбивается на малые элементы, которые можно считать точечными зарядами. Затем определяется $E_i(r_i)$ в заданной точке от каждого элемента. Затем на основе принципа суперпозиции полей векторным сложением определяется E :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i,$$

а алгебраическим сложением определяется φ

$$\varphi = \sum_{i=1}^N (\pm \varphi_i).$$

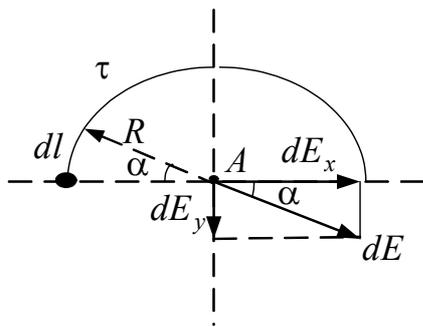


Рис. 1.12

Для демонстрации метода рассмотрим пример.

Имеется распределенный линейный заряд в виде полукольца (рис. 1.12) с радиусом R и плотностью τ . Требуется определить напряженность поля в точке A и потенциал в ней.

Выделим малый элемент линейного заряда dl . Он несет малый заряд dq , который будем считать точечным. Этот заряд дает в точке A напряженность поля dE

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{\tau \cdot dl}{R^2}.$$

Введем угол α (рис. 1.12) и угол $d\alpha$, образованный двумя радиусами, опирающимися на концы dl . Так как $d\alpha$ мал, то можно записать

$$dl = R d\alpha.$$

Разложим dE на проекции dE_y и dE_x . Тогда

$$\vec{E} = dE_x \vec{i} + dE_y \vec{j},$$

где $dE_y = dE \sin \alpha$, $dE_x = dE \cos \alpha$.

Интегрируя dE_y и dE_x , получим

$$E_y = \int dE_y = \frac{1 \cdot \tau \cdot R}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^2} \int \sin \alpha d\alpha = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 R};$$

$$E_x = \int dE_x = \frac{1 \cdot \tau \cdot R}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^2} \int \cos \alpha d\alpha = 0.$$

Следовательно, в точке A напряженность поля \vec{E} направлена вдоль оси y и равна $\vec{E} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 R} \vec{j}$.

Емкость. Конденсаторы

Сообщенный проводнику заряд распределяется по его поверхности так, чтобы напряженность поля внутри проводника была равна нулю. При этом проводник приобретает некоторый потенциал ϕ . Если проводнику сообщить дополнительный заряд, то он также перераспределится по его поверхности, и потенциал проводника изменится. Опыт показывает, что потенциал проводника пропорционален находящемуся на нем заряду

$$q = C \cdot \phi, \quad (14)$$

где коэффициент пропорциональности C назван емкостью.

Сообщение телу заряда возможно перемещением электронов (или других заряженных частиц) на это тело от другого под действием **электрической силы**. При этом другое тело приобретает такой же по величине

заряд (нескомпенсированный), что и первое тело, но противоположного знака. Таким образом емкость (емкость) создается всегда двумя телами (проводниками). Такая система называется конденсатором. Емкость конденсатора равна

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{q}{U}, \quad (15)$$

где q – заряд конденсатора (одного из его образующих тел), $\Delta\varphi$ – разность потенциалов между телами, U – напряжение на конденсаторе.

Емкость конденсатора, образованного двумя плоскими пластинами с площадью S и расстоянием между ними d равна

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}, \quad (16)$$

где ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды между пластинами (обкладками конденсатора).

Соединение конденсаторов, их эквивалентная емкость

Конденсаторы могут быть соединены в группы последовательно (рис. 1.13, а) и параллельно (рис. 1.13, б). Такие группы могут быть заменены одним (эквивалентным) конденсатором с емкостью $C_э$, равной емкости группы ($C_{1...N}$).

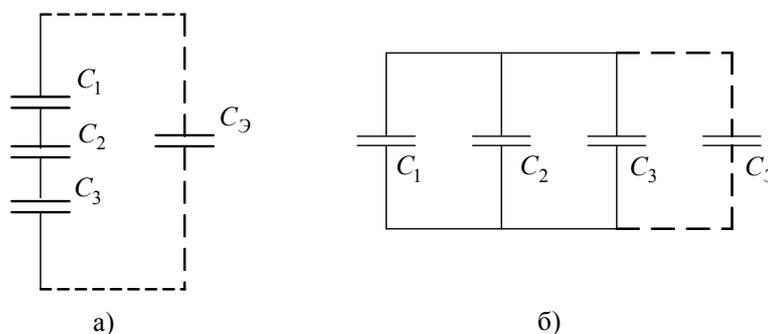


Рис. 1.13

При последовательном соединении конденсаторов условия эквивалентности

$$\begin{aligned} q_1 = q_2 = q_3 = \dots = q_n = q \\ U_1 + U_2 + U_3 + \dots = U_э \end{aligned} \quad (17)$$

С учетом (15) последнее уравнение системы (17) можно записать в виде

$$\frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3} + \dots = \frac{q}{C_э}.$$

Из него следует, что емкость конденсатора, эквивалентного группе конденсаторов, соединенных последовательно, определяется выражением

$$\frac{1}{C_3} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}. \quad (18)$$

При параллельном соединении группы конденсаторов условие эквивалентности

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 + q_3 + \dots &= q_3 \\ U_1 = U_2 = U_3 \dots &= U_3 = U \end{aligned} \quad (19)$$

С учетом (15) первое уравнение системы (19) можно записать в виде

$$C_1U + C_2U + C_3U + \dots = C_3U.$$

Из него следует, что емкость конденсатора, эквивалентного группе конденсаторов, соединенных параллельно, определяется выражением

$$C_3 = \sum_{i=1}^N C_i. \quad (20)$$

1.2. Вопросы для самоконтроля

1. Какое поле называется электростатическим? Чем подтверждается факт существования поля в какой-либо области пространства? Сформулируйте закон Кулона. Как найти равнодействующую сил, с которой поле, создаваемое несколькими зарядами, действует на пробный заряд?
2. Что является условием равновесного состояния точечного заряда? При каких условиях равновесие будет устойчивым?
3. Что называется напряженностью электростатического поля? Чему равна циркуляция вектора напряженности электростатического поля? Что можно сказать о поле вектора, циркуляция которого равна нулю? В чем состоит метод суперпозиции полей? Как применить этот метод для расчета напряженности поля, создаваемого системой точечных зарядов и распределенными зарядами?
4. Какая связь существует между силой, действующей на точечный заряд, и его потенциальной энергией в электростатическом поле? Чему равна потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов?
5. Что называется потенциалом электростатического поля? Чему равна разность потенциалов между двумя точками поля? Какую работу надо совершить, чтобы переместить заряд из точки с одним потенциалом в точку с другим потенциалом?

6. Какая связь существует между потенциалом точки и напряженностью электростатического поля в данной точке? Как, зная закон изменения потенциала поля, найти закон изменения его напряженности? Что такое эквипотенциальные поверхности?
7. Что называется потоком вектора напряженности электростатического поля? Как рассчитать поток вектора напряженности через заданную поверхность? Сформулируйте теорему Остроградского – Гаусса для электростатического поля в вакууме. Поясните, какая информация о поле вектора следует из того, что поток вектора через любую замкнутую поверхность отличен от нуля. Как применить теорему Остроградского – Гаусса к расчету напряженности поля равномерно заряженных тел: бесконечной плоскости, поверхностно заряженной сферы, бесконечно длинной нити и т.д. Когда для расчета напряженности электростатических полей, создаваемых заряженными телами, следует применять теорему Остроградского – Гаусса, а когда – метод суперпозиции полей, метод точечных зарядов?
8. Как определить разность потенциалов между двумя точками электростатического поля, если известен закон изменения напряженности этого поля?
9. Чему равна работа по перемещению точечного заряда в электростатическом поле? Когда эта работа положительна, а когда – отрицательна? Какая связь существует между работой по перемещению точечного заряда и изменением его потенциальной энергии? При каких условиях можно найти константу, с точностью до которой определяется потенциальная энергия в данной точке?
10. Как, зная закон изменения напряженности электростатического поля, найти величину силы, действующей со стороны поля на пробный точечный заряд, помещенный в данную точку поля? При каком условии перемещающийся в электростатическом поле точечный заряд, на который действует несколько сил, может остановиться?

1.3. Методические указания к практическим занятиям

1.3.1. Содержание практических занятий

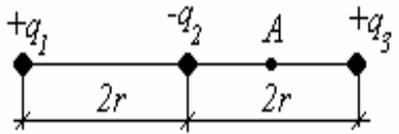
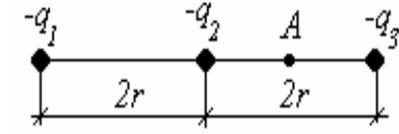
Тема занятий	Задачи	Задачи из сборников
1. Расчет параметров поля точечных зарядов и систем зарядов	Задачи на определение напряженности и потенциала поля, создаваемого зарядами	[1, № 9.1; 9.2] [2, № 9.1 – 9.22] [12, № 13.1 – 13.22; 14.1 – 14.70]

Окончание табл.

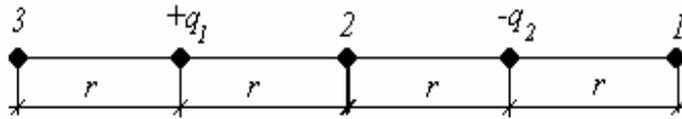
2. Расчет поля распределенных зарядов: объемных, линейных, поверхностных	Задачи на нахождение потенциала, напряженности, силы, действующей на точечный заряд от распределенных зарядов по поверхности, линии	[1, № 9.6; 9.10] [2, № 9.23 – 9.37] [12, № 15.1 – 15.22]
3. Движение зарядов в электрических полях	Задачи на движение заряженных частиц в электрическом поле, на определение работы по перемещению заряда в поле	[1, № 9.3; 9.5] [2, № 9.38 – 9.60] [12, № 15.23 – 15.70]
4. Системы конденсаторов. Энергия электрического поля	Задачи на: определение электрической емкости проводящей среды, плоского и сферического конденсаторов; соединения конденсаторов; энергии плоского конденсатора; энергии поля заряженной сферы	[1, № 10.8 – 10.10] [2, № 9.61 – 9.129] [12, № 18.15 – 18.20]

1.3.2. Пример методической структуры практического занятия

1. *Тема:* Взаимодействие зарядов. Напряженность и потенциал электрического поля точечных зарядов и систем зарядов.
2. *Цель:* 1) научиться пользоваться законом Кулона, учитывая независимость действия электрических зарядов; 2) научиться рассчитывать напряженности и потенциалы поля точечных зарядов, напряженность поля системы зарядов и потенциал точек электрических полей.
3. Контроль готовности студентов к занятию (программированный контроль с использованием тестов к данному занятию или контроль по вопросам).

I вариант	II вариант
3.1. Дать определение	
однородного электрического поля	неоднородного электрического поля
3.2. Дать определение	
напряженности поля	потенциала поля
3.3. Указать направление вектора E в точке A , если поле образовано тремя равными по модулю зарядами q , а расстояние между ними равно $2r$	
	
3.4. Изобразить графически поле	
плоского конденсатора	двух точечных зарядов (одноименных или разноименных)

3.5. Два равных точечных заряда противоположного знака создают электрическое поле. В какой из отмеченных точек 1, 2 или 3



максимальна напряженность поля

максимален потенциал поля

3.6. На двух одинаковых по длине нитях, закрепленных в одной точке, подвешены два одноименно заряженных шарика. Сравнить углы отклонения нитей от вертикали, если

они имеют одинаковые массы, а заряд первого шарика больше заряда второго
($m_1 = m_2, q_1 > q_2$)

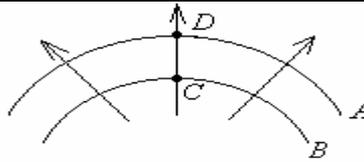
заряды шариков одинаковы, а масса первого больше массы второго
($m_1 > m_2, q_1 = q_2$)

3.7. Рассчитать ускорение, с которым движется заряд в поле с напряженностью E , если этот заряд

электрон

протон

3.8. На рисунке показаны силовые и эквипотенциальные линии некоторого электростатического поля



Какая потенциальная линия (А или В) соответствует большему потенциалу?

В какой точке (D или C) больше напряженность поля?

4. Разбор типовых задач осуществляется в соответствии с темой занятия.

5. Самостоятельная работа по решению задач студентами осуществляется в соответствии с темой занятия.

1.4. Примеры решения задач

Пример 1.

Два точечных заряда $q_1 = 1$ нКл и $q_2 = -2$ нКл находятся в воздухе на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. Определить напряженность \vec{E} и потенциал ϕ поля, создаваемого этими зарядами в точках:

А – удаленной от заряда q_1 на расстояние $r_1 = 9$ см и от заряда q_2 на расстояние $r_2 = 7$ см;

В и **С** – находящихся на прямой, проходящей через заряды q_1 и q_2 и расположенных: точка **В** на расстоянии $r_3 = 4$ см от заряда q_2 к заряду q_1 , точка **С** на расстоянии $r_4 = 4$ см от заряда q_1 и 14 см от заряда q_2 (рис. 1.14).

Решение. Согласно принципу суперпозиции электрических полей, каждый заряд создает поле независимо от присутствия в пространстве других зарядов. Поэтому напряженность \vec{E} электрического поля в искомой точке

может быть найдена как геометрическая сумма напряженностей \vec{E}_1 и \vec{E}_2 полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Напряженность электрического поля, создаваемого в воздухе ($\epsilon = 1$) точечным зарядом

$$E = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

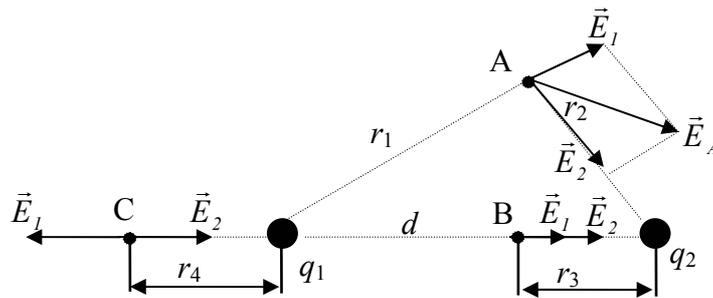


Рис. 1.14

Для точки A

Напряженности электрического поля, создаваемые в точке A зарядами q_1 и q_2

$$E_1 = \frac{|q_1|}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}; \quad E_2 = \frac{|q_2|}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}.$$

Вектор \vec{E}_1 (см. рис. 1.14) направлен по силовой линии от заряда q_1 , так как этот заряд положителен; вектор \vec{E}_2 направлен также по силовой линии, но к заряду q_2 , так как этот заряд отрицателен.

Модуль вектора \vec{E} найдем по теореме косинусов

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos \alpha}, \quad (1)$$

где α – угол между векторами \vec{E}_1 и \vec{E}_2 , который может быть найден из треугольника со сторонами r_1 , r_2 и d

$$\cos \alpha = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}.$$

В данном случае во избежание громоздких записей значение $\cos \alpha$ удобно вычислить отдельно:

$$\cos \alpha = \frac{(0,1)^2 - (0,09)^2 - (0,07)^2}{2 \cdot 0,09 \cdot 0,07} = -0,238.$$

Подставляя выражения для \vec{E}_1 и \vec{E}_2 в равенство (1) и вынося общий множитель $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ за знак корня, получаем

$$E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4} + 2 \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r_1^2 r_2^2} \cos \alpha}.$$

Произведем вычисления

$$E_A = 9 \cdot 10^9 \sqrt{\frac{(10^{-9})^2}{(0,09)^4} + \frac{(2 \cdot 10^{-9})^2}{(0,07)^4} + 2 \frac{10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{(0,09)^2 \cdot (0,07)^2}} (-0,238) \text{ В/м} = 3,58 \cdot 10^3 \text{ В/м} = 3,58 \text{ кВ/м}.$$

В соответствии с принципом суперпозиции электрических полей потенциал φ результирующего поля, создаваемого двумя зарядами q_1 и q_2 , равен алгебраической сумме потенциалов

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Потенциал электрического поля, создаваемого в вакууме точечным зарядом q на расстоянии r от него, выражается формулой

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

В нашем случае для точки A имеем

$$\varphi_A = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2}.$$

Произведем вычисления

$$\varphi_A = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{10^{-9}}{0,09} + \frac{-2 \cdot 10^{-9}}{0,07} \right) \text{ В} = -157 \text{ В}.$$

Для точки B

В точке B векторы \vec{E}_1 и \vec{E}_2 напряженности поля, создаваемые зарядами q_1 и q_2 , направлены в одну сторону – слева направо (примем это направление за положительное). Поэтому вектор результирующей напряженности направлен в ту же сторону и численно равен их сумме:

$$E_B = E_1 + E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{(d - r_3)^2} + \frac{q_2}{r_3^2} \right);$$

$$E_B = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{10^{-9}}{(0,06)^2} + \frac{2 \cdot 10^{-9}}{(0,04)^2} \right) \text{В/м} = 1,37 \cdot 10^4 \text{В/м}.$$

Потенциал $\varphi_B = \varphi_1 + \varphi_2$

$$\varphi_B = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0(d-r_3)} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_3};$$

$$\varphi_B = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{10^{-9}}{0,06} + \frac{-2 \cdot 10^{-9}}{0,04} \right) \text{В} = 300 \text{ В}.$$

Для точки **C**

В точке **C** направления векторов \vec{E}_1 и \vec{E}_2 противоположны, поэтому

$$E_C = -E_1 + E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-q_1}{r_4^2} + \frac{q_2}{(d+r_4)^2} \right);$$

$$E_C = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{-10^{-9}}{(0,04)^2} + \frac{2 \cdot 10^{-9}}{(0,14)^2} \right) \text{В/м} = -4,7 \cdot 10^3 \text{В/м}.$$

Потенциал $\varphi_C = \varphi_1 + \varphi_2$

$$\varphi_C = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_4} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 (d+r_4)};$$

$$\varphi_C = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{10^{-9}}{0,04} + \frac{-2 \cdot 10^{-9}}{0,14} \right) \text{В} = 96 \text{ В}.$$

Пример 2.

Две концентрические проводящие сферы радиусами $R_1 = 6$ см и $R_2 = 10$ см несут соответственно заряды $q_1 = 1$ нКл и $q_2 = -0,5$ нКл (рис. 1.15). Найти напряженность E поля в точках, отстоящих от центра сфер на расстояниях $r_1 = 5$ см, $r_2 = 9$ см, $r_3 = 15$ см. Построить график $E(r)$.

Решение. Точки, в которых требуется найти напряженность электрического поля, лежат в трех областях: области I ($r_1 < R_1$), области II ($R_1 < r_2 < R_2$), области III ($r_3 > R_2$).

1. Для определения напряженности E_1 в области I проведем гауссову поверхность S_1 радиусом r_1 и воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса

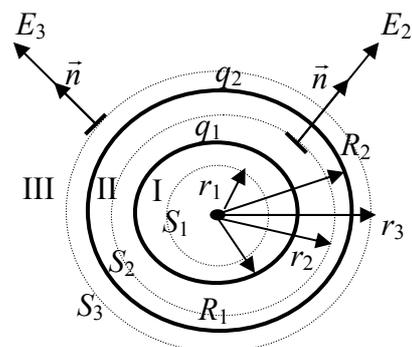


Рис. 1.15

$$\oint_{S_1} E_n dS = 0,$$

так как суммарный заряд, находящийся внутри гауссовой поверхности, равен нулю.

Из соображений симметрии $E_n = E_1 = \text{const}$. Следовательно $E_1 \oint_{S_1} dS = 0$

и E_1 (напряженность поля в области I) во всех точках, удовлетворяющих условию $r_1 < R_1$, будет равна нулю.

2. В области II гауссову поверхность проведем радиусом r_2 . В этом случае $\oint_{S_2} E_n dS = \frac{q_1}{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{q_1}{\epsilon_0}$, так как $\epsilon = 1$ для воздуха или $ES_2 = \frac{q_1}{\epsilon_0}$.

Обозначив напряженность E для области II через E_2 , получим

$$E_2 = \frac{q_1}{\epsilon_0 S_2},$$

где $S_2 = 4\pi r_2^2$ – площадь гауссовой поверхности.

Тогда

$$E_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}; \quad E_2 = \frac{10^{-9}}{4\pi/(4\pi \cdot 9 \cdot 10^9) (0,09)^2} \text{ В/м} = 1,11 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

3. В области III гауссова поверхность проводится радиусом r_3 . Обозначим напряженность E области III через E_3 и учтем, что в этом случае гауссова поверхность охватывает обе сферы и, следовательно, суммарный заряд будет равен $q_1 + q_2$. Тогда

$$E_3 = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r_3^2}.$$

Учитывая, что $q_2 < q_1$, это выражение можно переписать в виде

$$E_3 = \frac{q_1 - |q_2|}{4\pi\epsilon_0 r_3^2}; \quad E_3 = 9 \cdot 10^9 \frac{(1 - 0,5) \cdot 10^{-9}}{(0,15)^2} \text{ В/м} = 200 \text{ В/м}.$$

Построим график $E(r)$ (рис. 1.16). В области I ($r_1 < R_1$) $E = 0$. В области II ($R_1 \leq r < R_2$) $E_2(r)$ изменяется по закону $1/r^2$. В точке $r = R_1$ напряженность $E_2(R_1) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} = 2,5 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}$.

В точке $r = R_2$ (r стремится к R_2 слева) $E_2(R_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} = 0,9 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}$. В области III ($r > R_2$) $E_3(r)$ изменяется по закону $1/r^2$, причем в точке $r = R_2$ (r стремится к R_2 справа) $E_3(R_2) = \frac{(q_1 - |q_2|)}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} = 0,45 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}$. Таким образом, функция $E(r)$ в точках $r = R_1, r = R_2$ терпит разрыв.

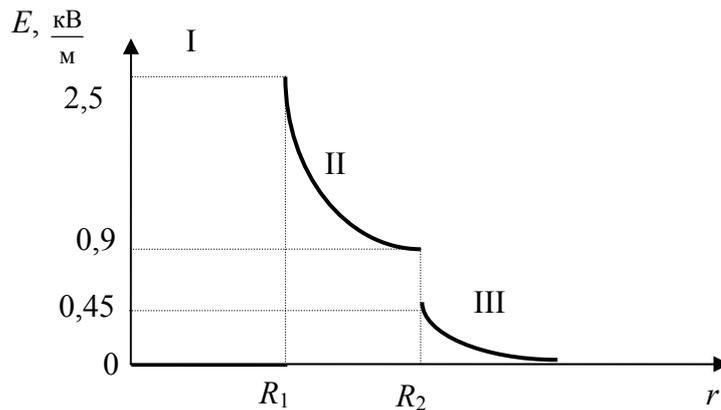


Рис. 1.16

Пример 3.

Определить напряженность поля между двумя бесконечными пластинами и вне их, если площадь каждой пластины S , их заряды q_1 и $q_2 < q_1$. Рассмотреть также случай, когда заряд второй пластины отрицательный.

Решение. В любой точке пространства (между пластинами и вне их), согласно принципу суперпозиции, $\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$. Поэтому

$$\vec{E}_A = \vec{E}'_1 + \vec{E}'_2; \quad \vec{E}_B = \vec{E}'_1 + \vec{E}'_2; \quad \vec{E}_C = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

где \vec{E}'_1 и \vec{E}'_2 ; \vec{E}_2 и \vec{E}'_1 – напряженности полей первой и второй пластины справа и слева от них (рис. 1.17).

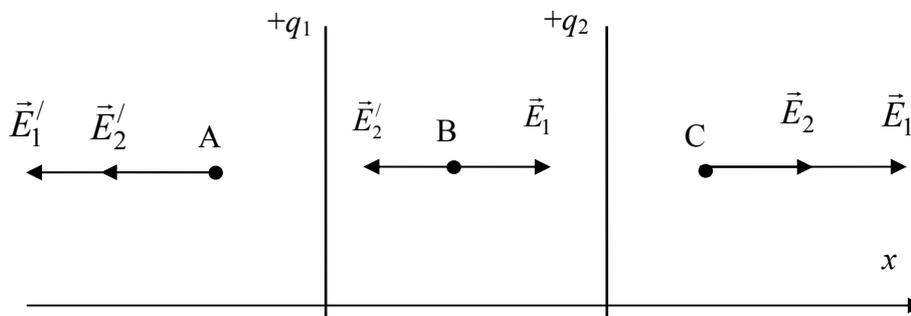


Рис. 1.17

Направим координатную ось Ox перпендикулярно к пластинам. Проецируя векторы напряженностей на эту ось, получим: $E_A = -(E_1' + E_2')$, $E_B = E_1 - E_2'$, $E_C = E_1 + E_2$. Поскольку размеры пластин велики по сравнению с расстояниями до рассматриваемых точек, то

$$E_1 = E_1' = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{q_1}{2\varepsilon_0\varepsilon S}; \quad E_2 = E_2' = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{q_2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}.$$

Следовательно, для первого случая

$$E_A = \frac{q_1 + q_2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}; \quad E_B = \frac{q_1 - q_2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}; \quad E_C = \frac{q_1 + q_2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}.$$

Когда заряд второй пластины отрицательный (рис. 1.18), напряженность поля между пластинами $E_B = \frac{q_1 + q_2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}$, вне пластин $E = \pm \frac{q_1 - q_2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}$.

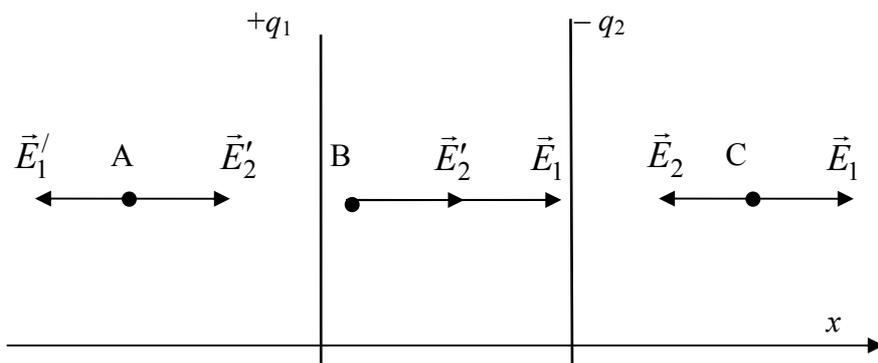


Рис. 1.18

На рис. 1.19 и 1.20 представлен график изменения напряженности поля вдоль прямой, соединяющей центры пластин.

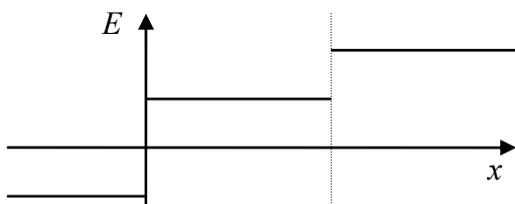


Рис. 1.19



Рис. 1.20

Пример 4.

На тонком стержне длиной ℓ равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 10$ нКл/м. Найти потенциал φ , созданный распределен-

ным зарядом в точке А, расположенной на оси стержня и удаленной от его ближайшего конца на расстояние ℓ .

Решение. Выделим на стержне малый участок длиной dx . На этом участке будет сосредоточен заряд $dq = \tau dx$, который можно считать точечным. Потенциал $d\varphi$, создаваемый этим точечным зарядом в точке А (рис. 1.21) можно определить по формуле

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 x} = \frac{\tau dx}{4\pi\epsilon_0 x};$$

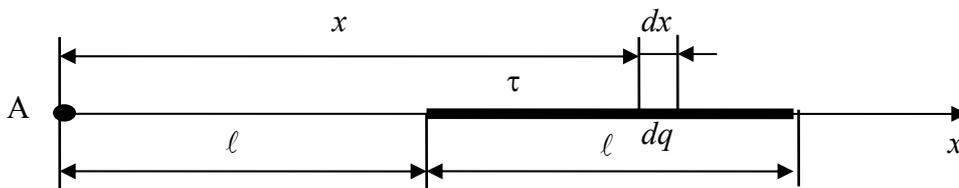


Рис. 1.21

Согласно принципу суперпозиции электрических полей потенциал электрического поля, создаваемого заряженным стержнем в точке А, найдем интегрированием

$$\varphi = \int_{\ell}^{2\ell} \frac{\tau dx}{4\pi\epsilon_0 x} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_{\ell}^{2\ell} \frac{dx}{x} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln x \Big|_{\ell}^{2\ell} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln 2;$$

$$\varphi = 90 \cdot 0,693 \text{ В} = 9 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 10^{-9} \cdot 0,693 \text{ В} = 62,4 \text{ В}.$$

Пример 5.

Найти напряженность E и потенциал φ в центре полукольца радиусом $R = 5$ см, по которому равномерно распределен заряд $q = 3 \cdot 10^{-9}$ Кл.

Решение. Для определения напряженности \vec{E} и потенциала φ в центре полукольца воспользуемся принципом суперпозиции.

Разделим полукольцо на малые элементы дуги dl так, чтобы заряд $dq = \tau \cdot dl = \frac{q}{\pi R} dl$ каждой точки дуги можно было считать точечным. Выберем два произвольных симметрично расположенных относительно OO' элемента дуги (рис. 1.22). Напряженности электрического поля в точке O ,

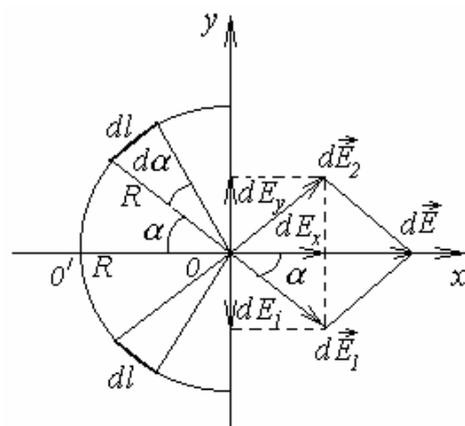


Рис. 1.22

создаваемые выбранными элементами $d\vec{E}_1$ и $d\vec{E}_2$. Согласно принципу суперпозиции $d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2$. Из соображений симметрии следует, что алгебраическая сумма проекций напряженностей поля выбранных элементов на ось Oy равна нулю. Результирующее поле направлено вдоль оси Ox :

$$dE = dE_x = dE_1 \cdot \cos \alpha = \frac{dq}{4\pi \varepsilon_0 R^2} \cos \alpha = \frac{q \cdot \cos \alpha}{4\pi^2 \varepsilon_0 R^3} d\ell.$$

Так как $d\ell = R d\alpha$, то $dE = \frac{q \cdot \cos \alpha}{4\pi^2 \varepsilon_0 R^2} d\alpha$.

Положение точечного заряда dq на полукольце определяется углом α . Поэтому угол α выбираем в качестве переменной интегрирования

$$E = E_x = \frac{q}{4\pi^2 \varepsilon_0 R^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha = \frac{q}{2\pi^2 \varepsilon_0 R^2};$$

$$E = \frac{3 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot (3,14)^2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot (0,05)^2} = 6,88 \cdot 10^3 \text{ В/м}.$$

Потенциал φ в центре полукольца определяется алгебраической суммой потенциалов электрического поля $d\varphi$ элементарных зарядов (согласно принципу суперпозиции). Учитывая, что $d\varphi$ точечного заряда

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi \varepsilon_0 R} = \frac{q d\ell}{4\pi^2 \varepsilon_0 R^2}, \text{ где } dq = \frac{q d\ell}{\pi R}, \text{ определяем } \varphi:$$

$$\varphi = \int_0^{\pi R} d\varphi = \frac{q}{4\pi^2 \varepsilon_0 R^2} \int_0^{\pi R} d\ell = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 R};$$

$$\varphi = \frac{3 \cdot 10^{-9}}{4\pi / (4\pi \cdot 9 \cdot 10^9) 0,05} = 5,39 \cdot 10^2 \text{ В}.$$

В итоге занятия студент должен уметь решать задачи на расчет сил взаимодействия точечных зарядов и заряженных тел, уметь рассчитывать поля точечного заряда и системы точечных зарядов, заряженных: плоскости, конденсатора, сферы (шара), нити.

Пример 6.

Плоский воздушный конденсатор с площадью обкладок $S = 200 \text{ см}^2$ каждая и расстоянием между ними $l = 5 \text{ мм}$ заряжается до разности потенциалов $U_0 = 600 \text{ В}$ и отключается от батареи. Как изменяются емкость и

энергия конденсатора, если в пространство между обкладками параллельно им внести металлическую пластину такой же площади и толщины $l' = 2$ мм?

Решение. Внесение металлической пластины параллельно обкладкам конденсатора (при условии, что площади пластины и обкладок равны) не меняет конфигурации поля. Так как в плоском конденсаторе поле однородно, то не имеет значения расположение этой пластины – вплотную к одной из обкладок конденсатора или посередине между ними. И в том, и в другом случаях внесение пластины равнозначно уменьшению расстояния между обкладками от l до $l - l'$. Поскольку вносимая пластина располагается нормально к силовым линиям поля, то вне ее напряженность поля меняться не будет (при условии, что конденсатор отключен от батареи). Но в толще этой пластины напряженность поля равна нулю. Это значит, что внесение пластины уменьшает объем пространства, в котором существует электрическое поле. Следовательно, энергия конденсатора будет уменьшаться.

Уменьшение расстояния между обкладками за счет внесения пластины вызывает увеличение емкости конденсатора на величину

$$\Delta C = C_2 - C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{l - l'} - \frac{\varepsilon_0 S}{l} = 23,6 \cdot 10^{-12} \text{ Ф},$$

где C_2 – конечная емкость конденсатора.

Изменение энергии конденсатора может быть рассчитано двумя способами.

1. Поскольку конденсатор отключен от батареи, заряд на его обкладках остается постоянным и равным

$$q = C_1 U_0,$$

где C_1 – начальная емкость конденсатора.

Изменение энергии конденсатора при изменении емкости равно

$$\Delta W = \frac{q^2}{2} \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1} \right) = -\frac{\varepsilon_0 S U_0^2}{2l^2} \cdot l' = -2,5 \cdot 10^{-6} \text{ Дж}.$$

2. Постоянство заряда на обкладках конденсатора обуславливает постоянство напряженности поля, а следовательно, и плотности энергии.

Однако поскольку внутри внесенной металлической пластины поля нет, то убыль энергии конденсатора равна энергии электрического поля в объеме металлической пластинки

$$\Delta W = -\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot S \cdot l',$$

где $E = \frac{U_0}{l}$ – напряженность поля между обкладками.

В результате получаем

$$\Delta W = -\frac{\varepsilon_0 U_0^2}{2l^2} \cdot S \cdot l'.$$

Пример 7.

На пластинах плоского конденсатора находится заряд $q = 10$ нКл. Площадь S каждой пластины конденсатора равна 100 см^2 , диэлектрик – воздух. Определите силу F , с которой притягиваются пластины. Поле между пластинами считать однородным.

Решение. Заряд q одной пластины находится в поле напряженностью E_1 , созданном зарядом другой пластины конденсатора. Следовательно, на первый заряд действует сила

$$F = qE_1. \quad (1)$$

Поскольку

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{q}{2\varepsilon_0 S},$$

где σ – поверхностная плотность заряда пластины, то формула (1) примет вид

$$F = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S};$$

$$F = \frac{10^{-10}}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}} = 5,65 \cdot 10^{-4} \text{ Н} = 565 \text{ мкН}.$$

Пример 8.

Конденсатор емкостью $C_1 = 3$ мкФ был заряжен до разности потенциалов $U_1 = 40$ В. После отключения от источника тока конденсатор соединили параллельно с другим незаряженным конденсатором емкостью $C_2 = 5$ мкФ. Какая энергия W' израсходуется на образование искры в момент присоединения второго конденсатора?

Решение. Энергия, израсходованная на образование искры

$$W' = W_1 - W_2, \quad (1)$$

где W_1 – энергия, которой обладал первый конденсатор до присоединения к нему второго конденсатора; W_2 – энергия, которую имеет батарея, составленная из двух конденсаторов.

Энергия заряженного конденсатора определяется по формуле

$$W = \frac{1}{2} C U^2, \quad (2)$$

где C – емкость конденсатора или батареи конденсаторов.

Выразив в формуле (1) энергии W_1 и W_2 по формуле (2) и приняв во внимание, что общая емкость параллельно соединенных конденсаторов равна сумме емкостей отдельных конденсаторов, получим

$$W' = \frac{C_1 U_1^2}{2} - \frac{(C_1 + C_2) U_2^2}{2}, \quad (3)$$

где U_2 – разность потенциалов на зажимах батареи конденсаторов.

Учитывая, что заряд после присоединения второго конденсатора остался прежним, выразим разность потенциалов U_2

$$U_2 = \frac{q}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 U_1}{C_1 + C_2}. \quad (4)$$

Подставив (4) в (3), найдем

$$W' = \frac{C_1 U_1^2}{2} - \frac{(C_1 + C_2) C_1^2 U_1^2}{2(C_1 + C_2)}$$

или

$$W' = \frac{1}{2} \cdot \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U_1^2;$$

$$W' = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-6} + 5 \cdot 10^{-6}} \cdot 1600 \text{ Дж} = 1,5 \text{ мДж}.$$

Пример 9.

Определим общую емкость системы конденсаторов, изображенную на рис. 1.23

Решение. Представим эту схему иначе. Левые обкладки конденсаторов на участках mn и ab соединены в точке a . Значит, они имеют одинаковый потенциал, например φ_1 . Расположим эти конденсаторы друг под другом (рис. 1.24). Правая обкладка конденсатора на участке mn соединена с правой обкладкой конденсатора на участке be , а правая обкладка конденса-

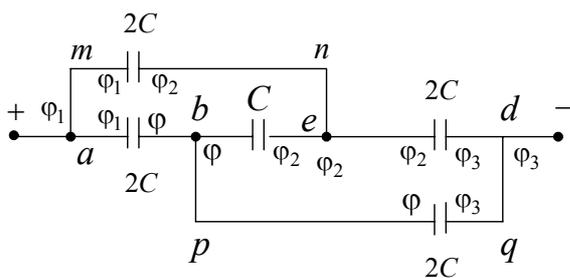


Рис. 1.23

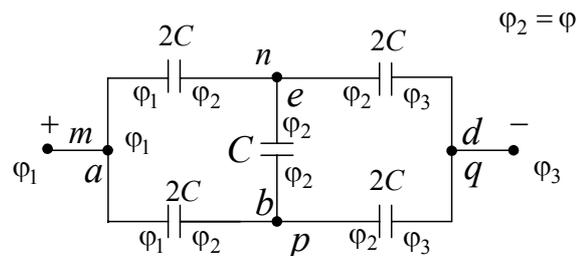


Рис. 1.24

тора на участке ab соединена с левой обкладкой конденсатора на участке be , значит, этот конденсатор емкостью C может служить как бы перемычкой между конденсаторами емкостью $2C$ на участках mn и ab . Поэтому расположим участок be вертикально, соединив точки n и e (а также b и p) в одну точку. Конденсаторы на участках mn и ab оказались расположенными симметрично относительно конденсатора C слева от него.

Можно расположить конденсаторы на участках ed и pq справа от конденсатора C . Мы получим схему, изображенную на рис. 1.24. Из схемы видно, что левые обкладки верхнего и нижнего конденсаторов, расположенных слева от конденсатора C , имеют одинаковый потенциал φ_1 , такой же, как и потенциал точки a . Поскольку емкости этих конденсаторов одинаковы, то и заряд на их обкладках будет одинаков. Но это означает, что и правые обкладки этих конденсаторов в силу симметрии схемы относительно перемычки mn тоже имеют одинаковый потенциал, который обозначим, например, φ_2 . Верхняя обкладка конденсатора C соединена с правой обкладкой верхнего конденсатора, расположенного на участке mn ; следовательно она тоже имеет потенциал φ_2 . А нижняя обкладка конденсатора C соединена с правой обкладкой нижнего конденсатора на участке ab ; значит, и она имеет потенциал φ_2 .

Следовательно, обкладки конденсатора C в этой схеме всегда будут иметь одинаковый потенциал φ_2 и разность потенциалов между обкладками этого конденсатора всегда будет равной нулю при подключении этой батареи к любому источнику зарядов. Заряд на его обкладках тоже будет всегда равным нулю согласно формуле

$$q = C(\varphi_2 - \varphi_1) = 0.$$

Поэтому конденсатор C всегда будет оставаться незаряженным при подключении этой батареи к любому источнику зарядов, и его (в схеме) можно убрать, заменив схему, изображенную на рис. 1.24, схемой, изображенной на рис. 1.25.

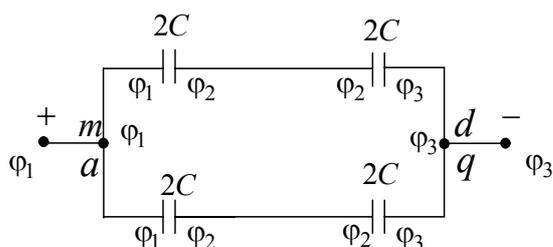


Рис. 1.25

В полученной схеме имеются две параллельные ветви, содержащие по два одинаковых конденсатора каждая. Поскольку емкость каждого конденсатора равна $2C$, то емкость одной ветви, содержащей два таких последовательных конденсатора, равна

$\frac{2C}{2} = C$. А поскольку таких ветвей две и они параллельны, то общая емкость всей этой батареи конденсаторов:

$$C_{\text{общ}} = 2C.$$

1.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Определите, с какой силой действуют два равных заряда на третий, помещенный на середине расстояния между ними. Рассмотрите случаи одноименных и разноименных зарядов.
2. Точечные заряды q и $4q$ находятся на расстоянии r друг от друга. Какой заряд и где нужно поместить, чтобы вся система находилась в равновесии, если заряды: а) закреплены; б) свободны?
3. В вершинах квадрата помещены точечные положительные заряды по 1 мкКл каждый. Какой заряд нужно поместить в центре квадрата, чтобы вся система находилась в равновесии?
4. Два заряженных шарика массой по 10 г подвешены на нитях длиной 1 м каждая к одной точке, в которой находится третий шарик, заряженный так же, как и два первых. Определить заряд третьего шарика и силу натяжения нитей, если угол расхождения их в положении равновесия равен 60° .
5. Шарик массой 10 г и зарядом $2 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}$, подвешенный на нити длиной 1 м , вращается в горизонтальной плоскости вокруг такого же неподвижного заряженного шарика. Определить угловую скорость равномерного вращения шарика и силу натяжения нити, если нить образует с вертикалью угол 60° .
6. Определить положение точки, в которой напряженность поля равна нулю вблизи двух неодинаковых зарядов 9 и 4 мКл , находящихся на расстоянии 1 м друг от друга. Рассмотреть также случай разноименных зарядов ($q_2 < 0$).
7. В вершинах равностороннего треугольника со стороной 10 см расположены заряды по 10 нКл каждый. Определить напряженность поля в центре треугольника и в точке, лежащей на середине одной из сторон.
8. Шарик массой 2 г и зарядом 40 мкКл подвешен на нити длиной $0,5 \text{ м}$ и помещен в однородное электрическое поле, вектор напряженности которого образует угол 30° с вертикалью. Определить силу натяжения нити и угол, который образует нить с вертикалью, если напряженность поля равна 200 кВ/м .
9. В однородном электрическом поле равномерно вращается шарик массой $0,5 \text{ г}$ с положительным зарядом 10 нКл , подвешенный на нити длиной $0,5 \text{ м}$. Определить силу натяжения нити и кинетическую энергию

шарика, если напряженность поля равна 100 кВ/м и направлена вертикально вниз. Нить образует с вертикалью угол 60° .

10. Точечный заряд q расположен внутри тонкостенного проводящего шара радиусом R на расстоянии r от центра. Какие заряды будут индуцированы на внутренней и наружной поверхностях шара и какова будет картина электрического поля в случаях, если шар: а) заземлен; б) изолирован и не заряжен?
11. Найти силу, с которой на заряд q_1 действует поле, создаваемое всеми остальными зарядами системы (рис. 1.26)

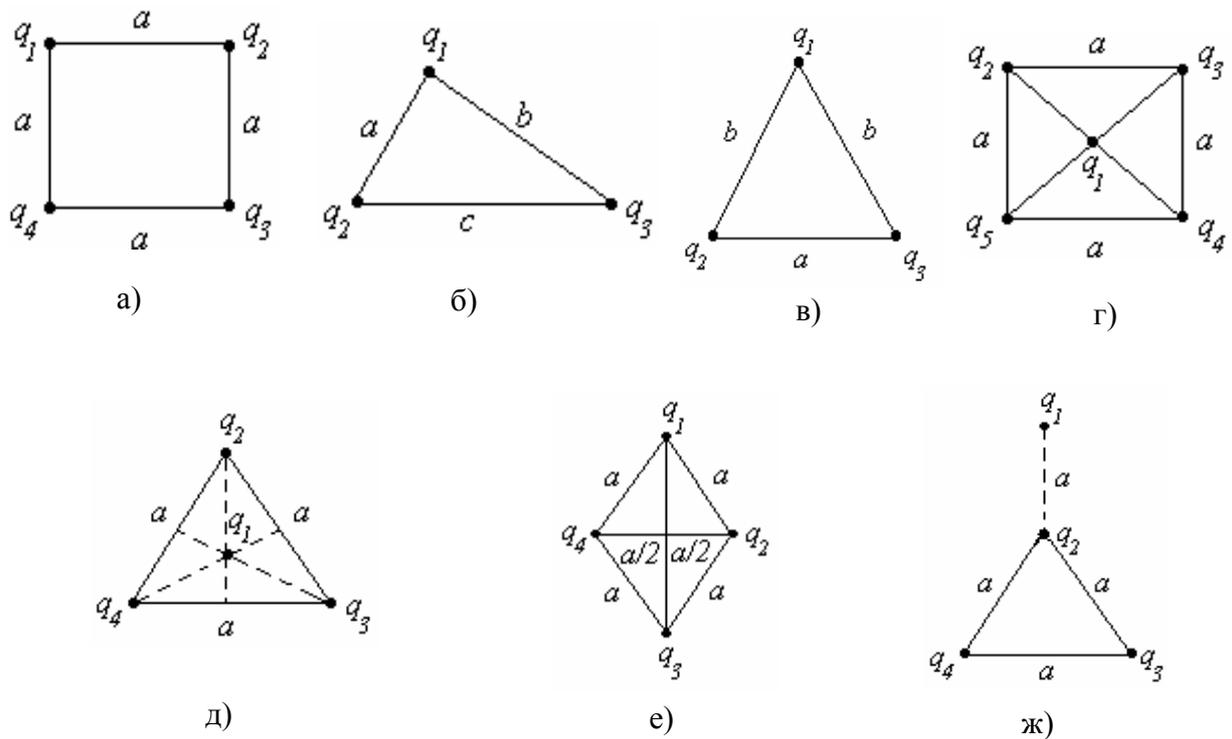


Рис. 1.26

а) $a = 2$ см
 $q_1 = 10 \cdot 10^{-9}$ Кл
 $q_2 = -1 \cdot 10^{-8}$ Кл
 $q_3 = 1 \cdot 10^{-8}$ Кл
 $q_4 = 1 \cdot 10^{-8}$ Кл

б) $a = 3$ см
 $b = 4$ см
 $c = 5$ см
 $q_1 = 10^{-9}$ Кл
 $q_2 = 6 \cdot 10^{-8}$ Кл
 $q_3 = -4 \cdot 10^{-8}$ Кл

в) $a = 2$ см
 $b = 3$ см
 $q_1 = 10^{-9}$ Кл
 $q_2 = -2 \cdot 10^{-8}$ Кл
 $q_3 = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл

г) $a = 10$ см
 $q_1 = 10^{-9}$ Кл
 $q_2 = -2 \cdot 10^{-8}$ Кл
 $q_3 = 3 \cdot 10^{-8}$ Кл
 $q_4 = -2 \cdot 10^{-8}$ Кл
 $q_5 = 4 \cdot 10^{-8}$ Кл

д) $a = 4$ см
 $q_1 = 10^{-9}$ Кл
 $q_2 = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл
 $q_3 = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл
 $q_4 = -1 \cdot 10^{-8}$ Кл

е) $a = 2$ см
 $q_1 = 0,1 \cdot 10^{-8}$ Кл
 $q_2 = -1 \cdot 10^{-8}$ Кл
 $q_3 = -3 \cdot 10^{-8}$ Кл
 $q_4 = 1 \cdot 10^{-8}$ Кл

ж) $a = 3$ см
 $q_1 = 0,1 \cdot 10^{-9}$ Кл
 $q_2 = 1 \cdot 10^{-8}$ Кл
 $q_3 = 4 \cdot 10^{-8}$ Кл
 $q_4 = -4 \cdot 10^{-8}$ Кл

12. Два положительных точечных заряда q_1 и q_2 закреплены на расстоянии l друг от друга. В точке на прямой, проходящей через эти заряды, на расстоянии x от первого заряда помещен третий заряд q_3 так, что он находится в равновесии. Найти неизвестную величину. Указать, какой знак должен иметь заряд q_3 для того, чтобы равновесие было устойчивым, если перемещение зарядов возможно только вдоль прямой, проходящей через закрепленные заряды.
- 1) $q_1 = ?$; $q_2 = 4 \cdot 10^{-9}$ Кл; $l = 0,6$ м; $x = 0,2$ м;
 2) $q_1 = 4,5 \cdot 10^{-9}$ Кл; $q_2 = ?$; $l = 0,5$ м; $x = 0,3$ м;
 3) $q_1 = q_1$; $q_2 = 4q_1$; $l = ?$; $x = 0,2$ м;
 4) $q_1 = 0,25q_2$; $q_2 = q_2$; $l = 1$ м; $x = ?$
13. Два металлических шарика имеют массу $m = 10$ г каждый. Какое число электронов N надо удалить с каждого шарика, чтобы сила их кулоновского отталкивания стала равна силе их гравитационного тяготения друг к другу?
14. На изолирующей нити подвешен маленький шарик массой $m = 1$ г, имеющий заряд $q_1 = 1$ нКл. К нему снизу подносят на расстояние $r = 2$ см другой заряженный маленький шарик, и при этом сила натяжения нити уменьшается вдвое. Чему равен заряд другого шарика? Среда – воздух.
15. Три заряженных шарика с массой m каждый подвесили на невесомых нитях длиной l в одной точке и одинаково зарядили. При этом шарики разошлись на угол α друг от друга и на угол β от *вертикали* каждый. Найти заряд q каждого шарика. Среда – воздух.
16. Шарик массой m с положительным зарядом q_1 , подвешенный на нити длиной l , равномерно вращается в горизонтальной плоскости вокруг неподвижного отрицательного заряда q_2 . При этом угол между нитью и вертикалью равен α . Найти линейную скорость шарика. Среда – воздух.
17. Шарик массой $m = 25$ мг подвешен на невесомой непроводящей нити в однородном электрическом поле напряженностью $E = 35$ В/м, силовые линии которого горизонтальны. Какой угол с вертикалью составит нить, если шарiku сообщить заряд $q = 7$ мкКл?
18. Маленький шарик с зарядом $q = 10^{-8}$ Кл находится на расстоянии $l = 3$ см от большой заземленной металлической пластины. С какой силой они взаимодействуют?
19. Одинаковые заряды $q = 100$ нКл расположены в вершинах квадрата со стороной $a = 10$ см. Определите потенциальную энергию этой системы.
20. В боровской модели атома водорода электрон движется по круговой орбите радиусом $r = 52,8$ пм, в центре которой находится протон. Опреде-

- лите: 1) скорость электрона на орбите; 2) потенциальную энергию электрона в поле ядра, выразив ее в электрон-вольтах.
21. Электростатическое поле создается положительным точечным зарядом. Определите числовое значение и направление градиента потенциала этого поля, если на расстоянии $r = 10$ см от заряда потенциал равен $\varphi = 100$ В.
 22. Определите линейную плотность бесконечно длинной заряженной нити, если работа сил поля по перемещению заряда $q = 1$ нКл с расстояния $r_1 = 5$ см до $r_2 = 2$ см в направлении, перпендикулярном нити, равна 50 мкДж.
 23. Между пластинами плоского конденсатора помещено два слоя диэлектрика – слюдяная пластинка ($\varepsilon_1 = 7$) толщиной $d_1 = 1$ мм и парафин ($\varepsilon_2 = 2$) толщиной $d_2 = 0,5$ мм. Определите: 1) напряженность электростатических полей в слоях диэлектрика; 2) электрическое смещение, если разность потенциалов между пластинами конденсатора $U = 500$ В.
 24. Определите напряженность электростатического поля на расстоянии $x = 2$ см от центра воздушного сферического конденсатора, образованного двумя шарами (внутренний радиус $r_1 = 1$ см, внешний – $r_2 = 3$ см), между которыми приложена разность потенциалов $U = 1$ кВ.
 25. К пластинам плоского воздушного конденсатора приложена разность потенциалов $U_1 = 500$ В. Площадь пластин $S = 200$ см², расстояние между ними $d_1 = 1,5$ мм. Пластины раздвинули до расстояния $d_2 = 15$ мм. Найдите энергию W_1 и W_2 конденсатора до и после раздвижения пластин, если источник напряжения перед раздвижением: 1) отключался; 2) не отключался.
 26. Определите емкость C батареи конденсаторов, изображенной на рис. 1.27. Емкость каждого конденсатора $C_i = 1$ мкФ.
 27. Определите общую емкость системы конденсаторов, изображенную на рис. 1.28.

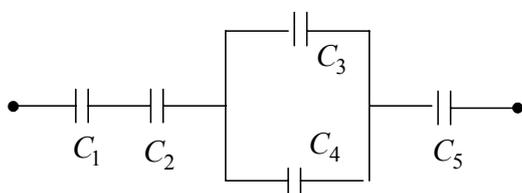


Рис. 1.27

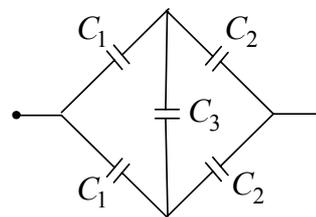


Рис. 1.28

28. В плоский конденсатор влетает электрон со скоростью $v_0 = 2 \cdot 10^6$ м/с, направленной параллельно обкладкам конденсатора (рис. 1.29). На какое расстояние h сместится электрон к нижней обкладке за время пролета конденсатора? Расстояние между обкладками конденсатора $d = 2$ см,

длина конденсатора $l = 5$ см, разность потенциалов между обкладками $U = 2$ В.

29. Линейно распределенный заряд имеет длину l с плотностью τ . Найти напряженность поля и потенциал в точке A (см. рис. 1.30).

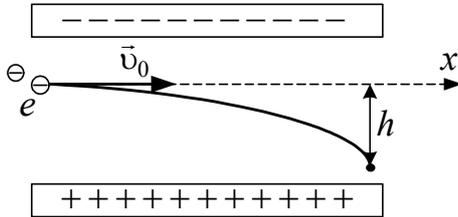


Рис. 1.29



Рис. 1.30

30. Линейно распределенный заряд имеет плотность τ и конфигурацию, показанную на рис. 1.31. Определить E и φ в точке A .
31. Линейно распределенный заряд имеет с плотностью ρ имеет вид бесконечного цилиндра (рис. 1.32). Определить зависимости E и φ от r .
32. Объемный заряд в виде шара с радиусом R распределен в соответствии с функцией $\rho = \rho_0 l^{\frac{2r}{R}}$ (рис. 1.33). Определить зависимости E и φ от r .

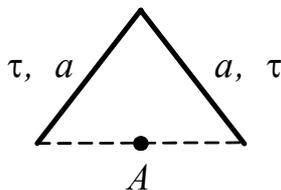


Рис. 1.31

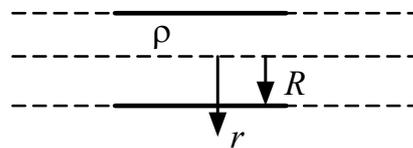


Рис. 1.32

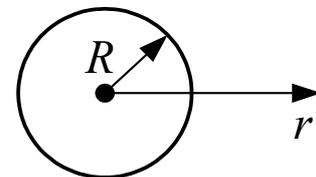


Рис. 1.33

2. УЧЕБНЫЙ БЛОК «ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ»

Введение

В этом учебном блоке рассматриваются особенности и закономерности состояния диэлектриков и проводников во внешнем электрическом поле; раскрывается физический смысл относительной диэлектрической проницаемости.

Для успешного изучения учебного материала этого блока студент должен **знать:** параметры электрического поля, принцип суперпозиции электрических полей, понятие емкости, строение вещества (в пределах школьной программы);

уметь: определять основные характеристики электрических полей и силы, действующие на электрический заряд в электрическом поле.

Учебная программа блока

Содержание блока	Форма подготовки	Литература
1. Электрический диполь в веществе. Проводники в электрическом поле	лекция, самост.	[7, § 11.4; 12.2] [10, § 88 – 89]
2. Диэлектрики в электрическом поле. Поляризация диэлектриков. Поле внутри однородного диэлектрика	лекция	[6, § 2.19 – 2.20] [7, § 12.1 – 12.2] [10, § 87 – 89]
3. Сегнетоэлектрики. Пьезоэлектрический эффект	лекция	[7, § 12.3] [10, § 91]
4. Энергия электрического поля. Плотность энергии	лекция, самост.	[6, § 2.25] [7, § 12.7] [10, § 95]

Цели обучения

студент должен знать	студент должен уметь
<ul style="list-style-type: none">– понятие поляризуемости вещества, ориентационной наведенной поляризации;– физический смысл относительной диэлектрической проницаемости вещества, вектора поляризации, диэлектрической восприимчивости;– особенности сегнето- и пьезоэлектриков;– закономерности, определяющие энергию и плотность энергии электрического поля	<ul style="list-style-type: none">– определять параметры электрического поля в средах с неоднородной диэлектрической проницаемостью;– определять величины вектора поляризации в веществе, диэлектрической восприимчивости;– находить энергию и плотность энергии электрического поля в структурах с заряженными элементами

Методическая программа блока

Тема занятия	Тип занятия	Вид занятия	Часы
1. Электрическое поле в веществе (проводниках, диэлектриках, пьезоэлектриках, сегнетоэлектриках)	Формирование новых знаний	лекция	1
2. Энергия электрического поля, плотность энергии	Формирование новых знаний	лекция	1
3. Расчет параметров электрического поля в структурах с анизотропной относительной диэлектрической проницаемостью	Углубление и систематизация знаний, развитие навыков	практ. занятие	2

2.1. Краткое содержание теоретического материала

Электрический диполь

Все вещества состоят из атомов и молекул, содержащих положительные и отрицательные заряды. В обычном состоянии атомы и молекулы нейтральны. Однако в молекулах некоторых веществ обобщенные центры положительных и отрицательных зарядов могут не совпадать. Такие молекулы называются полярными.

Система, состоящая из двух одинаковых по величине, но разноименных точечных зарядов, расположенных на некотором расстоянии l друг от друга, называется электрическим диполем (рис. 2.1). Отрезок прямой l , соединяющей оба заряда, называют плечом (осью) диполя.

Основной характеристикой диполя является его электрический или дипольный момент – вектор, численно равный произведению $q \cdot \vec{l}$ и направленный от отрицательного заряда к положительному: $\vec{p} = q \cdot \vec{l}$.

Если диполь поместить в однородное электрическое поле напряженностью \vec{E} , то на каждый из его зарядов действует сила \vec{F} (рис. 2.1). Эти силы создают момент пары сил \vec{M} . Модуль M определяется выражением $M = q \cdot E \cdot l \cdot \sin \alpha$, где α – угол между векторами \vec{p} и \vec{E} . В однородном поле момент пары сил стремится повернуть диполь так, чтобы векторы \vec{p} и \vec{E} были параллельны. Таким образом осуществляется определенная ориентация молекул вещества с естественной поляризацией молекул.

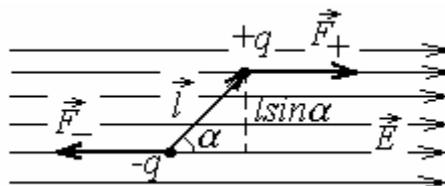


Рис. 2.1

В некоторых веществах молекулы не поляризованы (обобщенные центры положительных и отрицательных зарядов совпадают). Попадая в электрическое поле, эти центры зарядов смещаются в противоположные стороны, и образуется наведенная (индуцированная) поляризация молекул. В результате и в таких веществах в электрическом поле осуществляется определенная наведенная (индуцированная) ориентация молекул.

Проводник в электрическом поле

К проводникам относят вещества, в которых имеются «свободные» заряды, т.е. заряды, способные под действием электрического поля перемещаться в пределах вещества.

К проводникам относятся металлы в твердом и жидком состояниях, водные растворы солей, кислот и щелочей, плазма и ряд других веществ.

Рассмотрим воздействие внешнего электрического поля на проводники на примере металлов, структура которых состоит из кристаллической решетки, образованной атомами, и «свободных» электронов, которые слабо связаны с атомами и могут под действием электрического поля перемещаться в объеме кристаллической решетки. Если металл поместить во

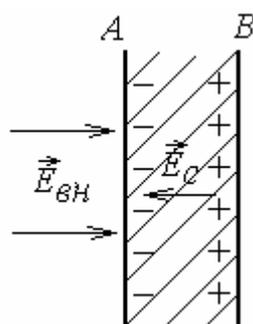


Рис. 2.2

внешнее электрическое поле (рис. 2.2), «свободные» электроны смещаются к поверхности A , создавая отрицательный избыточный заряд у этой поверхности с плотностью σ . У поверхности B остается не скомпенсированный электронами положительный заряд атомов кристаллической решетки. Таким образом в металле происходит как бы разделение зарядов. Разделение зарядов создает собственное электрическое поле с \vec{E}_C , которое компенсирует внешнее поле с \vec{E}_{BH} .

Так как в металлах количество «свободных» электронов обычно равно числу атомов, практически для любых реальных внешних полей, создаваемые ими поверхностные заряды $\pm\sigma$ оказываются достаточными, чтобы полностью скомпенсировать внешнее поле. Поэтому напряженность поля внутри металлов всегда равна нулю, т.е. выполняется условие

$$E_M = E_{BH} - E_C = 0.$$

Если (в общем случае) вектор \vec{E}_{BH} не перпендикулярен поверхности металла, то для понимания взаимодействия внешнего поля и металла \vec{E}_{BH} можно разложить на параллельную поверхности металла и перпендикулярную ей

компоненты. Ясно, что перемещение «свободных» электронов в металле будет в этом случае происходить и вдоль поверхности до полной компенсации параллельной поверхности металла компоненты $\vec{E}_{\text{ВН}}$. Исходя из этого, можно сделать два вывода:

- $\vec{E}_{\text{ВН}}$ вблизи металлического образца всегда перпендикулярна его поверхности;
- поверхность металла всегда эквипотенциальна.

Далее рассмотрим металл, помещенный во внешнее электрическое поле, внутри которого имеется полость (рис. 2.3).

Вычислим работу сил электрического поля, совершаемую ими при перемещении некоторого точечного заряда q по замкнутой траектории $1 - a - 2 - b - 1$, часть которой проходит через полость, а часть – через проводник.

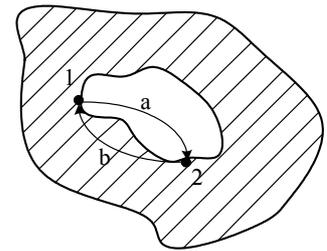


Рис. 2.3

Поскольку электрическое поле потенциальное, $A_{1-a-2-b-1} = 0$. С другой стороны $A_{1-a-2-b-1} = A_{1-a-2} + A_{2-b-1}$. Так как поле в металле отсутствует, $A_{2-b-1} = 0$. Следовательно, $A_{1-a-2} = 0$. Таким образом, независимо от траектории перемещения заряда внутри полости, работа сил поля будет равна нулю. Это может быть только в случае, если поле внутри полости отсутствует.

Поэтому полый проводник экранирует электрическое поле всех внешних зарядов. На этом свойстве основана электростатическая защита: для того чтобы оградить чувствительные электрические приборы от воздействия внешних электрических полей, их заключают в замкнутые металлические оболочки.

Теперь представим себе, что вблизи проводника расположен точечный заряд. Рассмотрим ситуацию в наиболее простом варианте: определим силу взаимодействия большой проводящей пластины с точечным зарядом q , расположенным вблизи ее поверхности. Для этого представим поле двух разноименных точечных зарядов $\pm q$ в виде силовых линий и эквипотенциальных поверхностей (рис. 2.4).

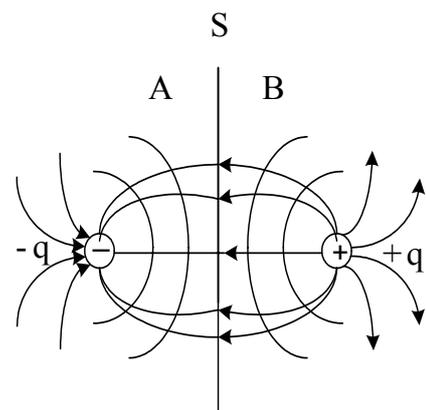


Рис. 2.4

Эквипотенциальная поверхность S (см. рис. 2.4) имеет потенциал, равный нулю, и представляет собой плоскость, причем силовые линии перпендикулярны к поверхности S . Если область A заменить металлом с поверхностью S и потенциалом, равным нулю, конфигурация силовых

линий и эквипотенциалей в области B не изменится. Это означает, что взаимодействие заряда $(+q)$ с металлической пластиной эквивалентно взаимодействию $(+q)$ с зеркальным отображением этого заряда относительно поверхности S , т.е. с зарядом $(-q)$, расположенным на таком же расстоянии h от поверхности металла S , что и заряд $(+q)$:

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2h)^2}.$$

Диэлектрики в электрическом поле

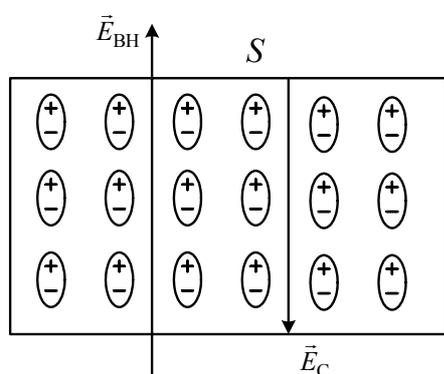


Рис. 2.5

В диэлектриках валентные электроны атома «сильно» связаны с ядром, поэтому «свободных» электронов в диэлектриках настолько мало, что эффект разделения зарядов, как в металлах, практически не проявляется. Однако в результате индуцированной или естественной поляризации молекулы оказываются поляризованными во внешнем поле $\vec{E}_{\text{вн}}$ как показано на рис. 2.5. В результате возникают поверхностные заряды. Внутри диэлектрика разноименные заряды молекул – диполей взаимно компенсируются.

Величину поверхностного заряда можно определить выражением

$$q_S = nS\vec{p}, \quad (1)$$

где n – концентрация молекул у поверхности диэлектрика; S – площадь поверхности диэлектрика; \vec{p} – дипольный момент одной молекулы. В диэлектриках с естественной поляризацией

$$\vec{p} = Q \cdot \vec{l},$$

где Q – эквивалентный (смещенный) заряд молекулы диполя; l – расстояние между «смещенными» зарядами. В диэлектриках с наведенной (индуцированной) поляризацией

$$\vec{p} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}_q, \quad (2)$$

где α – коэффициент поляризуемости молекулы; \vec{E}_q – напряженность поля в диэлектрике.

Выражение (2) может быть использовано для любого диэлектрика, так как, во-первых, момент молекул-диполей с естественной поляризацией

в электрическом поле может изменяться, а, во-вторых, все молекулы находятся в диэлектрике в тепловом хаотическом движении (колебательном, вращательном). Поэтому изображение на рис. 2.5 следует рассматривать как некоторое среднестатистическое состояние для данной температуры.

Плотность поверхностного индуцированного заряда на поверхностях диэлектрика равна

$$\sigma_S = \frac{q_S}{S} = np,$$

поэтому, с учетом (2), теплового движения и типа диэлектрика

$$\sigma_S = \chi \varepsilon_0 E_q, \quad (3)$$

где $\chi = n\alpha$ – диэлектрическая восприимчивость вещества.

Поверхностные заряды создают собственное электрическое поле с напряженностью E_C , которая противоположна $E_{ВН}$:

$$E_C = \frac{\sigma_S}{\varepsilon_0} = \chi E_q.$$

В соответствии с принципом суперпозиции

$$\vec{E}_q = \vec{E}_{ВН} + \vec{E}_C \text{ или } E_q = E_{ВН} - \chi E_q.$$

Таким образом

$$E_q = \frac{E_{ВН}}{1 + \chi} = \frac{E_{ВН}}{\varepsilon},$$

где $\varepsilon = 1 + \chi$ – относительная диэлектрическая проницаемость.

Связь между вектором электростатической индукции \vec{D}_q и напряженностью \vec{E}_q для диэлектрика можно записать в виде

$$\vec{D}_q = \varepsilon_0 \vec{E}_q + \vec{p}_L = \varepsilon_0 \chi_L \vec{E}_q,$$

где $\vec{p}_L = \sum \vec{p}_i = q_S L = nSL\vec{p}$ – полный дипольный момент диэлектрического тела во внешнем электрическом поле, L – проекция протяженности диэлектрического тела на направление $\vec{E}_{ВН}$, n – число молекул в диэлектрическом теле.

Сегнетоэлектрики

Существует группа кристаллических диэлектриков, отличающихся тем, что в них спонтанно или под действием внешнего поля формируются

микрообласти («домены»), в которых все молекулы – диполи ориентированы в одном направлении (рис. 2.6). «Домены», как и молекулы, образуют диполи, но с гораздо большими моментами, массами и силами взаимодействия.

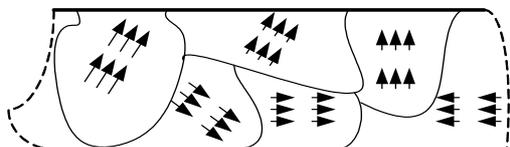


Рис. 2.6

Вследствие этих особенностей, затрудняющих ориентацию или разориентацию диполей – доменов, сегнетоэлектрики обладают свойствами, отличными от свойств обычного диэлектрика:

- величина ϵ зависит от $E_{вн}$;
- значение вектора поляризации (полного дипольного момента) зависит не только от $E_{вн}$ в данный момент, но и от $E_{вн}$ в предыдущий момент, что обуславливает наличие петли гистерезиса зависимости $\epsilon = f(E_{вн})$;
- зависимость $\epsilon = f(E_{вн})$ достигает «насыщения» с ростом $E_{вн}$;
- величина ϵ может достигать очень больших величин (до 10^4);
- существует критическая температура T_k (точка Кюри), при которой из-за высокой тепловой энергии молекул «домены» не формируются или разрушаются.

Пьезоэлектрики

Возникновение поверхностных электрических зарядов на кристалле кварца при его деформации было названо *пьезоэлектрическим эффектом*.

Если кристалл пьезоэлектрика поместить в электрическое поле, то в кристалле возникают упругие напряжения, в результате чего кристалл деформируется (обратный эффект).

Причиной пьезоэлектрического эффекта является смещение электрического и механического равновесия в диэлектрическом кристалле под влиянием внешних воздействий. При наложении электрического поля возникают деформация электронных оболочек и относительное смещение атомов и ионов кристалла, что приводит к макроскопической деформации образца.

Энергия и плотность энергии электрического поля

Зарядка конденсатора заключается в перемещении «свободных» зарядов с одной пластины на другую, причем каждая порция заряда dq перемещается при различной разности потенциалов между пластинами $\Delta\phi$, сформированной ранее перемещенным зарядом q . На перемещение зарядов затрачивается работа

$$dA = dq \cdot \Delta\phi,$$

которая согласно закону сохранения энергии и эквивалентности работы и энергии равна приращению энергии электрического поля в конденсаторе. Поэтому для однородного поля

$$W_{(E)} = \int dA = \int_0^q \Delta\varphi \cdot dq = \int_0^q \frac{q}{C} dq = \frac{q^2}{2C}. \quad (4)$$

Учитывая, что $q = CU$ и $\Delta\varphi = U = Ed$, выражение (4) можно преобразовать к виду

$$W_{(E)} = \frac{CU^2}{2}; \quad W_{(E)} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} \cdot \frac{E^2 d^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 V}{2},$$

где $V = S \cdot d$ – объем, занимаемый электрическим полем (объем конденсатора).

Плотность энергии можно определить отношениями

$$\omega_{(E)} = \frac{W_{(E)}}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2}.$$

Хотя выражение для $\omega_{(E)}$ получено для однородного поля, оно справедливо и для неоднородного поля, так как $\omega_{(E)}$ в неоднородном поле определяется для бесконечно малого объема dV , где E можно считать однородной.

Энергию неоднородного электрического поля $W_{(E)}$, заключенного в некотором объеме V , можно найти, интегрируя функцию плотности энергии $\omega_{(E)}$ по объему, что в общем виде можно представить выражением

$$W_{(E)} = \int_V \omega_{(E)} dV.$$

2.2. Вопросы для самоконтроля

1. Какие типы диэлектриков вы знаете? Какие виды поляризации вам известны? Что называется дипольным моментом молекулы? Что такое поляризуемость молекулы? Что называется диэлектрической восприимчивостью вещества? Что показывает относительная диэлектрическая проницаемость вещества? Какая связь существует между диэлектрической восприимчивостью и относительной диэлектрической проницаемостью диэлектриков?
2. Чему равна напряженность поля в диэлектрике? Почему она различна для разных диэлектриков? Что такое поляризованность диэлектрика? Чему равен поток вектора поляризованности через любую замкнутую поверхность? Чему равна плотность связанных зарядов, появившихся на гранях диэлектрика при поляризации? Что называют вектором диэлектрического смещения?

3. Сформулируйте теорему Остроградского – Гаусса для электростатического поля в диэлектрике. Поясните, какие заряды учитывает теорема Остроградского – Гаусса для электростатического поля в вакууме, а какие – для поля в диэлектрике. Какие заряды следует учитывать при расчете потока вектора поляризованности через замкнутую поверхность? На каких зарядах могут начинаться и заканчиваться линии электрического смещения, линии поляризованности?
4. Поясните, какие соотношения выполняются для нормальных составляющих векторов напряженности электрического поля и электрического смещения на границе раздела двух диэлектриков.
5. Каким образом распределяются заряды в проводнике? Назовите условия равновесия зарядов в проводнике. На чем основан метод зеркальных изображений?
6. Что называется электроемкостью уединенного проводника? Чему равна электроемкость уединенного проводящего шара? Чему равна напряженность поля вблизи поверхности проводника? Какая связь существует между поверхностной плотностью заряда проводника и электрическим смещением вблизи его поверхности? Чему равна энергия уединенного проводника?
7. Если два или несколько проводников, имеющих различные потенциалы, привести в контакт или соединить проводником, при каком условии перераспределение зарядов прекратится? Какая при этом совершается работа?
8. Что называется электроемкостью конденсатора? Чему равна электроемкость плоского конденсатора? По какой формуле вычисляют энергию конденсатора? На что расходуется энергия конденсатора при его разряде?
9. Чему равна электроемкость плоского конденсатора, если между его обкладками поместить плоскопараллельную пластинку из диэлектрика, толщина которой равна расстоянию между обкладками конденсатора, а площадь – меньше площади каждой из обкладок? Как определить электроемкость плоского конденсатора, если часть пространства между обкладками конденсатора занимает плоскопараллельная пластинка из диэлектрика, площадь которой равна площади обкладок, а толщина меньше расстояния между обкладками конденсатора? Какую работу надо совершить, чтобы дополнительно раздвинуть обкладки конденсатора на некоторое расстояние, если конденсатор отключен от источника напряжения?
10. Чему равна общая емкость параллельно соединенных конденсаторов? Как найти общую емкость при последовательном соединении конденсаторов?

2.3. Методические указания к практическим занятиям

2.3.1. Содержание практических занятий

Тема занятий	Задачи	Задачи из сборников
Движение зарядов в электрических полях. Электрический диполь	Задачи на движение заряженных частиц в электрическом поле; определение работы по перемещению зарядов в поле; нахождение дипольного момента	[1, № 11.1 – 11.3] [2, № 15.41 – 15.72; 16.1 – 16.19] [11, № 3.23 – 3.27]

2.3.2. Методическая структура практического занятия

1. *Тема:* работа сил электростатического поля по перемещению заряда; емкость; конденсаторы.

2. *Цель:* научиться рассчитывать работу электростатического поля по перемещению заряда.

3. *Контроль готовности студентов к занятию (программированный контроль с использованием тестов к данному занятию или контроль по вопросам)*

I вариант	II вариант
3.1. Сравнить работу сил поля по перемещению заряда q из точки K	
в точки B и C (A_{KB} и A_{KC})	в точки C и D (A_{KC} и A_{KD})
3.2. Двигаясь под действием сил электростатического поля, заряд увеличил свою скорость от $1 \cdot 10^7$ м/с до $3 \cdot 10^7$ м/с. Найти разность потенциалов между начальной и конечной точками перемещения, если заряд	
протон	электрон
3.3. Как изменится емкость уединенного заряженного проводника, если заряд проводника	
увеличить в 2 раза	уменьшить в 2 раза
3.4. Одинаковы ли емкости двух металлических шаров, радиусы которых равны (шары находятся в воздухе), если	
шары оба медные	один шар медный, а второй – железный
3.5. Чему равна суммарная емкость трех одинаковых конденсаторов (емкость каждого C), если они соединены	
параллельно	последовательно

3.6. Как изменится энергия заряженного плоского воздушного конденсатора, если, не отключая источник напряжения,	
увеличить расстояние между пластинами в 2 раза?	поместить между пластинами диэлектрик с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$?
3.7. Как изменится объемная плотность энергии электрического поля заряженного плоского конденсатора, если, не отключая источник напряжения,	
поместить между пластинами диэлектрик с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$?	увеличить расстояние между пластинами в 2 раза?

2.4. Примеры решения задач

Пример 1.

Находящиеся в вакууме два параллельных тонких кольца, радиусы которых $r = 5$ см, имеют общую ось. Расстояние между их центрами $d = 12$ см. На первом кольце равномерно распределен заряд $q_1 = 82$ мкКл, на втором – заряд $q_2 = 60$ мкКл. Определить работу, необходимую для перемещения заряда $q_3 = 3$ нКл из центра одного кольца в центр другого.

Решение. Заряды на кольцах не являются точечными, поэтому непосредственно нельзя использовать для вычисления потенциала формулу $W_n = k \frac{qq_0}{\varepsilon r}$. Так как работа при перемещении заряда зависит от разности потенциалов точек начала и конца перемещения (в нашем случае это центры колец). Для решения задачи вычислим потенциалы этих точек φ_{01} и φ_{02} .

Условно разделим каждое из колец на n равных частей, тогда заряд каждой части можно считать точечным:

$$q'_1 = \frac{q_1}{n} \text{ и } q'_2 = \frac{q_2}{n}.$$

Потенциал, образованный точечным зарядом q'_1 в центре первого кольца O_1 , $\varphi'_1 = k \frac{q_1}{\varepsilon r}$. Весь заряд q_1 образует в центре первого кольца потенциал φ_1 , равный алгебраической сумме потенциалов n точечных зарядов, или

$$\varphi_1 = \varphi'_1 \cdot n = k \frac{q'_1}{\varepsilon r} n = k \frac{q_1}{\varepsilon r}.$$

Рассуждая подобным образом, найдем потенциал в центре первого кольца O_1 , образованный зарядом q_2 . Так как $\ell = \sqrt{d^2 + r^2}$, то $\varphi_2 = k \frac{q_2}{\varepsilon \sqrt{d^2 + r^2}}$.

Потенциал электрического поля в центре первого кольца, образованный зарядами q_1 и q_2

$$\varphi_{01} = k \frac{q_1}{\varepsilon r} + k \frac{q_2}{\varepsilon \sqrt{d^2 + r^2}}.$$

Повторяя все рассуждения, найдем выражение для потенциала в центре второго кольца O_2 :

$$\varphi_{02} = k \frac{q_2}{\varepsilon r} + k \frac{q_1}{\varepsilon \sqrt{d^2 + r^2}}.$$

Работа, совершаемая при перемещении заряда q из точки O_1 в точку O_2

$$A = q(\varphi_{01} - \varphi_{02}) = k \frac{q}{\varepsilon} (q_1 - q_2) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{d^2 + r^2}} \right) \approx 7,3 \text{ мкДж.}$$

Пример 2.

Напряжение на пластинах конденсатора $U = 1$ кВ, расстояние между ними $d = 1$ см. Определить, при каком положении пластин и каком заряде пылинки массой $m = 10^{-12}$ кг, она будет находится в равновесии между пластинами. Как изменится положение пылинки, если сдвигать и раздвигать пластины? Как нужно изменить разность потенциалов, чтобы пылинка падала с ускорением $a = 0,5 g$; поднималась с ускорением $a = g$?

Решение. Равновесие возможно лишь при горизонтальном расположении пластин, когда верхняя пластина заряжена отрицательно, если $q > 0$. Поле однородно, поэтому $E = \text{const}$, и на пылинку вертикально вверх действует сила $\vec{F} = q\vec{E}$, равная по модулю силе тяжести mg пылинки:

$$mg = q \frac{U}{d}.$$

Если конденсатор отсоединен от источника тока, то при увеличении d в n раз во столько же раз уменьшается емкость и увеличивается разность потенциалов ($q = \text{const}$), так что $\frac{d}{U} = \text{const}$, и положение пылинки не изменится.

Если конденсатор соединен с источником тока, то $U = \text{const}$. Тогда при увеличении d напряженность уменьшается, так как с возрастанием d уменьшается емкость и заряд на пластинах. Поэтому $\vec{F} = q\vec{E}$ уменьшается, и пылинка будет двигаться вниз. Уравнение движения в проекции на ось Oy будет иметь вид $mg - qE = ma_1$. Для падения с ускорением $a_1 = 0,5 g$ приложим силу $mg - q \frac{\Delta U_1}{d} = ma_1$; откуда $\Delta U_1 = \frac{mgd}{q} \left(1 - \frac{a_1}{g} \right) = 0,5 \text{ кВ}$.

Для подъема пылинки вверх с ускорением $a_2 = g$ следует приложить силу $q \frac{\Delta U_2}{d} - mg = ma_2$; откуда $\Delta U_2 = \frac{mgd}{q} \left(1 + \frac{a_2}{g} \right) = 2$ кВ.

Пример 3.

Шару емкостью 1 мкФ сообщили заряд 30 мкКл, а шару емкостью 2 мкФ – заряд 90 мкКл. Как распределятся заряды между шарами, если их соединить проволокой? Насколько изменится заряд каждого шара и чему будет равен потенциал шаров?

Решение. Когда шары соединили проволокой, они образовали один проводник с общим потенциалом $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$ и общим зарядом $q = q_1 + q_2$. Потенциалы каждого шара можно представить в виде

$$\varphi_1 = \frac{q'_1}{c_1}; \quad \varphi_2 = \frac{q'_2}{c_2} = \frac{(q - q'_1)}{c_2}.$$

Поскольку $\varphi_1 = \varphi_2$, то $\frac{q'_1}{c_1} = \frac{q - q'_1}{c_2}$. Решив это уравнение относительно

q'_1 , получим $q'_1 = \frac{qc_1}{c_1 + c_2}$. Заряд $q'_2 = q - q'_1$. После подстановки численных

значений получим $q_1 = 40$ мкКл, $q'_2 = 80$ мкКл. Следовательно, заряд первого шара увеличится на $q'_1 - q = 10$ мкКл.

Изменение заряда второго шара равно $q'_2 - q_2 = 10$ мкКл, то есть второй шар отдал часть своего заряда первому.

Потенциал первого шара $\varphi_1 = \frac{q'_1}{c_1} = 40$ В. Так как потенциал шаров

одинаков, то $\varphi_2 = 40$ В.

Пример 4.

Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы переместить заряд q_0 из точки С в точку В в поле двух точечных зарядов q_1 и q_2 (рис. 2.7).

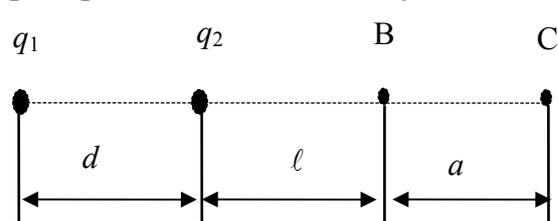


Рис. 2.7

Расстояния a , d , l известны.

Решение. Так как электрическое поле неподвижных зарядов потенциально, то работа по перемещению заряда q_0 из точки С в точку В не будет зависеть от формы траекто-

рии, по которой перемещают частицу, и равна разности энергий заряда q_0 в конечной и начальной точках пути

$$A = W_B - W_C.$$

Энергия заряда q_0 в поле двух точечных зарядов равна

$$W = q_0(\varphi_1 + \varphi_2),$$

где φ_1 и φ_2 – потенциалы электрического поля зарядов q_1 и q_2 соответственно в точке расположения заряда q_0 . Так как потенциал точечного заряда q в произвольной точке определяется как $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$, то энергия заряда q_0 в точке С

определяется как $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$, то энергия заряда q_0 в точке С

$$W_C = q_0 \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0(d + \ell + a)} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0(\ell + a)} \right),$$

где первое слагаемое соответствует потенциалу электрического поля, создаваемого зарядом q_1 , а второе – зарядом q_2 .

Аналогично для точки В

$$W_e = q_0 \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0(d + \ell)} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 \ell} \right).$$

Следовательно, искомая работа

$$A = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{d + \ell} + \frac{q_2}{\ell} - \frac{q_1}{d + \ell + a} - \frac{q_2}{\ell + a} \right) = \frac{q_0 a}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{(d + \ell)(d + \ell + a)} + \frac{q_2}{\ell(\ell + a)} \right).$$

Пример 5.

Небольшой шарик массой m , имеющий заряд q , вращается в горизонтальной плоскости на непроводящей нити длиной ℓ (рис. 2.8). Определите период обращения шарика, если в центре окружности, описываемой шариком при вращении, расположен точечный заряд q . При вращении нить образует с вертикалью угол α .

Решение. На шарик в произвольный момент движения будут действовать три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити \vec{T} и сила взаимодействия между за-

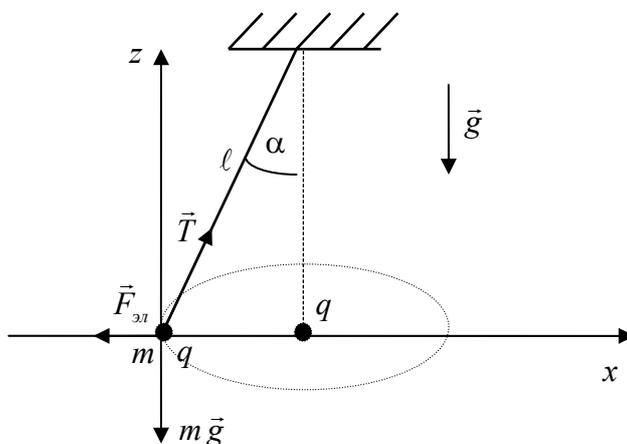


Рис. 2.8

рядами $\vec{F}_{\text{эл}}$, направленные так, как показано на рис. 2.8, причем $F_{\text{эл}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, где $r = l \sin \alpha$ – радиус окружности, описываемой шариком.

Запишем уравнение движения шарика на ось Ox , направленную по нормали к траектории тела, и ось Oz , перпендикулярную плоскости вращения.

$$Ox: \frac{mv^2}{r} = T \sin \alpha - F_{\text{эл}},$$

$$Oz: 0 = T \cos \alpha - mg.$$

С учетом выражений для радиуса окружности r и значения силы $F_{\text{эл}}$

$$\frac{mv^2}{l \sin \alpha} = mgtg\alpha - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l^2 \sin^2 \alpha};$$

отсюда находим

$$v = \sqrt{\frac{l \sin \alpha}{m} \left(mgtg\alpha - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l^2 \sin^2 \alpha} \right)}$$

Следовательно, период обращения

$$\tau = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi\sqrt{l \sin \alpha}}{\sqrt{gtg\alpha - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m l^2 \sin^2 \alpha}}}.$$

Пример 6.

Электрон со скоростью $v = 1,83 \cdot 10^6$ м/с влетел в однородное электрическое поле в направлении, противоположном вектору напряженности поля. Какую разность потенциалов U должен пройти электрон, чтобы обладать энергией $E_i = 13,6$ эВ?

Решение. Электрон должен пройти такую разность потенциалов U , чтобы приобретенная при этом энергия W в сумме с кинетической энергией W_k , которой обладал электрон перед входением в поле, составила энергию, равную энергии ионизации E_i , т.е. $W + W_k = E_i$.

Выразив в этой формуле $W = eU$ и $W_k = \frac{mv^2}{2}$, получим $eU + \frac{mv^2}{2} = E_i$.

Отсюда $U = \frac{2E_i - mv^2}{2e}$; $U = 4,15$ В.

Пример 7.

Определить начальную скорость v_0 сближения протонов, находящихся на достаточно большом расстоянии друг от друга, если минимальное расстояние r_{\min} , на которое они могут сблизиться, равно 10^{-11} см.

Решение. Между двумя протонами действуют силы отталкивания, вследствие чего движение протонов будет замедленным. Поэтому задачу можно решить как в инерциальной системе координат (связанной с центром масс двух протонов), так и в неинерциальной (связанной с одним из ускоренно движущихся протонов). Во втором случае законы Ньютона не имеют места. Поэтому удобно рассматривать задачу в инерциальной системе отсчета.

Поместим начало координат в центр масс двух протонов. Поскольку мы имеем дело с одинаковыми частицами, то центр масс будет находиться в точке, делящей пополам отрезок, соединяющий частицы. Относительно центра масс частицы будут иметь в любой момент времени одинаковые по модулю скорости. Когда частицы находятся на достаточно большом расстоянии друг от друга, скорость v_1 каждой частицы равна половине v_0 , т.е. $v_1 = \frac{v_0}{2}$.

Для решения задачи применим закон сохранения энергии, согласно которому полная механическая энергия E изолированной системы постоянна, т.е. $E = W_k + W_n$, где W_k – сумма кинетических энергий обоих протонов относительно центра масс; W_n – потенциальная энергия системы зарядов.

Выразим потенциальную энергию в начальный W_{n1} и конечный W_{n2} моменты движения.

В начальный момент, согласно условию задачи, протоны находились на большом расстоянии, поэтому потенциальной энергией можно пренебречь ($W_{n1} = 0$). Следовательно, для начального момента полная энергия будет равна кинетической энергии W_{k1} протонов, т.е.

$$E = W_{k1}. \quad (1)$$

В конечный момент, когда протоны максимально сблизятся, скорость и кинетическая энергия равны нулю, а полная энергия будет равна потенциальной энергии W_{n2} , т.е.

$$E = W_{n2}. \quad (2)$$

Приравняв правые части равенств (1) и (2), получим

$$W_{k1} = W_{n2}. \quad (3)$$

Кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий протонов

$$W_{k1} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_1^2}{2} = mv_1^2 = \frac{mv_0^2}{4}. \quad (4)$$

Потенциальная энергия системы двух зарядов q_1 и q_2 , находящихся в вакууме, определяется по формуле

$$W_n = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

где r – расстояние между зарядами.

Воспользовавшись этой формулой, получим

$$W_{n2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{\min}}. \quad (5)$$

С учетом равенств (4) и (5) формула (3) примет вид

$$\frac{m v_0^2}{4} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{\min}}.$$

Выразим из этого равенства скорость

$$v_0 = \frac{e}{\sqrt{\pi\epsilon_0 m r_{\min}}}.$$

Выполнив вычисления, получим: $v_0 = 2,35 \cdot 10^6$ м/с.

Пример 8.

Диполь с электрическим моментом $p = 2$ нКл·м находится в однородном электрическом поле напряженностью $E = 30$ кВ/м. Вектор \vec{p} составляет угол $\alpha_0 = 60^\circ$ с направлением силовых линий поля. Определить произведенную внешними силами работу A поворота диполя на угол $\beta = 30^\circ$.

Решение. Из исходного положения (рис. 2.9) диполь можно повернуть на угол $\beta = 30^\circ = \pi/6$ двумя способами:

– по часовой стрелке до угла $\alpha_1 = \alpha_0 - \beta = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ (рис. 2.10);

– против часовой стрелки до угла $\alpha_2 = \alpha_0 + \beta = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ (рис. 2.11).

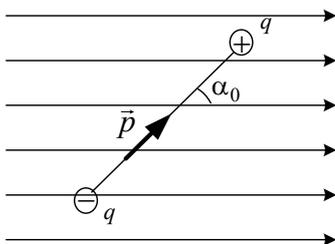


Рис. 2.9

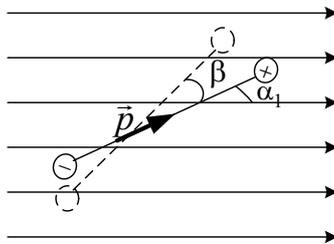


Рис. 2.10

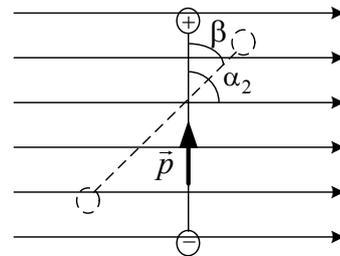


Рис. 2.11

В первом случае диполь будет поворачиваться под действием сил поля. Работа внешних сил при этом будет отрицательной. Во втором слу-

чае поворот может быть произведен только под действием внешних сил. Следовательно, работа внешних сил при этом будет положительной.

Работу, совершенную при повороте диполя, можно вычислить двумя способами: 1) непосредственно интегрированием выражения элементарной работы; 2) с помощью соотношения между работой и изменением потенциальной энергии диполя в электрическом поле.

Первый способ

Элементарная работа при повороте диполя на угол α

$$dA = Md\alpha = pE \sin \alpha d\alpha,$$

а полная работа при повороте на угол от α_0 до α

$$A = \int_{\alpha_0}^{\alpha} pE \sin \alpha d\alpha = pE \int_{\alpha_0}^{\alpha} \sin \alpha d\alpha.$$

Произведя интегрирование, получим

$$A = -pE(\cos \alpha - \cos \alpha_0) = pE(\cos \alpha_0 - \cos \alpha). \quad (1)$$

Работа внешних сил при повороте диполя по часовой стрелке

$$A_1 = pE(\cos \alpha_0 - \cos \alpha_1) = -21,9 \text{ мкДж};$$

против часовой стрелки

$$A_2 = pE(\cos \alpha_0 - \cos \alpha_2) = 30 \text{ мкДж}.$$

Второй способ

Работа A внешних сил связана с изменением потенциальной энергии ΔW_n соотношением

$$A = \Delta W_n = W_{n2} - W_{n1},$$

где W_{n1} и W_{n2} – потенциальные энергии системы соответственно в начальном и конечном состояниях.

Так как потенциальная энергия диполя в электрическом поле выражается формулой $W_n = -pE \cos \alpha$, то

$$A = pE(\cos \alpha_0 - \cos \alpha), \quad (2)$$

что совпадает с формулой (1), полученной первым способом.

Пример 9.

В атоме иода, находящемся на расстоянии $r = 1$ нм от альфа-частицы, индуцирован электрический момент $p = 1,5 \cdot 10^{-32}$ Кл·м. Определить поляризуемость α атома иода.

Решение. По определению поляризуемость может быть выражена

$$\alpha = \frac{p}{\varepsilon_0 E_{\text{лок}}}, \quad (1)$$

где p – индуцированный электрический момент атома; $E_{\text{лок}}$ – напряженность локального поля, в котором этот атом находится.

В данном случае таким полем является поле, созданное альфа-частицей. Напряженность этого поля определяется выражением

$$E_{\text{лок}} = E = \frac{2|e|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \quad (2)$$

Подставив выражение $E_{\text{лок}}$ из равенства (2) в формулу (1), найдем

$$\alpha = \frac{2\pi r^2 p}{|e|}.$$

Произведя вычисления по этой формуле, получим $\alpha = 5,9 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3$.

Пример 10.

Криптон находится под давлением $p = 10$ МПа при температуре $T = 200$ К. Определить: 1) диэлектрическую проницаемость ε криптона; 2) его поляризованность \vec{p} , если напряженность E_0 внешнего электрического поля равна 1 МВ/м. Поляризуемость α криптона равна $4,5 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3$.

Решение. 1). Для определения диэлектрической проницаемости криптона воспользуемся уравнением Клаузиуса – Моссооти, записанным в виде

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{1}{3} \alpha n,$$

где n – концентрация атомов криптона.

Выразим из этой формулы диэлектрическую проницаемость:

$$\varepsilon = \frac{1 + \frac{2}{3} \alpha n}{1 - \frac{1}{3} \alpha n}.$$

Так как концентрация молекул (атомов) связана с давлением и температурой соотношением $n = \frac{p}{kT}$, то

$$\varepsilon = \frac{3kT + 2\alpha p}{3kT - \alpha p}.$$

Выразив все величины, входящие в эту формулу, в единицах СИ ($\alpha = 4,5 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3$, $p = 10 \text{ МПа} = 10^7 \text{ Па}$, $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$, $T = 200 \text{ К}$) и произведя вычисления, получим $\varepsilon = 1,17$.

2). По определению, поляризованность

$$\vec{p} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i,$$

где \vec{p}_i – электрический дипольный момент, индуцированный в i -ом атоме; N – число атомов в объеме ΔV .

В однородном электрическом поле все \vec{p}_i совпадают по модулю и направлению, поэтому геометрическую сумму можно заменить на арифметическую. Обозначив $|\vec{p}_i| = p$, получим

$$\vec{p} = \frac{Np}{\Delta V}.$$

Отношение числа N атомов к этому объему ΔV есть концентрация n атомов. Тогда $\vec{p} = np$.

Так как электрический дипольный момент атома пропорционален напряженности $E_{\text{лок}}$ локального поля ($p = \alpha \varepsilon_0 E_{\text{лок}}$), то поляризованность $p = \alpha \varepsilon_0 n E_{\text{лок}}$.

Выразив $E_{\text{лок}}$ через напряженность E_0 внешнего поля ($E_{\text{лок}} = \frac{\varepsilon + 2}{3\varepsilon} E_0$) и n через давление и температуру T ($n = \frac{p}{kT} = 3,6 \cdot 10^{27} \text{ м}^{-3}$), получим

$$p = \alpha \varepsilon_0 \frac{\varepsilon + 2}{3\varepsilon} n E_0.$$

Подставим числовые значения и произведем вычисления (при этом воспользуемся значением $\varepsilon = 1,17$, найденным в пункте 1 данного примера):

$$p = 1,30 \cdot 10^{-6} \frac{\text{КкЛ}}{\text{м}^2} = 1,30 \frac{\text{мкКЛ}}{\text{м}^2}.$$

2.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Точечные заряды $q_1 = 1 \text{ мкКл}$ и $q_2 = 0,1 \text{ мкКл}$ находятся на расстоянии $r_1 = 10 \text{ см}$ друг от друга. Какую работу совершат силы поля, если второй заряд, отталкиваясь от первого, удалится от него на расстояние: 1) $r_2 = 10$; 2) $r_2 = \infty$?

2. Электрическое поле создано двумя одинаковыми положительными точечными зарядами q . Найти работу $A_{1,2}$ сил поля по перемещению заряда $q_1 = 10$ нКл из точки 1 с потенциалом $\varphi_1 = 300$ В в точку 2 (рис. 2.12).
3. На отрезке прямого провода равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 10^3 \frac{\text{нКл}}{\text{м}}$. Определить работу A сил поля по перемещению заряда $q = 1$ нКл из точки B в точку C (рис. 2.13).

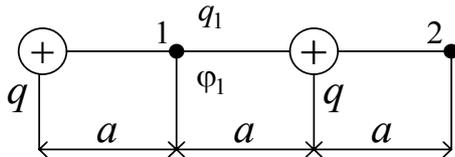


Рис. 2.12

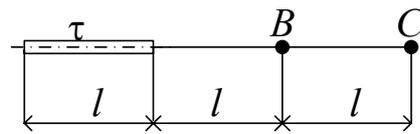


Рис. 2.13

4. Определить работу $A_{1,2}$ сил поля по перемещению заряда $q = 1$ мкКл из точки 1 в точку 2 поля, созданного заряженным проводящим шаром (рис. 2.14). Потенциал шара $\varphi = 1$ кВ.

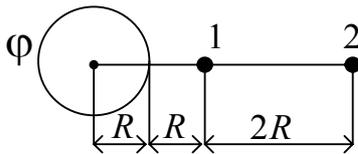


Рис. 2.14

5. Какая ускоряющая разность потенциалов U требуется для того, чтобы сообщить скорость $v = 3 \cdot 10^7$ м/с 1) электрону; 2) протону?
6. Пылинка массой $m = 10^{-12}$ г, несущая на себе пять электронов, прошла в вакууме ускоряющую разность потенциалов $U = 3$ МВ. Какова кинетическая энергия пылинки? Какую скорость приобрела пылинка?
7. Электрон движется вдоль силовой линии однородного электрического поля. В некоторой точке поля с потенциалом $\varphi_1 = 100$ В электрон имел скорость $v_1 = 6 \cdot 10^6$ м/с. Определить потенциал φ_2 точки поля, в которой скорость v_2 электрона будет равна $v_1/2$.

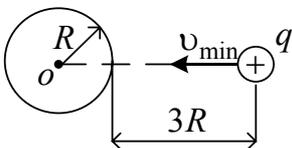


Рис. 2.15

8. Какой минимальной скоростью v_{\min} должен обладать протон, чтобы он мог достигнуть поверхности заряженного до потенциала $\varphi = 400$ В металлического шара (рис. 2.15).
9. Два электрона, находящиеся на большом расстоянии друг от друга, сближаются с относительной начальной скоростью $v = 10^7$ м/с. Определить минимальное расстояние r_{\min} , на которое они могут подойти друг к другу.
10. Расстояние l между зарядами $q = \pm 3,2$ нКл диполя равно 12 см. Найти напряженность E и потенциал φ поля, созданного диполем, в точке, удаленной на $r = 8$ см как от первого, так и от второго заряда.

11. Два диполя с электрическими моментами $p_1 = 10^{-12}$ Кл·м и $p_2 = 4 \cdot 10^{-12}$ Кл·м находятся на расстоянии $r = 2$ см друг от друга. Найти силу их взаимодействия, если оси диполей лежат на одной прямой.
12. Диполь с электрическим моментом $p = 10^{-10}$ Кл·м свободно устанавливается в однородном электрическом поле напряженностью $E = 150$ кВ/м. Вычислить работу, необходимую для того, чтобы повернуть диполь на угол $\alpha = 180^\circ$.
13. При какой поляризованности p диэлектрика ($\epsilon = 5$) напряженность $E_{\text{лок}}$ локального поля равна 10 МВ/м?
14. Диэлектрик поместили в электрическое поле напряженностью $E_0 = 20$ кВ/м. Чему равна поляризованность p диэлектрика, если напряженность E среднего макроскопического поля в диэлектрике оказалась равной 4 кВ/м?

3. УЧЕБНЫЙ БЛОК «ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В РАЗЛИЧНЫХ СРЕДАХ»

Введение

При изучении данной темы внимание уделяется основным закономерностям при прохождении электрического тока в различных средах. Изучаются законы *Ома* и *Джоуля – Ленца*, установленные для проводников. Показано, что данные законы являются следствием классической электронной теории металлов. Однако полное описание поведения электронов в металле может быть дано лишь на основе *квантовой физики*. Рассматриваются правила *Кирхгофа* и их применение к расчету электрических параметров разветвленных цепей.

При изучении данного раздела студенты должны

иметь представление:

– об основных физических величинах: заряд, сила тока, плотность тока, потенциал и работа электрического поля;

обладать навыками:

– решение систем линейных уравнений;

– применения элементов дифференциального и интегрального исчисления.

Учебная программа блока

Содержание программы	Форма подготовки	Литература
1. Постоянный электрический ток, его характеристики и условия существования	лекция	[3, § 18.1] [9, § 31]
2. Классическая электронная теория электропроводности металлов. Законы Ома и Джоуля – Ленца в дифференциальной форме	лекция, самост.	[3, § 18.2 – 18.3] [9, § 69 – 70]
3. Закон Ома для участка цепи. Сопротивление проводников. Зависимость сопротивления проводников от температуры	самост.	[3, § 19.1] [9, § 33]
4. Закон Ома для замкнутой цепи. ЭДС. Обобщенный закон Ома в интегральной форме. Разность потенциалов, электродвижущая сила, напряжение. Работа, мощность и тепловое действие тока	лекция	[3, § 19.1 – 19.2] [9, § 34 – 35, 37]
5. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа	лекция	[3, § 19.3] [9, § 36]
6. Ток в полупроводниках, газах, вакууме	лекция	[3, § 18.5; 20.3 – 20.8; 43.3 – 43.5] [9, § 72; 74 – 75; 84 – 91]

Цели обучения

студент должен знать	студент должен уметь
<ul style="list-style-type: none"> – характеристики тока и условия его существования; – законы постоянного тока; – правила Кирхгофа; – основы классической теории электропроводности металлов; – характеристики тока в газах, полупроводниках, вакууме 	<ul style="list-style-type: none"> – вычислять сопротивление проводников постоянного и переменного сечения; – вычислять сопротивление участка цепи при смешном соединении; – определять ток, напряжение на элементах цепи; – рассчитывать параметры цепи, исходя из применения правил Кирхгофа; – определять характеристики тока в газах, полупроводниках, вакууме

Методическая программа блока

Тема занятия	Тип занятия	Вид занятия	Часы
1. Электрический ток, условие непрерывности тока, электронная теория электропроводности. Электропроводность полупроводников и газов	Углубление и систематизация, получение новых знаний	лекция	2
2. Законы Ома для цепей постоянного тока в интегральной и дифференциальной формах. Эквивалентные цепи. Правила Кирхгофа для расчета электрической цепи	Получение новых знаний	лекция	2
3. Расчет электрических цепей с применением законов Ома и Джоуля – Ленца. Работа тока, мощность	Формирование навыков	практ. занятие	2
4. Расчет электрических цепей с использованием правил Кирхгофа	Формирование навыков	практ. занятие	2
5. Исследование цепей постоянного тока	Формирование навыков	лабор. работа	4

3.1. Краткое содержание теоретического материала

Электрический ток в металлах

Если в проводнике создать электрическое поле, то носители заряда придут в упорядоченное движение – электрический ток. Его принято характеризовать силой тока – скалярной величиной, которая по определению равна заряду, переносимому носителями через рассматриваемое сечение проводника в единицу времени:

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Для осуществления в среде протекания электрического тока необходимо выполнение следующих двух условий: во-первых, в среде должны

быть свободные носители заряда, во-вторых, в среде должно существовать электрическое поле.

Плотностью электрического тока называется вектор \vec{j} , совпадающий с направлением тока в рассматриваемой точке и численно равный отношению силы тока dI сквозь малый элемент поверхности, ортогональный направлению тока, к площади dS_{\perp} этого элемента

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}.$$

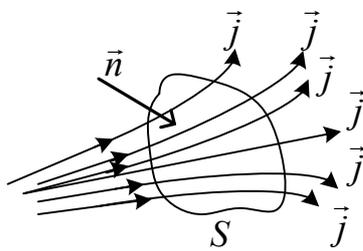
Если элемент поверхности расположен так, что нормаль \vec{n} к этому элементу составляет с вектором плотности тока угол α , то сила тока через участок сечения равна

$$dI = j dS_{\perp} = j dS \cos \alpha = \vec{j} \vec{n} dS = \vec{j} d\vec{S},$$

где $d\vec{S} = \vec{n} dS$ – вектор малого элемента площади, \vec{n} – единичный вектор нормали. Из сказанного следует, что сила тока через произвольную площадь сечения S равна потоку через эту площадь вектора плотности тока:

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S}.$$

Пусть S – некоторая замкнутая поверхность (рис. 3.1), а нормаль \vec{n} – перпендикуляр к элементу S , тогда поток вектора плотности тока сквозь эту поверхность равен электрическому току I , идущему вовне



из области, ограниченной замкнутой поверхностью S , следовательно, в согласии с законом сохранения электрического заряда изменение суммарного электрического заряда внутри рассматриваемой области равно $dq = -Idt$, т.е.

Рис. 3.1

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = -\frac{\partial q}{\partial t}. \quad (1)$$

Уравнение (1) называется уравнением неразрывности и оно означает, что разность потоков – входящего в пространство, ограниченное S , и выходящего из него – определяет изменение заряда в этом пространстве. Для постоянного тока заряд $q = \text{const}$, и $\oint_S \vec{j} d\vec{S} = 0$.

Экспериментально установленная зависимость силы тока в проводнике от разности потенциалов на его концах, получила название закона Ома для участка цепи:

$$I = \frac{U}{R}, \quad (2)$$

где R – сопротивление проводника; U – разность потенциалов на крайних точках участка. Сопротивление металлического проводника прямо пропорционально его длине l и обратно пропорционально площади S поперечного сечения

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где ρ – удельное сопротивление материала, из которого изготовлен проводник.

Сопротивление проводника переменного сечения

$$R = \int \frac{\rho}{S(l)} dl,$$

где $S(l)$ – функция площади сечения по длине проводника.

Проводники в электрических цепях могут соединяться *последовательно* и *параллельно*.

а) При *последовательном* соединении сопротивлений ток во всех проводниках сила тока одинакова: $I = I_1 = I_2 = \dots = I_N$; а напряжения на них складываются: $U = U_1 + U_2 + \dots + U_N = IR_1 + IR_2 + \dots + IR_N$; поэтому полное сопротивление равно сумме сопротивлений

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_N = \sum_{i=1}^N R_i.$$

б) При *параллельном* соединении сопротивлений: $I = I_1 + I_2 + \dots + I_N$; $U = U_1 = U_2 = \dots = U_N$. Поэтому общее сопротивление может быть найдено по формуле

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}.$$

Опыт показывает, что в первом приближении сопротивление R металлических проводников линейно возрастает с температурой t по закону

$$R = R_0(1 + \alpha t), \quad (3)$$

где R_0 – сопротивление при температуре $t = 0$ °C, α – температурный коэффициент сопротивления, близкий к величине $\frac{1}{273}$ °C для химически чистых проводников.

Закон Ома можно записать в дифференциальной форме. Напряжение на концах проводника цилиндрической формы равно $U = El$, сила тока $I = jS$, подставляя выражения в (2), получаем $jS = \frac{El}{R}$, $j = \frac{l}{RS} E = \frac{1}{\rho} E$, или

$$\vec{j} = \frac{\vec{E}}{\rho} = \gamma \vec{E}, \quad (4)$$

где $\gamma = \frac{1}{\rho}$ – удельная проводимость материала проводника. Формула (4)

выражает закон Ома в дифференциальной форме.

В замкнутой цепи наряду с участками, на которых носители заряда движутся, например, в сторону убывания потенциала, должны иметься участки, на которых перенос зарядов осуществляется в направлении возрастания потенциала. Таким образом в замкнутой цепи постоянного тока существуют участки, где заряды движутся в соответствии с силами электрического поля, так и участки, где заряды движутся против сил электростатического поля. Перенос носителей заряда возможен с помощью сил не электростатического происхождения, называемых *сторонними силами*. Сторонние силы характеризуют работой по перемещению заряда по цепи. Величина, равная отношению работы по перемещению заряда вдоль всей цепи к величине этого заряда, называется *электродвижущей силой* (ЭДС):

$$\varepsilon = \frac{A_{\text{ст}}}{q}.$$

Работа сторонних сил над зарядом на всем протяжении замкнутой цепи

$$A_{\text{ст}} = \oint_l q E_l^* dl,$$

где E_l^* – напряженность поля сторонних сил.

Разделив $A_{\text{ст}}$ на заряд, получим $\varepsilon = \oint_l E_l^* dl$. Электродвижущая сила

на участке 1 – 2 равна $\varepsilon_{12} = \int_1^2 E_l^* dl$.

Работу электростатических и сторонних сил над зарядом на участке 1 – 2 цепи выразим

$$A = \int_1^2 q E_l^* dl + \int_1^2 q E_l dl = q \varepsilon_{12} + q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Разделив A на заряд, получаем

$$U_{12} = \varepsilon_{12} + (\varphi_1 - \varphi_2),$$

где U_{12} – падение напряжения или напряжение на данном участке цепи.

Поскольку $U_{12} = IR$, где R – сопротивление данного участка цепи, получаем

$$IR = \varepsilon_{12} + (\varphi_1 - \varphi_2); \quad I = \frac{\varepsilon_{12} + (\varphi_1 - \varphi_2)}{R}$$

– закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС. Поскольку для замкнутой цепи $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, получим выражение закона Ома для замкнутой цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{R},$$

где ε – ЭДС, действующая в цепи, R – сопротивление всей цепи, включая внутренние сопротивления источников ЭДС.

Расчет разветвленных цепей значительно упрощается, если пользоваться правилами, сформулированными Кирхгофом. Первое правило относится к узлам цепи. Узлом называется точка, в которой сходится более чем два проводника (рис. 3.2, точка А). Условно ток, текущий к узлу, можно считать положительным, текущий из узла – отрицательным.

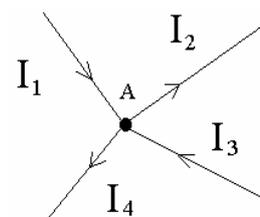


Рис. 3.2

Первое правило Кирхгофа гласит: алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю

$$\sum_{k=1}^N I_k = 0. \quad (5)$$

Справедливость этого соотношения вытекает из условия, что в узле не происходит накопление заряда. Таким образом, чтобы токи были постоянными, необходимо выполнения условия (5). Для случая, изображенного на рис. 3.2, можно записать

$$I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = 0.$$

Уравнение можно записать для N узлов цепи. Однако независимыми являются только $N - 1$ уравнение (N -е уравнение будет следствием из них).

Второе правило Кирхгофа относится к замкнутым контурам. Выделим в разветвленной цепи произвольный замкнутый контур (контур 1 – 2 – 3 – 4 – 1 на рис. 3.3). Укажем предполагаемое направление токов. Зададим направление обхода контура (например, по часовой стрелке) и применим к каждому участку закон Ома. Тогда получим четыре уравнения:

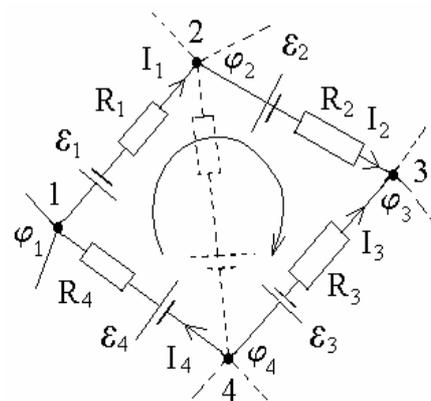


Рис. 3.3

$$I_1 R_1 = -\varepsilon_1 + (\varphi_1 - \varphi_2), \quad I_2 R_2 = -\varepsilon_2 + (\varphi_2 - \varphi_3), \quad -I_3 R_3 = \varepsilon_3 + (\varphi_3 - \varphi_4), \quad I_4 R_4 = \varepsilon_4 + (\varphi_4 - \varphi_1).$$

При составлении данных уравнений токам и ЭДС нужно приписывать знаки и в соответствии выбранным направлением обхода контура: ток нужно считать отрицательным, если он течет навстречу выбранному направлению обхода; ЭДС также нужно приписать знак «–», если она действует

в направлении, противоположном направлению обхода. При сложении этих выражений получаем уравнение

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 - I_3 R_3 + I_4 R_4 = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4.$$

Уравнения могут быть составлены для всех замкнутых контуров, которые можно выделить мысленно в данной разветвленной цепи. Они представляют собой *второе правило Кирхгофа*

$$\sum_{k=1}^m I_k R_k = \sum_{k=1}^m \varepsilon_k. \quad (6)$$

При прохождении по проводнику электрического тока проводник нагревается. Джоуль и независимо от него Ленц обнаружили экспериментально, что количество теплоты, выделяемой в проводнике, пропорционально его сопротивлению R , времени t и квадрату силы тока

$$Q = I^2 R t. \quad (7)$$

Если сила тока изменяется со временем, то количество теплоты можно найти по формуле

$$Q = \int_0^{t_0} I^2 R dt, \quad (8)$$

где I – функция тока от времени.

Соотношения (7) и (8) выражают закон *Джоуля – Ленца*.

Многочисленными опытами доказано, что носителями электрического тока в металлах являются свободные электроны. Перенеся на металлы некоторые представления и выводы классической теории газов, Лоренц и Друде разработали классическую теорию электропроводности металлов, согласно которой свободные электроны в металле представляют собой своеобразный *электронный газ*. Концентрацию свободных электронов в металле можно определить исходя из валентности атомов металла. Электронный газ считается идеальным и подчиняющимся статистикам Максвелла – Больцмана. В результате взаимодействия электронов и ионов решетки, обусловленного их столкновениями, обе системы частиц должны приобрести одну и ту же температуру T . Следовательно средняя энергия хаотического движения электронов должна равняться

$$\frac{m u^2}{2} = \frac{3kT}{2},$$

откуда средняя квадратичная скорость при комнатной температуре ($T = 300$ К) равна

$$u = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = 1,1 \cdot 10^5 \text{ м/с.}$$

Поскольку электрон пролетает расстояние, равное длине свободного пробега λ , с некоторой средней скоростью \bar{u} , то время свободного пробега τ равно

$$\tau = \frac{\lambda}{\bar{u}}.$$

Если создать внутри металла электрическое поле напряженностью \vec{E} , то свободные электроны приобретут дополнительную скорость \vec{v} в направлении, противоположном вектору \vec{E} . На рис. 3.4 показано движение положительных зарядов, эквивалентное движению электронов в противоположном направлении. Движение коллектива электронов характеризуется средней скоростью \bar{v} направленного движения. За промежуток времени dt через площадку S пройдут те заряды, которые находятся от площадки на расстоянии, не превышающем $\bar{v}dt$. Если концентрация зарядов равна n , то заряд dq , который пройдет за это время через поперечное сечение проводника в направлении электрического поля, равен

$$dq = enS\bar{v}dt.$$

Отсюда величина электрического тока, текущего в проводнике, равна

$$I = \frac{dq}{dt} = en\bar{v}S, \quad (9)$$

а плотность тока

$$\vec{j} = en\vec{v}. \quad (10)$$

Учитывая векторный характер скорости и плотности тока, последнее выражение можно переписать в виде $\vec{j} = en\vec{v}_{\text{ср}}$. На основании (9) можно оценить величину направленной (дрейфовой) скорости движения электронов. Так для медного проводника при следующих условиях: $I = 10 \text{ A}$, $S = 1 \text{ мм}^2$, $n = 8 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$, искомая скорость равна $\bar{v} = 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}$. Следовательно, даже при значительных токах средняя скорость направленного движения оказывается намного меньше тепловой скорости.

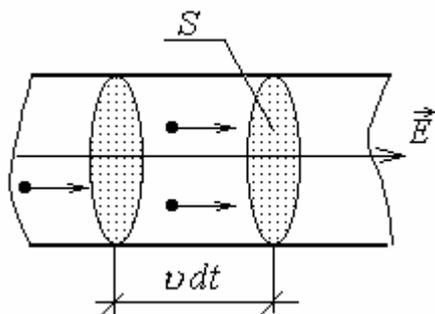


Рис. 3.4

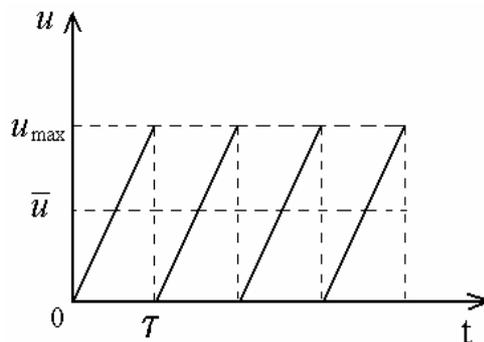


Рис. 3.5

Заряд e , помещенный в электрическое поле E , испытывает действие силы $F = eE$ и приобретает ускорение $a = \frac{eE}{m}$. Скорость направленного

движения линейно растет со временем. Однако в конце свободного пробега электрон сталкивается с ионами решетки и его скорость направленного движения падает до нуля. На графике (рис. 3.5) представлено усреднение направленной скорости от времени. За время свободного пробега частица приобретает скорость

$$v_{\max} = a\tau = \frac{eE}{m}\tau = \frac{eE\lambda}{mi}.$$

Средняя скорость оказывается равной

$$v = \frac{v_{\max}}{2} = \frac{eE\lambda}{2mi} \quad (11)$$

и пропорциональна напряженности поля $\bar{v} = \mu E$, где $\mu = \frac{e\lambda}{2mi} = \frac{e\tau}{2m}$ – подвижность носителей заряда. Подставляя (11) в (10), получим

$$j = \frac{ne^2\lambda E}{2mi},$$

или с учетом векторного характера величин

$$\vec{j} = \frac{ne^2\lambda\vec{E}}{2mi} \quad \text{или} \quad \vec{j} = en\mu\vec{E}, \quad (12)$$

получаем закон Ома в дифференциальной форме (12). Таким образом, электронная теория объясняет механизм электропроводности металлов, предсказывает основную закономерность явления – закон Ома – и дает выражение для удельной проводимости

$$\sigma = \frac{ne^2\lambda}{2mi} = en\mu.$$

Электронная теория позволяет понять механизм выделения тепла электрическим током. Электрическое поле совершает работу и ускоряет электроны. Накапливаемая ими энергия при столкновениях с ионами передается решетке, что приводит к ее нагреванию. Основываясь на этом предположении, можно вывести закон Джоуля – Ленца (6). Приращение кинетической энергии равно

$$\Delta E_{\text{кин}} = \frac{mv_{\max}^2}{2}.$$

Эта энергия, накопленная электроном при свободном пробеге, спустя время τ отдается ионам решетки. Полная энергия, выделяемая в единице объема за единицу времени равна

$$\omega = \frac{n\Delta E_{\text{кин}}}{\tau} = \frac{nu}{\lambda} \frac{m v_{\text{max}}^2}{2} = \frac{nu}{\lambda} \frac{m}{2} \left(\frac{eE\lambda}{2mu} \right)^2 = \frac{ne^2\lambda}{2mu} E^2 = \sigma E^2.$$

Соотношение $\omega = \sigma E^2$ представляет собой дифференциальную форму закона Джоуля – Ленца. Переход к интегральной форме можно осуществить, выделив участок проводника длиной l с площадью поперечного сечения S . Мощность, выделяемая в объеме $V = lS$, равна

$$P = \omega V = \sigma E^2 lS = (El)^2 \frac{S}{\rho l} = \frac{U^2}{R}.$$

Используя закон Ома для участка цепи, можно записать

$$P = I^2 R = UI.$$

Объясняя законы Ома и Джоуля – Ленца, отношение теплопроводности к электропроводности металлов, классическая электронная теория, однако, оказалась неспособной объяснить температурную зависимость сопротивления металлов (3), теплоемкость твердых тел, другие явления.

Электрический ток в полупроводниках

Полупроводниками называют вещества, обладающие особым характером электрической проводимости, у которых удельная проводимость σ сильно зависит от температуры, действующего внутри них электрического поля, наличия примесей, интенсивности облучения, внешнего давления и т.д. Собственным полупроводником называется чистый (беспримесный) полупроводник, имеющий идеально правильную кристаллическую решетку. Плотность тока при собственной (не обусловленной примесями) проводимости полупроводника складывается из плотности тока электронов и дырок

$$\vec{j} = \vec{j}_e + \vec{j}_p = en\mu_n \vec{E} + ep\mu_p \vec{E}.$$

С учетом равенства концентраций носителей заряда $n = p = n_0$, получаем закон Ома в дифференциальной форме для собственного полупроводника

$$\vec{j} = en_0 (\mu_n + \mu_p) \vec{E}. \quad (13)$$

Удельная электрическая проводимость

$$\sigma = en\mu_n + ep\mu_p,$$

подвижности электронов μ_n и дырок μ_p в общем случае различны.

Особенно характерна зависимость электропроводности собственного полупроводника от температуры:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta E}{2kT}},$$

где σ_0 – постоянная величина, ΔE – ширина запрещенной зоны полупроводника. Данная зависимость определяется, прежде всего, зависимостью концентрации носителей заряда от температуры.

Электрический ток в газах

В обычных условиях газ является плохим проводником электрического тока, поскольку состоит из нейтральных молекул и атомов, т.е. не содержит заряженных частиц – носителей тока, способных придать в упорядоченное движение под действием поля. Газ становится проводником, если часть молекул ионизировать, т.е. расщепить атомы (молекулы) на свободные электроны и положительные ионы. Для ионизации необходимо совершить *работу ионизации* A_i . Ионизация может происходить под влиянием различных внешних воздействий – сильного нагрева газа, облучения ультрафиолетовыми, рентгеновскими или гамма-лучами, бомбардировкой молекул газа быстро движущимися электронами, нейтронами и другими частицами.

Прохождение тока через газ называется *газовым разрядом*. Различают два типа газовых разрядов: *несамостоятельный* и *самостоятельный*. Явление прохождения тока через газ под влиянием какого-либо внешнего воздействия, называется *несамостоятельным электрическим разрядом*. Носителями заряда в этом случае являются образующиеся при ионизации газа частицы – электроны и ионы. Для плотности тока в разряде можно воспользоваться выражением (13). При ионизации образуются электроны и одновалентные ионы, число пар которых одинаково. Тогда

$$\vec{j} = en(\mu_+ + \mu_-)\vec{E},$$

где μ_+, μ_- – подвижности ионов и электронов соответственно.

Электрический ток в газе, сохраняющийся после прекращения действия внешнего ионизатора, называется *самостоятельным*. Основным механизмом самостоятельного разряда является *ударная ионизация* молекул газа. Характер самостоятельного разряда определяется составом газа и температурой, приложенным напряжением, формой, размерами и относительным расположением электродов. Различают следующие виды газовых разрядов: тлеющий, дуговой, искровой и коронный.

Термоэлектронная эмиссия, т.е. испускание электронов нагретыми телами, используется для получения потоков электронов, направляемых затем на те или иные объекты, подвергаемые бомбардировке электронами. Например, в рентгеновских трубках, электронных микроскопах, электронно-лучевых трубках. Поток электронов в вакууме является разновидностью электрического тока. Такой ток в вакууме можно получить, если в сосуд, откуда тщательно откачивается воздух (до давления 10^{-6} мм рт. ст.), поместить нагреваемый катод, являющийся источником «испаряющихся» электронов, и анод (двухэлектродная лампа, ламповый диод). Между катодом и анодом создается электрическое поле. Данная система обладает свойством односторонней проводимости, т.е. пропускает ток в определенном направлении. До наступления насыщения зависимость тока I через лампу от приложенной разности U потенциалов между анодом и катодом выражается формулой Богуславского – Ленгмюра

$$I = BU^{3/2}.$$

Коэффициент B зависит от формы, размеров и относительного расположения катода и анода. Плотность тока насыщения не зависит от напряжения и определяется по формуле Ричардсона

$$j_{\text{нас}} = BT^2 e^{-\frac{A}{kT}},$$

где T – температура катода, A – работа выхода электронов из катода, k – постоянная Больцмана.

3.2. Вопросы для самоконтроля

1. Что называется электрическим током?
2. Каковы условия существования тока?
3. Как выражается зависимость сопротивления проводника от его размеров и материала?
4. Как выражается зависимость сопротивления проводника от температуры?
5. Что такое плотность тока?
6. Каковы особенности параллельного и последовательного соединения проводников?
7. Что представляет собой уравнение неразрывности для тока? Поясните его физический смысл.
8. Сформулируйте закон Ома для участка цепи.
9. Запишите закон Ома в дифференциальной форме. В чем отличие данной формы записи от интегральной?

10. Как вычисляется сопротивление проводника?
11. Что такое удельное сопротивление? Проводимость?
12. Дайте определение электродвижущей силы (ЭДС). В каких единицах она измеряется?
13. Запишите закон Ома для неоднородного участка цепи (содержащего ЭДС).
14. Как определяется работа электрического тока на участке цепи?
15. Запишите формулы работы и мощности электрического тока.
16. Как вычисляется КПД источника тока?
17. Сформулируйте правило Кирхгофа для узлов? Для контура?
18. Какова природа электрического тока в металлах?
19. Что называется дрейфовой скоростью?
20. Приведите молекулярно-кинетическое объяснение закона Ома.
21. Приведите молекулярно-кинетическое объяснение закона Джоуля – Ленца.
22. Что такое длина свободного пробега?
23. Чем обусловлен ток в газах?
24. Что такое несамостоятельный и самостоятельный газовый разряды?
25. Назовите виды самостоятельного газового разряда.
26. Что называется термоэлектронной эмиссией?
27. Как зависит проводимость собственного полупроводника от температуры?

3.3. Практические занятия

Практическое занятие № 1 (2 часа)

Содержание занятия: Законы постоянного тока. Правила Кирхгофа

Рекомендации по решению задач

Тема занятия	Тип задач	Рекомендации по решению
1. Постоянный электрический ток, его характеристики и условия существования. Закон Ома для участка цепи. Сопротивление. Соединение проводников. Зависимость сопротивления проводников от температуры. Закон Ома для замкнутой цепи. Работа, мощность и тепловое действие тока	Задачи на расчет сопротивления проводника постоянного и переменного сечения. Вычисление токов и напряжений на участке смешанного соединения, а также для замкнутой цепи, содержащей ЭДС	При расчете сопротивления цепи, необходимо пронумеровать сопротивления, рассчитывать эквивалентные сопротивления отдельных участков, упрощая схему соединения
2. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа	Расчет разветвленных цепей	Составить уравнения по правилам Кирхгофа для сложных систем

Практическое занятие № 2 (2 часа)

Содержание занятия: Ток в различных средах

Рекомендации по решению задач

Тема занятия	Тип задач	Рекомендации по решению
Классическая электронная теория электропроводности металлов. Ток в полупроводниках, газах, вакууме	Определение концентрации, подвижности и проводимости веществ	В случае полупроводников электропроводность содержит две компоненты – электронную и дырочную, которые отличаются по величине. В задачах на электролиз достаточно законов Фарадея и соотношений, связывающих данные задачи с величинами, входящими в законы Фарадея. Для решения задач на токи в газах и вакууме достаточно знать основные уравнения электростатики и электродинамики и основные законы и формулы механики

3.4. Примеры решения задач

Пример 1.

Дана схема (рис. 3.6). Известны емкости C и $2C$ конденсаторов, сопротивления R и $2R$ проводников и ЭДС источника ε . Внутренним сопротивлением источника можно пренебречь ($r = 0$). Определить напряжения U_1 и U_2 на конденсаторах и заряды q_1 и q_2 этих конденсаторов.

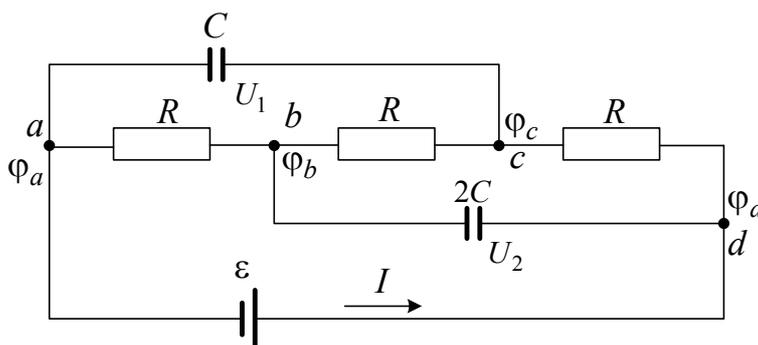


Рис. 3.6

Решение. Напряжение U_1 на конденсаторе C равно разности потенциалов $\varphi_c - \varphi_a$ между точками c и a , а напряжение U_2 на конденсаторе $2C$ равно разности потенциалов $\varphi_d - \varphi_b$ между точками d и b . Поскольку ток через конденсаторы не идет, мы имеем цепь с тремя последовательно соединенными проводниками, по которым идет одинаковый ток I . Тогда разность потенциалов $\varphi_c - \varphi_a$, как следует из закона Ома для участка цепи, равна произ-

ведению силы тока I и сопротивления участка ac , которое равно $2R + R = 3R$. Поэтому $U_1 = \varphi_c - \varphi_a = 3RI$. Аналогично находим разность потенциалов $\varphi_d - \varphi_b = U_2 = 2RI$. Таким образом, чтобы решить задачу, надо определить силу тока I . Определим ее по закону Ома для замкнутой цепи с учетом того, что внутреннее сопротивление источника $r = 0$:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{\text{общ}}} = \frac{\varepsilon}{2R + R + R} = \frac{\varepsilon}{4R}.$$

Тогда

$$U_1 = \frac{3R\varepsilon}{4R} = \frac{3}{4}\varepsilon \quad \text{и} \quad U_2 = \frac{2R\varepsilon}{4R} = \frac{\varepsilon}{2},$$

или

$$U_1 = 0,75 \varepsilon \quad \text{и} \quad U_2 = 0,5 \varepsilon.$$

Найдем заряды конденсаторов q_1 и q_2 , воспользовавшись определением емкости $C = q/U$. Отсюда

$$q_1 = CU_1 \quad \text{и} \quad q_2 = 2CU_2.$$

Пример 2.

Сила тока в проводнике сопротивлением $R = 50$ Ом равномерно растет от $I_0 = 0$ до $I_{\text{max}} = 3$ А за время $\tau = 6$ с. Определить выделившееся в проводнике за это время количество теплоты.

Решение. Согласно закону Джоуля – Ленца в случае бесконечно малого промежутка времени

$$dQ = I^2 R dt.$$

По условию задачи сила тока равномерно растет, т.е. $I = kt$, где коэффициент пропорциональности $k = \frac{I_{\text{max}} - I_0}{\tau} = \text{const}$. Тогда можно записать

$$dQ = k^2 R t^2 dt.$$

Проинтегрировав это выражение и подставив выражение для k , найдем искомое количество теплоты:

$$Q = \int_0^{\tau} k^2 R t^2 dt = \frac{1}{3} k^2 R \tau^3 = \frac{1}{3} \frac{(I_{\text{max}} - I_0)^2}{\tau^2} R \tau^3 = \frac{1}{3} (I_{\text{max}} - I_0)^2 R \tau.$$

Вычисляя, получаем $Q = 900$ Дж.

Пример 3.

Определить заряд q , прошедший по проводу с сопротивлением $R = 3$ Ом

при равномерном нарастании напряжения на концах провода от $U_0 = 2$ В до $U = 4$ В в течение $t = 20$ с.

Решение. Так как сила тока в проводе изменяется, то воспользоваться для подсчета заряда формулой $q = It$ нельзя. Поэтому возьмем дифференциал заряда $dq = Idt$ и проинтегрируем

$$q = \int_0^t Idt. \quad (1)$$

Выразив силу тока по закону Ома, получим

$$q = \int_0^t \frac{U}{R} dt. \quad (2)$$

Напряжение U в данном случае переменное. В силу равномерности нарастания оно может быть выражено формулой

$$U = U_0 + kt, \quad (3)$$

где k – коэффициент пропорциональности.

Подставив (3) в (2), найдем

$$q = \int_0^t \left(\frac{U_0}{R} + \frac{kt}{R} \right) dt = \frac{U_0}{R} \int_0^t dt + \frac{k}{R} \int_0^t t dt.$$

Проинтегрировав, получим

$$q = \frac{U_0 t}{R} + \frac{kt^2}{2R} = \frac{t}{2R} (2U_0 + kt). \quad (4)$$

Значение коэффициента пропорциональности найдем из формулы (3), если заметим, что при $t = 20$ с, $U = 4$ В:

$$k = \frac{U - U_0}{t} = 0,1 \text{ В/с}.$$

Подставив значения величин в формулу (4), найдем величину заряда $q = 20$ Кл.

Пример 4.

Определить внутреннее сопротивление источника тока, если во внешней цепи при силе тока $I_1 = 4$ А развивается мощность $P_1 = 10$ Вт, а при силе тока $I_2 = 6$ А – мощность $P_2 = 12$ Вт.

Решение. Мощности, развиваемые токами I_1 и I_2

$$P_1 = I_1^2 R_1 \quad \text{и} \quad P_2 = I_2^2 R_2, \quad (1)$$

где R_1 и R_2 – сопротивления резисторов внешней цепи.

Согласно закону Ома

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + r} \quad \text{и} \quad I_2 = \frac{\varepsilon}{R_2 + r},$$

где ε – ЭДС источника.

Решив эти два уравнения относительно r , получим

$$r = \frac{I_1 R_1 - I_2 R_2}{I_2 - I_1}. \quad (2)$$

Выразив $I_1 R_1$ и $I_2 R_2$ из уравнений (1) и подставив в выражение (2), найдем искомое внутреннее сопротивление источника тока

$$r = \frac{\frac{P_1}{I_1} - \frac{P_2}{I_2}}{I_2 - I_1}.$$

Вычисляя, получаем $r = 0,25$ Ом.

Пример 5.

Батарея состоит из пяти последовательно соединенных элементов. ЭДС каждого 1,4 В, внутреннее сопротивление каждого равно 0,3 Ом. При каком токе полезная мощность батареи равна 8 Вт? Определите наибольшую полезную мощность батареи.

Решение. Полезная мощность батареи

$$P_n = I^2 R, \quad (1)$$

где R – сопротивление внешней цепи; I – сила тока, текущего в цепи, которая определяется по закону Ома

$$I = \frac{n\varepsilon_i}{nr_i + R}, \quad (2)$$

где $n\varepsilon_i$ – ЭДС; nr_i – внутреннее сопротивление n последовательно соединенных элементов.

Выразим R из (1):

$$R = \frac{P_n}{I^2}.$$

Подставив это выражение в (2), получим

$$I = \frac{n\varepsilon_i}{nr_i + \frac{P_n}{I^2}} \quad \text{или} \quad I(nr_i + \frac{P_n}{I^2}) = n\varepsilon_i. \quad (3)$$

Преобразуя выражение (3), получаем квадратное уравнение относительно I :

$$nr_i I^2 - n\varepsilon_i I + P_n = 0.$$

Решая квадратное уравнение, находим:

$$I_{1,2} = \frac{n\varepsilon_i \pm \sqrt{n^2\varepsilon_i^2 - 4nr_i P_n}}{2nr_i}.$$

Для того, чтобы определить максимальную полезную мощность батареи, найдем зависимость ее от внешнего сопротивления. Подставим в уравнение (1) выражение (2):

$$P_n = \frac{n^2\varepsilon_i^2 R}{(nr_i + R)^2}. \quad (4)$$

Из этой формулы следует, что при постоянных величинах ε_i и r_i мощность является функцией одной переменной – внешнего сопротивления R . Известно, что эта функция имеет максимум, если $\frac{dP_n}{dR} = 0$, следовательно

$$\frac{dP_n}{dR} = \frac{n^2\varepsilon_i^2(R + nr_i) - 2n^2\varepsilon_i^2 R}{(R + nr_i)^3} = 0,$$

$$n^2\varepsilon_i^2(R + nr_i) - 2n^2\varepsilon_i^2 R = 0. \quad (5)$$

Таким образом задача сводится к определению сопротивления внешней цепи. Из уравнения (5) следует $R = nr_i$. Подставляя найденные значения R в формулу (4), имеем

$$I_1 = \frac{5 \cdot 1,4B + \sqrt{5^2 \cdot 1,4^2 B^2 - 4 \cdot 5 \cdot 0,3 \text{ Ом} \cdot 8 \text{ Вт}}}{2 \cdot 5 \cdot 0,3 \text{ Ом}} = 2,66 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{5 \cdot 1,4B - \sqrt{5^2 \cdot 1,4^2 B^2 - 4 \cdot 5 \cdot 0,3 \text{ Ом} \cdot 8 \text{ Вт}}}{2 \cdot 5 \cdot 0,3 \text{ Ом}} = 2 \text{ А};$$

$$N_{n_{\max}} = \frac{5 \cdot 1,4^2 B^2}{4 \cdot 0,3 \text{ Ом}}.$$

Пример 6.

Определить плотность j электрического тока в медном проводе (удельное сопротивление $\rho = 17 \text{ н}\cdot\text{Ом}\cdot\text{м}$), если удельная тепловая мощность тока $\omega = 1,7 \text{ Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{с})$.

Решение. Согласно законам Джоуля – Ленца и Ома в дифференциальной форме

$$\omega = \gamma E^2 = \frac{E^2}{\rho}, \quad (1)$$

$$j = \gamma E = \frac{E}{\rho}, \quad (2)$$

где γ и ρ – соответственно удельные проводимость и сопротивление проводника. Из закона (2) получим, что $E = \rho \cdot j$. Подставив это выражение в (1), найдем искомую плотность тока

$$j = \sqrt{\frac{\omega}{\rho}}.$$

Вычисляя, получаем: $j = 10 \text{ кА/м}^3$.

Пример 7.

В цепь источника постоянного тока с ЭДС $\varepsilon = 6 \text{ В}$ включен резистор с сопротивлением $R = 80 \text{ Ом}$. Определить: 1) плотность тока в соединительных проводах площадью поперечного сечения $S = 2 \text{ мм}^2$; 2) число N электронов, проходящих через сечение проводов за время $t = 1 \text{ с}$. Сопротивлением источника тока и соединительных проводов пренебречь.

Решение. 1. Плотность тока по определению есть отношение силы тока к площади поперечного сечения провода

$$j = \frac{I}{S}. \quad (1)$$

Силу тока в этой формуле выразим по закону Ома

$$I = \frac{\varepsilon}{R + R_1 + r_i},$$

где R – сопротивление резистора; R_1 – сопротивление соединительных проводов; r_i – внутреннее сопротивление источника тока.

Пренебрегая сопротивлениями R_1 и r_i , получим $I = \frac{\varepsilon}{R}$. Подставив это выражение силы тока в (1), найдем $j = \frac{\varepsilon}{RS}$. Произведя вычисления, получим

$$j = \frac{6}{80 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} \frac{\text{В}}{\text{Ом} \cdot \text{м}^2} = 3,75 \cdot 10^4 \frac{\text{А}}{\text{м}^2}.$$

2. Число электронов, проходящих за время t через поперечное сечение, найдем, разделив заряд q , протекающий за это время через сечение, на элементарный заряд: $N = \frac{q}{e}$ или с учетом того, что $q = I \cdot t$ и $I = \frac{\varepsilon}{R}$:

$$N = \frac{\varepsilon \cdot t}{e \cdot R}, \quad (e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} - \text{элементарный заряд}).$$

Произведя вычисления, получим

$$N = \frac{6 \cdot 1}{80 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{Кл} \cdot \text{Ом}} = 4,69 \cdot 10^{17} \text{ электронов}.$$

Пример 8.

Пространство между пластинами плоского конденсатора имеет объем $V = 375 \text{ см}^3$ и заполнено водородом, который частично ионизирован. Площадь пластин конденсатора $S = 250 \text{ см}^2$. При каком напряжении U между пластинами конденсатора сила тока I , протекающего через конденсатор, достигнет значения 2 мкА , если концентрация n ионов обоих знаков в газе равна $5,3 \cdot 10^7 \text{ см}^{-3}$? Принять подвижность ионов $b_+ = 5,4 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$ и

$$b_- = 7,4 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}.$$

Решение. Напряжение на пластинах конденсатора связано с напряженностью электрического поля между пластинами и расстоянием между ними соотношением

$$U = E \cdot d. \quad (1)$$

Напряженность поля может быть найдена из выражения плотности тока

$$j = qn(b_+ + b_-)E,$$

где q – заряд иона. Отсюда

$$E = \frac{j}{qn(b_+ + b_-)} = \frac{I}{qn(b_+ + b_-)S}.$$

Расстояние d между пластинами, входящее в формулу (1), найдем из соотношения $d = V/S$. Подставив выражения для E и d в (1), получим

$$U = \frac{I \cdot V}{qn((b_+ + b_-)S^2)}.$$

Вычисляя, получаем $U = 110 \text{ В}$.

Пример 9.

Источники тока с электродвижущими силами ε_1 и ε_2 включены в цепь как показано на рис. 3.7. Определить силы токов, текущих в сопротивлениях R_2 и R_3 , если $\varepsilon_1 = 10$ В и $\varepsilon_2 = 4$ В, а $R_1 = R_4 = 2$ Ом и $R_2 = R_3 = 4$ Ом. Сопротивлением источников тока пренебречь.

Решение. Силы токов в разветвленной цепи определяют с помощью законов Кирхгофа. Чтобы найти четыре значения силы токов, следует составить четыре уравнения.

Указание: перед составлением уравнений по закону Кирхгофа необходимо, во-первых, выбрать произвольно направления токов, текущих через сопротивления, указав их стрелками на чертеже; во-вторых, выбрать направление обхода контуров (последнее только для составления уравнений по второму закону Кирхгофа).

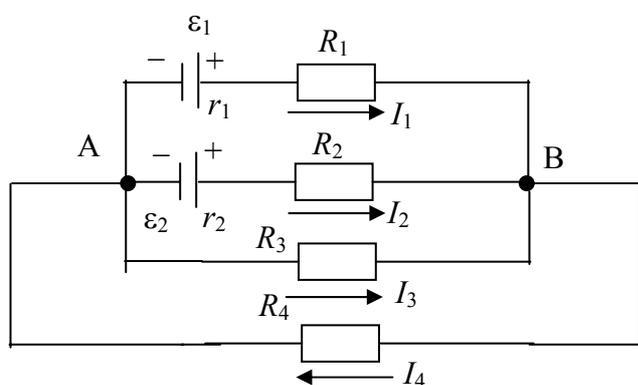


Рис. 3.7

Выберем направление токов, как они показаны на рис. 3.7, и условимся обходить контуры по часовой стрелке.

Рассматриваемая в задаче схема имеет два узла: A и B . Но составлять уравнение по первому закону Кирхгофа следует только для одного узла, так как уравнение, составленное для второго узла, будет следствием первого уравнения.

При составлении уравнений по первому закону Кирхгофа необходимо соблюдать правило знаков: ток, подходящий к узлу, входит в уравнение со знаком «плюс»; ток, отходящий от узла, – со знаком «минус».

По первому закону Кирхгофа для узла B имеем

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0. \quad (1)$$

Недостающие три уравнения получим по второму закону Кирхгофа. Число независимых уравнений, которые могут быть составлены по второму закону Кирхгофа, также меньше числа контуров (в нашем случае контуров шесть, а независимых уравнений три). Чтобы найти необходимое число независимых уравнений, следует придерживаться правила: выбирать контуры таким образом, чтобы в каждый новый контур входила хотя бы одна ветвь, не участвовавшая ни в одном из ранее использованных контуров.

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа необходимо соблюдать следующее правило знаков:

а) если ток по направлению совпадает с выбранным направлением обхода контуров, то соответствующее произведение IR входит в уравнение со знаком плюс, в противном случае произведение IR входит в уравнение со знаком минус,

б) если ЭДС повышает потенциал в направлении обхода контура, т.е. если при обходе контура приходится идти от минуса к плюсу внутри источника, то соответствующая ЭДС входит в уравнение со знаком «плюс», в противном случае – со знаком «минус».

По второму закону Кирхгофа имеем соответственно для контуров AR_1BR_2A , AR_1BR_3A , AR_3BR_4A :

$$I_1R_1 - I_2R_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad (2)$$

$$I_1R_1 - I_3R_3 = \varepsilon_1, \quad (3)$$

$$I_3R_3 + I_4R_4 = 0. \quad (4)$$

Подставив в равенства (2) – (4) значения сопротивлений и ЭДС, получим систему уравнений:

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0,$$

$$2I_1 - 4I_2 = 6,$$

$$2I_1 - 4I_3 = 10,$$

$$4I_3 + 2I_4 = 0.$$

Поскольку нужно найти только два тока, то удобно воспользоваться методом определителей (детерминантов). С этой целью перепишем уравнения в следующем виде:

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0;$$

$$2I_1 - 4I_2 + 0 + 0 = 6;$$

$$2I_1 + 0 - 4I_3 = 10;$$

$$0 + 0 + 4I_3 + 2I_4 = 0.$$

Искомые значения токов найдем из выражений

$$I_2 = \Delta_{I_2} / \Delta \quad \text{и} \quad I_3 = \Delta_{I_3} / \Delta,$$

где Δ – определитель системы уравнений; Δ_{I_2} и Δ_{I_3} – определители, полученные заменой соответствующих столбцов определителя Δ столбцами,

составленными из свободных членов четырех вышеприведенных уравнений. Находим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 96;$$

$$\Delta_{I_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_{I_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -96.$$

Отсюда получаем: $I_2 = 0$; $I_3 = -1$ А.

Знак «минус» у значения силы тока I_3 свидетельствует о том, что при произвольном выборе направления токов, указанных на рис. 3.7, направление тока I_3 было указано противоположно истинному. На самом деле ток I_3 течет от узла B к узлу A .

3.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Сила тока в проводнике равномерно нарастает от $I_0 = 0$ до $I = 3$ А в течение времени $t = 10$ с. Определить заряд q , прошедший в проводнике.
2. Определить плотность тока j в железном проводнике длиной $l = 10$ м, если провод находится под напряжением $U = 6$ В.
3. На одном конце цилиндрического медного проводника сопротивлением $R_0 = 10$ Ом (при 0° C) поддерживается температура $t_1 = 20^\circ$ C, на другом $t_2 = 400^\circ$ C. Найти сопротивление R проводника, считая градиент температуры вдоль его оси постоянным.
4. Проволочный куб составлен из проводников. Сопротивление R_1 каждого проводника, составляющего ребро куба, равно 1 Ом. Вычислить сопротивление R этого куба в трех случаях, если он включен в электрическую цепь клеммами A и B (рис. 3.8).

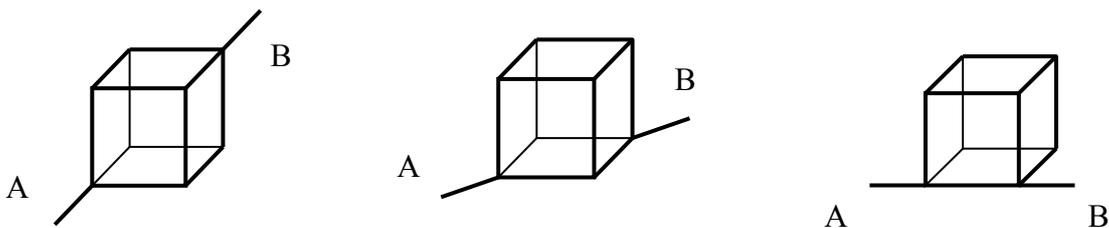


Рис. 3.8

5. Два элемента ($\varepsilon_1 = 12$ В, $r_1 = 0,1$ Ом; $\varepsilon_2 = 0,9$ В, $r_2 = 0,3$ Ом) соединены одинаковыми полюсами. Сопротивление R соединительных проводов равно $0,2$ Ом. Определить силу тока I в цепи.
6. При силе тока $I_1 = 3$ А во внешней цепи батареи аккумуляторов выделяется мощность $P_1 = 18$ Вт, при силе тока $I_2 = 1$ А – соответственно $P_2 = 10$ Вт. Определить ЭДС и внутреннее сопротивление батареи.
7. Сила тока в проводнике сопротивлением $R = 12$ Ом равномерно убывает от $I_0 = 5$ А до $I = 0$ в течение 10 секунд. Какое количество теплоты Q выделяется в этом проводнике за указанный промежуток времени?
8. ЭДС батареи аккумуляторов 12 В, сила тока короткого замыкания равна 5 А. Какую наибольшую мощность P_{\max} можно получить во внешней цепи, соединенной с такой батареей?
9. Определить среднюю скорость $\langle v \rangle$ упорядоченного движения электронов в медном проводнике при силе тока $I = 10$ А и сечении S проводника, равном 1 мм². Принять, что на каждый атом меди приходится два электрона проводимости.
10. Плотность тока j в медном проводнике равна 3 А/мм². Найти напряженность электрического поля в проводнике.
11. Энергия ионизации атома водорода $E_i = 2,18 \cdot 10^{-18}$ Дж. Определить потенциал ионизации U_i водорода.
12. Азот ионизируется рентгеновским излучением. Определить проводимость азота, если в каждом кубическом сантиметре газа находится в условиях равновесия $n_0 = 10^7$ пар ионов. Подвижность положительных ионов $b_+ = 1,27 \frac{\text{см}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$ и отрицательных $b_- = 1,81 \frac{\text{см}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$.
13. Объем газа V , заключенного между электродами ионизационной камеры, равен $0,5$ л. Газ ионизируется рентгеновским излучением. Сила тока насыщения $I_{\text{нас}} = 4$ нА. Сколько пар ионов образуется в 1 секунду в 1 см³ газа? Заряд каждого иона равен элементарному заряду.
14. Три источника тока с ЭДС $\varepsilon_1 = 11$ В, $\varepsilon_2 = 4$ В, $\varepsilon_3 = 6$ В и три реостата с сопротивлениями $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 2$ Ом соединены, как показано на рис. 3.9. Определить силы токов в реостатах. Внутреннее сопротивление источника тока пренебрежимо мало.

15. Три сопротивления $R_1 = 5 \text{ Ом}$, $R_2 = 1 \text{ Ом}$, $R_3 = 3 \text{ Ом}$, а также источник тока с ЭДС $\varepsilon_1 = 1,4 \text{ В}$ соединены, как показано на рис. 3.10. Определить ЭДС источника, который надо подключить в цепь между точками A и B , чтобы в сопротивлении R_3 шел ток силой 1 А в направлении, указанном стрелкой. Сопротивлением источника тока пренебречь.

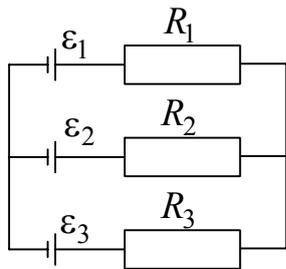


Рис. 3.9

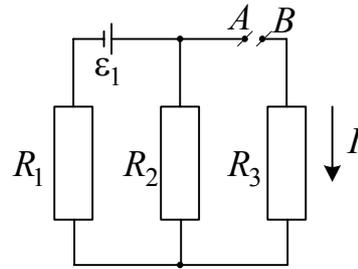


Рис. 3.10

УЧЕБНЫЙ МОДУЛЬ № 5

«ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ»

Введение

Теория, изложенная в данном модуле, называется классической электродинамикой. Ее обобщающие законы сформулировал Дж. К. Максвелл (1864 г.) в виде уравнений Максвелла путем обобщения частных законов, полученных экспериментально.

Если в инерциальной системе отсчета заряд покоится, то в ней он создает электрическое поле. Если в рассматриваемой системе заряд движется равномерно, то он одновременно с электрическим создает дополнительное (магнитное) поле, проявляющееся также силовым воздействием на движущиеся в этом поле заряды. Ускоренно движущийся заряд порождает электромагнитное поле, представляющее собой совокупность взаимосвязанных переменных электрического и магнитного полей.

Классическая теория электромагнетизма справедлива для макрообъектов, формирующих электромагнитные поля и взаимодействующих с ними. Микрообъекты (элементарные частицы вещества) создают поля, которые описываются микроскопической электродинамикой (электронная теория Лоренца) и квантовой теорией электромагнитных процессов (квантовая электродинамика).

В движущихся средах электромагнитные явления описываются уравнениями электродинамики движущихся сред.

Перечисленные выше теории представляют современное понимание явлений природы, связанных с электромагнитными полями.

Классическая электродинамика рассматривает следующие вопросы: параметры магнитного поля, формируемого проводниками с током; движущиеся заряды (не релятивистские); действие магнитного поля на проводники с током и движущиеся заряды; возникновение ЭДС индукции в проводниках, движущихся в магнитном поле; энергию магнитного поля. Данные вопросы включены в содержание настоящего модуля и скомпонованы в три учебных блока.

Учебно-методическая структура модуля

Модуль № 5. «Электромагнетизм»		
1. Учебный блок «Магнитное поле»	2. Учебный блок «Электромагнитная индукция. Магнитные свойства вещества»	3. Учебный блок «Основы теории Максвелла»
<ul style="list-style-type: none"> – магнитный момент; – вектор магнитной индукции; – поток вектора магнитной индукции; – теорема Гаусса для магнитного поля; – закон Ампера; – напряженность магнитного поля. Закон Био – Савара – Лапласа; – закон полного тока; – циркуляция вектора напряженности магнитного поля; – работа по перемещению проводника с током в магнитном поле; – сила Лоренца. Эффект Холла 	<ul style="list-style-type: none"> – ЭДС электромагнитной индукции; – потокосцепление; – самоиндукция, взаимоддукция; – индуктивность; – энергия магнитного поля. Плотность энергии; – токи при замыкании и размыкании цепи; – магнитные свойства вещества; – вектор намагничивания; – диамагнетики, парамагнетики, ферромагнетики. Магнитный гистерезис 	<ul style="list-style-type: none"> – вихревое магнитное поле; – Первое уравнение Максвелла; – ток смещения. Второе уравнение Максвелла; – Третье и Четвертое уравнения Максвелла; – полная система уравнений Максвелла для электромагнитного поля

Методическая программа модуля

Тема занятия	Тип занятия	Вид занятия	Часы
1. Магнитное поле. Вектор магнитной индукции. Поток вектора магнитной индукции. Закон Ампера. Контур с током в магнитном поле. Напряженность магнитного поля	Систематизация знаний, формирование новых знаний	лекция	2
2. Закон Био – Савара – Лапласа и применение его к расчету магнитного поля	Формирование новых знаний	лекция	1
3. Определение индукции и напряженность магнитного поля, создаваемого токами. Применение закона Био – Савара – Лапласа	Формирование и систематизация новых навыков	практ. занятие	3
4. Закон полного тока. Магнитное взаимодействие токов. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле. Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца. Ускорители заряженных частиц. Эффект Холла	Формирование новых знаний	лекция	3
5. Взаимодействие с магнитным полем проводников с током и движущихся заряженных частиц. Применение закона полного тока. Магнитное поле эквивалентных токов	Формирование и систематизация новых навыков	практ. занятие	4

Окончание табл.

6. Электромагнитная индукция. Электронная природа электромагнитной индукции. Индукционный ток. Правило Ленца. Самоиндукция. Индуктивность контура. Взаимная индукция. Энергия магнитного поля. Электромагнитные колебания	Формирование новых знаний	лекция	2
7. Токи при замыкании и размыкании цепей с индуктивностью. Магнитные свойства вещества (диамагнетизм, парамагнетизм, ферромагнетизм)	Формирование новых знаний	лекция	2
8. Определение ЭДС индукции, самоиндукции, индуктивности соленоида и параметров магнитного поля в соленоиде, объемной плотности энергии магнитного поля	Формирование и систематизация новых навыков	практ. занятие	2
9. Токи в цепях с индуктивностью. Индукционные токи. Электромагнитные колебания, волновое сопротивление LC – контура	Формирование новых навыков	практ. занятие	2
10. Основы теории Максвелла. Вихревое электрическое поле. Первое уравнение Максвелла. Электромагнитная волна. Ток смещения. Второе уравнение Максвелла. Система уравнений Максвелла	Формирование новых знаний	лекция	2

1. УЧЕБНЫЙ БЛОК «МАГНИТНОЕ ПОЛЕ»

Введение

Для успешного изучения учебного материала этого блока студент должен

иметь представление (знать)	обладать навыками:
<ul style="list-style-type: none"> – о физических характеристиках магнитного поля; – о действии магнитного поля на движущийся электрический заряд; – о действии магнитного поля на проводник с током; – о принципе суперпозиции магнитных полей; – о вращающем и магнитном моментах; – о математических действиях с векторными величинами 	<ul style="list-style-type: none"> – определения силы действия магнитного поля на проводник с током; – определения силы действия магнитного поля на движущийся электрический заряд; – определения магнитного момента; – сложения векторов

Учебная программа блока

Содержание	Форма подготовки	Литература
1. Контур с током в магнитном поле. Магнитный момент. Механический момент, действующий на контур с током в однородном магнитном поле	лекция, самост.	[4, § 29 – 39] [6, § 2.35 – 2.45] [7, § 15.1 – 15.6]
2. Магнитное поле. Вектор магнитной индукции. Линии магнитной индукции	лекция	[10, § 109 – 121] [15, § 4.1 – 5.5]
3. Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для магнитного поля	лекция	[17, § 81 – 98; 115 – 132]
4. Закон Ампера. Правило левой руки	лекция, самост.	[19, § 100 – 120]
5. Напряженность магнитного поля. Закон Био – Савара – Лапласа. Принцип суперпозиции полей	лекция	
6. Применение закона Био – Савара – Лапласа к расчету магнитного поля: проводника с током, кругового тока, движущегося заряда (эквивалентного тока)	лекция	
7. Закон полного тока. Циркуляция вектора напряженности магнитного поля	лекция	
8. Магнитное взаимодействие токов	самост.	
9. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле	самост.	
10. Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца. Определение удельного заряда частицы	лекция, самост.	
11. Ускорители заряженных частиц	самост.	
12. Эффект Холла	лекция	

Цели обучения

студент должен знать	студент должен уметь
<p>Понятия:</p> <ul style="list-style-type: none">– магнитное поле,– магнитный момент контура,– магнитная индукция, линии магнитной индукции,– циркуляция вектора магнитной индукции,– магнитный поток. <p>Законы и формулы:</p> <ul style="list-style-type: none">– Ампера,– Био – Савара – Лапласа,– закон полного тока,– силу Лоренца,– закономерности эффекта Холла,– теорему Гаусса для магнитного поля	<p>Определять:</p> <ul style="list-style-type: none">– поток вектора магнитной индукции;– механический момент, действующий на контур с током в однородном магнитном поле;– действие магнитного поля на движущийся заряд;– магнитное взаимодействие токов;– работу по перемещению проводника с током в магнитном поле;– удельный заряд частицы <p>Применять:</p> <ul style="list-style-type: none">– закон Био – Савара – Лапласа к расчету магнитного поля;– закон полного тока;– закономерности эффекта Холла;– правило левой руки;– принцип суперпозиции полей

1.1. Краткое содержание теоретического материала

Магнитное поле. Вектор магнитной индукции

В 19 веке экспериментально было установлено, что существуют тела, которые, не будучи заряженными, взаимодействуют на расстоянии. Это означало, что такие тела создают в пространстве поле, отличающееся по своей природе от гравитационного и электрического. Это поле было названо магнитным, а тела, его создающие, магнитными.

Было обнаружено, что проводники с током взаимодействуют подобно магнитным телам. Основываясь на этом и других фактах, Ампер сформулировал гипотезу, что источником магнитного поля является электрический ток, а магнетизм тел обусловлен токами в молекулах тел. Эта гипотеза получила подтверждение только почти через 100 лет, однако она была использована для изучения магнитных полей. Если проводник с током создает магнитное поле, то его силовые характеристики могут быть определены другим проводником с током, который должен быть достаточно маленьким (пробным проводником). Таким пробным элементом для изучения магнитного поля в конечном варианте оказался маленький замкнутый контур с током, который своим магнитным полем не искажает исследуемое

поле. Было установлено, что пробный контур, помещенный в магнитное поле, испытывает действие вращающего момента \vec{M} . Эксперименты показали, что для одной и той же точки магнитного поля максимальный вращающий момент \vec{M} пропорционален произведению силы тока I в контуре на его площадь S . Величину IS назвали магнитным моментом контура \vec{p}_m . Было также установлено, что пробный контур вследствие вращающего момента ориентируется в пространстве определенным образом, зависящим от направлений токов. Поэтому моменту \vec{p}_m контура приписали определенное направление: вектор \vec{p}_m совпадает с направлением нормали к плоскости контура, причем положительное направление совпадает с направлением перемещения буравчика (правого винта), вращаемого в направлении тока (рис. 1.1). Было также установлено, что отношение

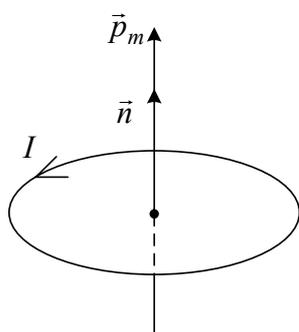


Рис. 1.1

для некоторой точки поля, создаваемого проводником с постоянным током, не зависит от величины p_m пробного контура, т.е. выполняется равенство

$$\vec{B} = \frac{\vec{M}_{\max}}{\vec{p}_m} \quad \text{или} \quad \vec{M}_{\max} = \vec{B} \cdot \vec{p}_m. \quad (1)$$

Величина \vec{B} (коэффициент пропорциональности между \vec{M} и \vec{p}_m) была названа магнитной индукцией.

Магнитная индукция (векторная величина) по физической сути является силовой характеристикой магнитного поля. Единицей ее измерения в системе СИ является тесла (Тл).

Подобно тому, как электрические поля графически отображаются с помощью линий напряженностей (силовых линий), магнитные поля могут также отображаться с помощью линий магнитной индукции (силовых линий) — линии, касательные к которым в данной точке совпадают по направлению с вектором \vec{B} в данной точке поля. Направление силовых линий магнитного поля, создаваемого проводником с током, определяется по правилу правого винта (буравчика): если буравчик ввинчивать по направлению тока, создающего магнитное поле, то направление вращения рукоятки буравчика будет совпадать с направлением линий магнитной индукции.

Из экспериментов следует, что линии магнитной индукции прямого проводника с током представляют собой концентрические окружности,

лежащие в плоскости, перпендикулярной току, и центр этих окружностей находится на оси проводника.

Линии магнитной индукции всегда замкнуты и охватывают проводники с токами. Это отличает магнитное поле от электрического. Замкнутость линий магнитной индукции говорит о том, что в магнитном поле не существует источников и стоков, или в природе не существует магнитных зарядов, на которых бы они начинались или заканчивались. Такое поле называют вихревым.

Циркуляция вектора магнитной индукции по любому замкнутому контуру не равна нулю:

$$\oint \vec{B} d\vec{r} \neq 0,$$

тогда как для потенциального поля, каким является электрическое

$$\oint E_r dr = 0.$$

Магнитное поле называют однородным, если векторы магнитной индукции во всех его точках одинаковы ($\vec{B} = \text{const}$). Примером однородного магнитного поля может служить поле внутри соленоида, т.е. катушки, длина которой много больше ее диаметра. Линии магнитной индукции однородного поля параллельны.

Плотность линий магнитной индукции, как и в случае электрического поля, может характеризовать величину (модуль) магнитной индукции \vec{B} .

Поток вектора магнитной индукции

При рассмотрении электромагнитных явлений используется, по аналогии с электрическим полем, понятие потока вектора магнитной индукции (магнитного потока). Пусть в некоторой области пространства существует магнитное поле с индукцией \vec{B} (рис. 1.2). Если в этом пространстве выделить некоторую поверхность и ее проекцию S_0 на плоскость, перпендикулярную линиям индукции \vec{B} , то, по определению потока, магнитным потоком через поверхность S (сцепленным с S) является величина Φ , которая в случае однородного поля равна

$$\Phi = B_n S = BS_0.$$

Единица магнитного потока – вебер (Вб).

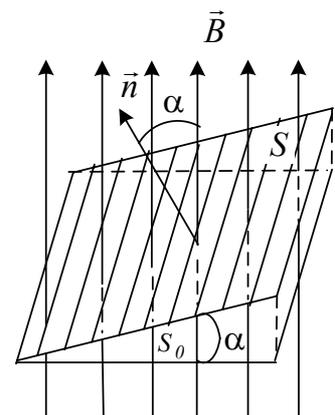


Рис. 1.2

Из рис. 1.2 видно, что $S_0 = S \cos \alpha$, поэтому

$$\Phi = BS \cos \alpha, \quad (2)$$

где α – угол между вектором \vec{B} и нормалью к поверхности S .

В случае неоднородного магнитного поля или не плоской поверхности S (произвольной формы) выражение (2) будет справедливым только для бесконечно малой площадки dS , в пределах которой поле можно считать однородным ($B_n = \text{const}$) или поверхность плоской. Поэтому в общем случае выражение (2) преобразуется к виду

$$d\Phi = B_n dS,$$

а полный поток через поверхность

$$\Phi = \int B_n dS, \quad (3)$$

где B_n – индукция, нормальная к dS , и в общем случае она является функцией от S .

Если поверхность в области магнитного поля взять замкнутой, то, вследствие вихревого характера магнитного поля (линии \vec{B} замкнуты), выполняется условие

$$\Phi = \oint B_n dS = 0, \quad (4)$$

так как сколько силовых линий \vec{B} будет входить внутрь объема, ограниченного замкнутой поверхностью, столько и будет выходить из него. В этом суть теоремы Гаусса для магнитного поля: поток вектора магнитной индукции через замкнутую поверхность равен нулю. Физическая сущность теоремы заключается в следующем: хотя намагниченные тела имеют (условно) положительный и отрицательный («северный» и «южный») полюса, каждый из полюсов отдельно существовать не может и, как бы не дробилось намагниченное тело, «магнитные полюса» всегда существуют парами.

Закон Ампера

Ампером было установлено, что на проводник с током в однородном магнитном поле, индукция которого \vec{B} , действует сила

$$F = BIl \sin \alpha, \quad (5)$$

где I – сила тока, l – длина проводника, α – угол между направлениями тока и вектора индукции магнитного поля.

Эта формула справедлива для прямолинейного проводника и однородного поля.

Если проводник имеет произвольную форму и поле неоднородно, то выражение (5) принимает вид

$$dF = IBdl \sin(d\vec{l}, \vec{B}), \quad (6)$$

или в векторной форме

$$d\vec{F} = I [d\vec{l}, \vec{B}],$$

где $d\vec{l}$ – малый участок проводника, имеющий направление, совпадающее с направлением тока.

Сила Ампера направлена перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы \vec{B} и $d\vec{l}$ (рис. 1.3). Для определения направления силы применяется правило левой руки: если левую руку расположить так, чтобы линии магнитной индукции входили в ладонь, а вытянутые четыре пальца совпадали с направлением тока в проводнике, то отогнутый палец указывает направление силы. Зная направление и модуль силы, действующей на любой участок dl_i проводника, можно определить силу, действующую на весь проводник. Для этого определяется векторная сумма сил dF , действующих на все участки проводника:

$$\vec{F} = \int_0^l dF.$$

При этом часто удобно использовать разложение dF на компоненты по координатам x, y, z .

Закон Ампера в учении о магнетизме играет такую же роль, как и закон Кулона в электростатике.

Контур с током в магнитном поле

Пусть рамка с током, имеющая стороны a и l , помещена в пространство с магнитным полем (рис. 1.4). На каждую сторону контура действует сила Ампера, на горизонтальные стороны l контура действуют

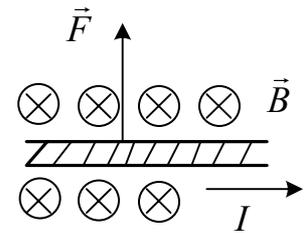


Рис. 1.3

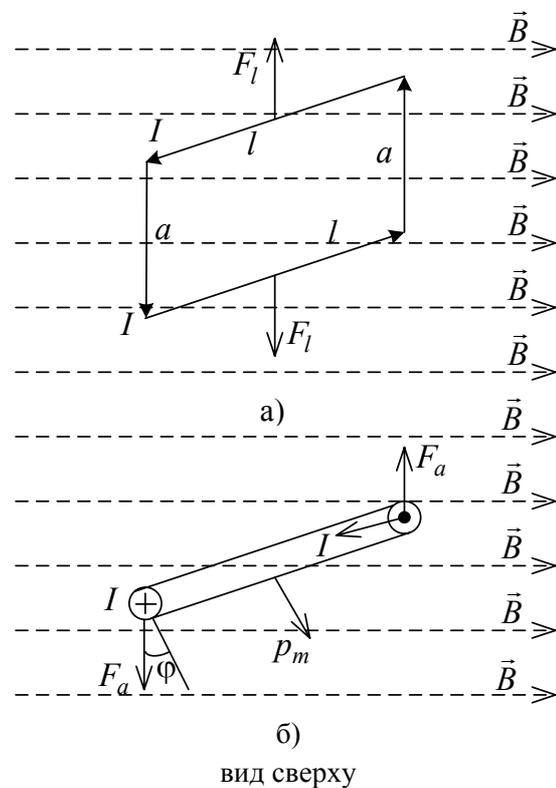


Рис. 1.4

силы F_l , которые взаимно скомпенсированы. На каждую из вертикальных сторон a действует сила $F_a = Iba$. Эти силы создают пару сил, вращающий момент которых равен

$$M = Fl \cos \varphi, \quad (7)$$

где φ – угол между вектором \vec{B} и плоскостью контура.

Момент сил стремится повернуть контур так, чтобы поток Φ , пронизывающий контур, был максимальным. Подставляя в (7) выражение для силы, имеем

$$M = IBal \cos \varphi$$

или

$$M = B \cdot p_m \sin \alpha, \quad (8)$$

где $a \cdot l = S$; $IS = p_m$; $\cos \varphi = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \varphi$.

В векторной форме соотношение (8) имеет вид

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}].$$

Напряженность магнитного поля. Закон Био – Савара – Лапласа

Опыт показал, что если магнитное поле создается в различных средах, то магнитная индукция зависит от вещества, в котором возбуждается магнитное поле.

Величина, показывающая, во сколько раз магнитная индукция в данной среде больше или меньше, чем в вакууме (воздухе), называется относительной магнитной проницаемостью среды:

$$\mu = \frac{B}{B_0}.$$

Относительная магнитная проницаемость – безразмерная величина.

Величина, характеризующая магнитное поле и не зависящая от среды, в которой оно возбуждается, получила название напряженности магнитного поля \vec{H} . Для вакуума (воздуха) физические величины B_0 и H связаны между собой равенством:

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H},$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$ – магнитная постоянная вещества.

Единица напряженности магнитного поля – ампер на метр (А/м).

Индукция магнитного поля в среде с магнитной проницаемостью μ равна

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}. \quad (9)$$

Векторы \vec{B} и \vec{H} совпадают по направлению.

Обобщая экспериментальные данные французских физиков Био и Савара, Лаплас (французский математик) предложил формулу, по которой можно определить напряженность магнитного поля, создаваемого элементом тока в любой точке C , расположенной от этого элемента на расстоянии r (рис. 1.5).

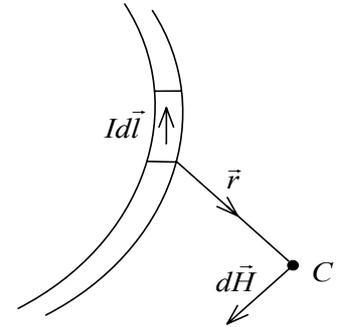


Рис. 1.5

В векторной форме закон Био – Савара – Лапласа записывается в виде

$$d\vec{H} = \frac{I[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}. \quad (10)$$

Векторное произведение $[d\vec{l} \times \vec{r}]$ показывает, что вектор $d\vec{H}$ перпендикулярен плоскости, образуемой векторами $d\vec{l}$ и \vec{r} . Чтобы найти напряженность поля, создаваемого всем проводником, применяется принцип суперпозиции полей или векторного сложения $d\vec{H}$ от каждого элемента тока

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^n \vec{H}_i, \quad (11)$$

где n – общее число участков, на которые разделен проводник с током.

Применение закона Био – Савара – Лапласа к расчету магнитного поля

Определим напряженность поля, создаваемого прямолинейным бесконечным проводником с током в точке C , находящейся на кратчайшем расстоянии R от проводника. Выделим на проводнике с током I элемент тока (рис. 1.6) и проведем радиус – вектор \vec{r} в точку C . Для определения напряженности поля используем закон Био – Савара – Лапласа в скалярной форме (рис. 1.6). Для элемента dl закон Био – Савара – Лапласа имеет вид (в системе СИ)

$$dH = \frac{Idl \sin \alpha}{4\pi r^2}. \quad (12)$$

Из рис. 1.6 следует, что

$$r = \frac{R}{\sin \alpha}; \quad dl = \frac{dS}{\sin \alpha} = \frac{rd\alpha}{\sin \alpha}.$$

Подставляя эти выражения в (12), получаем

$$dH = \frac{IRd\alpha \sin \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{4\pi R^2 \sin^2 \alpha} = \frac{I}{4\pi R} \sin \alpha \cdot d\alpha, \quad (13)$$

где dH – вклад элемента dl в полную напряженность магнитного поля провода с током.

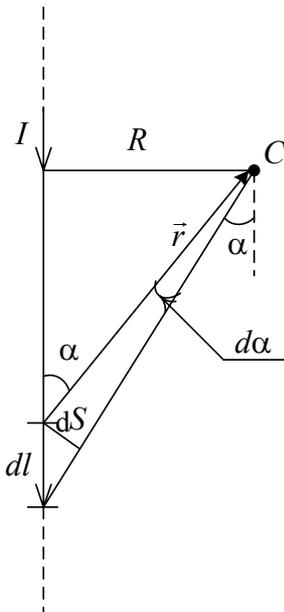


Рис. 1.6

Чтобы найти H , надо просуммировать все dH , т.е. проинтегрировать функцию (13) по углу α . Пределы интегрирования определяем из следующих соображений. Если dl взять внизу (рис. 1.6) в бесконечности, то угол α равен π (угол между направлениями $d\vec{l}$ и \vec{r}). Перемещая dl по проводнику вверх в бесконечность, получим $\alpha = 0$. Таким образом

$$H = \int_{\pi}^0 dH = \frac{I}{4\pi R} \int_{\pi}^0 \sin \alpha \cdot d\alpha = \frac{I}{4\pi R} \cos \alpha \Big|_{\pi}^0 = \frac{I}{2\pi R}. \quad (14)$$

Направление \vec{H} определяется правилом векторного произведения $d\vec{l}$ (или I) и \vec{r} , которое в более простой форме для применения называется «правилом правого винта». Для нашего случая (рис. 1.6): если буравчик ввинчивать по направлению тока, то \vec{H} направлен туда, куда будет двигаться точка C , как бы лежащая на воображаемой рукоятке буравчика (R), т.е. перпендикулярно листу и вверх (к нам). Очевидно, что для любого элемента прямого провода dl в точке C вектор напряженности \vec{H} будет иметь одно и тоже направление. Поэтому суммирование dH (интегрирование, примененное для получения (14)), справедливо.

Для проводников с током I конечной длины выражение (14) запишется

$$H = \frac{I}{4\pi R} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1), \quad (15)$$

где α_1 – угол между направлением векторов $d\vec{l}$ (или I) и \vec{r} на конце проводника, от которого начинается суммирование dH ; α_2 – угол между векторами $d\vec{l}$ (или I) и \vec{r} на конце проводника, на котором заканчивается суммирование dH .

Магнитное поле кругового тока

Пусть ток протекает по окружности (кольцевому проводнику) (рис. 1.7). В этом случае все элементы dl проводника перпендикулярны радиус – вектору \vec{r} ,

$\sin\alpha = 1$ и $\vec{r} = R$, где R – радиус кольца. Поэтому напряженность поля в центре кругового проводника

$$dH = \frac{Idl}{4\pi R^2}.$$

Так как все элементы тока создают поле, напряженность которого направлена одинаково, то напряженность поля в центре кругового проводника:

$$H = \frac{I}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{I}{4\pi R^2} \cdot 2\pi R = \frac{I}{2R}. \quad (16)$$

Для проводников, не образующих замкнутое кольцо, но имеющих определенный радиус кривизны, выражение (16) преобразуется к виду

$$H = \frac{I}{2R} \cdot f,$$

где f – доля, которую составляет длина проводника от всей длины окружности с радиусом кривизны проводника.

Магнитное поле движущегося заряда

Напряженность магнитного поля движущегося заряда также можно определить, используя закон Био – Савара – Лапласа. Для этого ток в выражении (12) необходимо выразить через заряд. Силу тока можно оценить через плотность тока j и площадь S поперечного сечения проводника ($I = jS$), а плотность тока j – через концентрацию n заряженных частиц и скорость их направленного движения ($j = nq\upsilon$, где q – заряд частицы). Таким образом

$$Idl = jSdl = nq\upsilon Sdl = nqdV\upsilon = Nq\upsilon,$$

где dV – объем элемента проводника dl , N – полное число частиц в отрезке dl проводника.

Согласно (12)

$$dH = \frac{Nq\upsilon \sin\alpha}{4\pi r^2},$$

а напряженность поля, создаваемого одной заряженной частицей в момент времени, соответствующий расстоянию r между зарядом и точкой C (см. рис. 1.6) в скалярной форме

$$H = \frac{q\upsilon \sin\alpha}{4\pi r^2}. \quad (17)$$

В векторной форме (17) запишется в виде

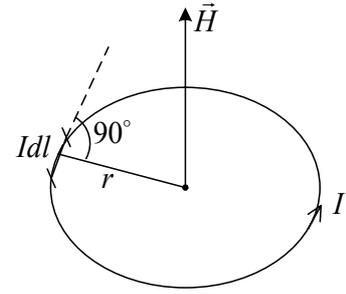


Рис. 1.7

$$\vec{H} = \frac{q[\vec{v} \times \vec{r}]}{4\pi r^2}. \quad (18)$$

Формула (18) определяет \vec{H} для положительного заряда, движущегося со скоростью \vec{v} . Для отрицательного заряда направление изменяется на противоположное.

Закон полного тока

Циркуляцией вектора напряженности \vec{H} по произвольно выбранному замкнутому контуру называется интеграл

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \oint H_l dl, \quad (19)$$

где H_l – проекция вектора напряженности \vec{H} в некоторой точке контура циркуляции на элемент dl ; $d\vec{l}$ – вектор элемента длины выбранного контура циркуляции, направленный в направлении обхода контура.

$$H_l = H \cos \alpha,$$

где α – угол между векторами \vec{H} и $d\vec{l}$.

В электрическом поле (потенциальном) циркуляция вектора \vec{E} вдоль замкнутого контура равна нулю (признак потенциального характера электрического поля):

$$\int_L \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Если в магнитном поле контур циркуляции выбрать вдоль силовой линии B , то, учитывая вихревой характер поля, можно утверждать, что $\oint H_l dl \neq 0$. Например, силовые линии бесконечно длинного прямолинейного проводника представляют собой концентрические окружности, охватывающие проводник. В каждой точке этого контура вектор \vec{H} одинаков по модулю. Следовательно, циркуляция вектора \vec{H} по данному контуру равна

$$\oint H dl = \oint \frac{I}{2\pi r_0} dl = \frac{I}{2\pi r_0} \int_0^{2\pi r_0} dl = I, \quad (20)$$

где r_0 – радиус выбранной силовой линии, т.е. окружности, в каждой точке которой $H = \frac{I}{2\pi r_0}$.

Соотношение (20) справедливо для любого произвольно выбранного контура циркуляции и является частным случаем закона полного тока, который в общем случае записывается в виде

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum_{i=1}^n I_i, \quad (21)$$

где правая часть равенства – алгебраическая сумма токов, охватываемых контуром циркуляции.

Положительным считается ток, направление которого совпадает с обходом контура, проводимым по правилу правого винта. Ток противоположного направления считается отрицательным.

Выражение (21) справедливо для бесконечно длинных проводников с током. Это ограничение снимается более строгой формулировкой закона полного тока, который может быть применен и к проводникам конечной длины. Прежде чем привести эту формулировку, следует отметить, что проводник, который создает напряженность магнитного поля в некоторой точке C , всегда является элементом замкнутой цепи. Поэтому определяя \vec{H} в точке C , мы должны учитывать все элементы этой цепи. Это может быть достигнуто, если закон полного тока сформулировать следующим образом: циркуляция вектора \vec{H} по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, пересекающих любую поверхность, опирающуюся на этот контур. При этой формулировке приходится учитывать и проводники, подводящие и отводящие заряды от некоторого элемента (ограниченной длины) цепи с током, вклад которого в формирование \vec{H} в точке C мы пытаемся определить.

Магнитное взаимодействие токов

Используя закон Био – Савара – Лапласа и закон полного тока (закон Ампера), рассмотрим взаимодействие параллельных проводников с током (рис. 1.8). Предположим, что в изотропной среде (относительная магнитная проницаемость μ) на расстоянии d друг от друга расположены два проводника: один бесконечный, другой конечной длины l . Пусть по одному из них течет ток I_1 , по второму – I_2 в одном направлении. Выделим на проводнике 2 элемент dl_2 . На этот элемент будет

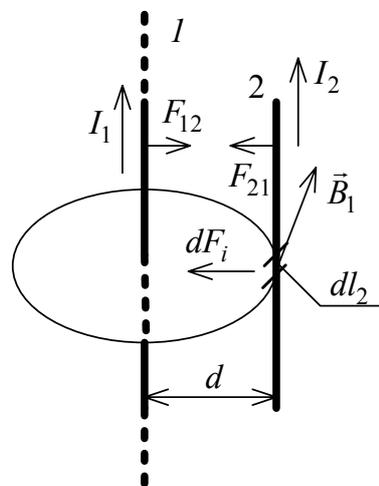


Рис. 1.8

действовать сила Ампера $dF_i = B_1 I_2 dl_2 \sin \alpha$ ($B_1 = \mu \mu_0 \frac{I_1}{2\pi d}$ – индукция магнитного поля, создаваемого первым проводником в месте нахождения второго проводника).

Вектор \vec{B} направлен перпендикулярно току I , поэтому $\sin \alpha = 1$. Учитывая это, находим

$$dF_i = \frac{\mu \mu_0 I_1}{2\pi d} I_2 dl_{2i}.$$

Применяя правило левой руки, определяем направление этой силы. Чтобы определить силу F_{21} , т.е. силу, действующую со стороны проводника 1 на проводник 2, нужно просуммировать все элементарные силы dF_i :

$$F_{21} = \int_0^l dF_i = \frac{\mu \mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \int_0^l dl_{2i} = \frac{\mu \mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d}. \quad (22)$$

Сила, с которой проводник 1 действует на проводник 2, согласно третьему закону Ньютона, численно равна силе, с которой проводник 2 действует на проводник 1.

Если по проводникам текут токи в одинаковых направлениях, то проводники притягиваются, а если в противоположных – отталкиваются.

Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

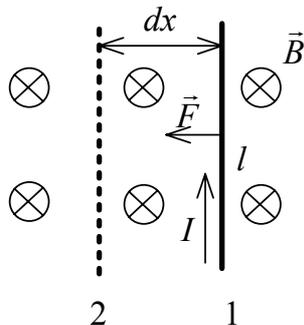


Рис. 1.9

Пусть элемент проводника с током I и длиной l помещен в пространство, где существует магнитное поле с индукцией B (рис. 1.9). Действующая на проводник сила Ампера $F = IBl$ направлена влево. Под действием этой силы проводник l за некоторое время переместится на расстояние dx . Элементарная работа перемещения равна произведению

$$dA = F dx \text{ или } dA = B I l dx = B I dS = I d\Phi. \quad (23)$$

Работа, совершаемая при перемещении проводника с током в магнитном поле, равна произведению силы тока на магнитный поток сквозь поверхность, описываемую проводником при его движении.

В более общем случае, когда I есть функция времени или \vec{B} в пространстве движения проводника изменяется, работа перемещения определяется интегрированием (23), в которой B или (l) I записываются в виде соответствующих функций. Например, пусть по длинному проводнику M и

параллельному ему отрезку проводника K длиной l текут противоположно направленные токи I_1 и I_2 . Проводник K закреплен на расстоянии r_1 от проводника M (на рис. 1.10 показано сечение проводников). После освобождения проводника K , он перемещается вдоль r . Индукция \vec{B} поля прямого длинного проводника изменяется по формуле

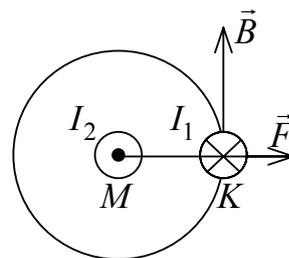


Рис. 1.10

$$B = \mu\mu_0 \frac{I_2}{2\pi r},$$

т.е. убывает обратно пропорционально расстоянию r .

На подвижный проводник K действует сила

$$F_{(r)} = \mu\mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi r} l.$$

Поэтому элементарная работа переменной силы на пути dr равна

$$dA = F_{(r)} dr.$$

Работа перемещения проводника K от r_1 до r_2

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F_{(r)} dr \text{ или } A = \int_{r_1}^{r_2} \mu\mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi} l \frac{dr}{r} = \mu\mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi} \cdot l \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца

Силу действия магнитного поля на движущийся заряд можно найти исходя из закона Ампера. Пусть по проводнику длиной dl за промежуток времени dt проходит n элементарных зарядов величиной q , т.е. через проводник протекает ток, сила которого $I = \frac{nq}{dt}$.

Согласно закону Ампера, на nq зарядов будет действовать сила

$$dF = B I dl \sin \alpha = B \frac{nq}{dt} dl \sin \alpha.$$

Сила, с которой поле действует на каждый заряд, равна

$$F_{Л} = \frac{dF}{n} = Bq \frac{dl}{dt} \sin \alpha,$$

где $\frac{dl}{dt} = v$ – скорость движения заряда; α – угол между вектором скорости \vec{v} и вектором магнитной индукции \vec{B} .

Сила Лоренца, действующая со стороны магнитного поля на движущийся заряд, равна (в скалярной и векторной формах)

$$\begin{aligned} F_L &= qvB \sin \alpha \\ \vec{F}_L &= q[\vec{v} \times \vec{B}] \end{aligned} \quad (23)$$

Сила Лоренца, действующая на положительный заряд, перпендикулярна векторам \vec{v} и \vec{B} . Ее направление определяется согласно *правилу левой руки*: если пальцы направить вдоль вектора скорости заряда, а вектор \vec{B} входит в ладонь, большой палец показывает направление силы. С изменением знака заряда направление силы изменяется на противоположное.

Из (23) можно сделать выводы:

– если скорость заряда равна нулю ($v = 0$), то $F_L = 0$, т.е. магнитное поле не действует на неподвижную заряженную частицу;

– если $\alpha = 0$, $\sin \alpha = 0$, то $F_L = 0$, т.е. если частица движется так, что вектор скорости \vec{v} частицы параллелен вектору магнитной индукции \vec{B} , то магнитное поле на движение заряда не действует.

Так как сила Лоренца всегда направлена перпендикулярно вектору скорости частицы, то она не изменяет величину скорости, а изменяет лишь направление движения частицы, т.е. по физической сути является центростремительной силой. Действие этой силы не приводит к изменению энергии заряженной частицы, т.е. эта сила не совершает работы.

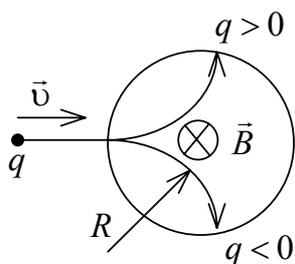


Рис. 1.11

центростремительной силы

$$\frac{mv^2}{R} = qvB,$$

откуда

$$R = \frac{mv}{qB}. \quad (24)$$

Если частица движется под углом β к линиям \vec{B} , то траекторией ее движения будет винтовая линия (спираль) (рис. 1.12). Шаг h спирали опре-

деляется тангенциальной составляющей v_t скорости v частицы. Радиус спирали зависит от нормальной составляющей v_n скорости v .

Если заряд движется в области, где одновременно действуют электрическое и магнитное поля, то результирующая сила, действующая на частицу, равна

$$\vec{F} = q\vec{v}\vec{B}\sin\alpha + q\vec{E},$$

т.е. сила имеет две составляющие: от воздействия магнитного и электрического полей. Между этими составляющими имеется принципиальная разница. Электрическое поле изменяет величину скорости и кинетическую энергию частицы, а однородное магнитное поле изменяет только направление движения.

Совместное действие на заряженные частицы электрического и магнитного полей используется для определения удельного заряда q/m частицы в приборах, называемых масс-спектрометрами. Измерение q/m для ионов является важнейшим и наиболее точным методом определения атомных масс и широко применяется в современной физике.

Эффект Холла

Американский ученый Э. Холл в 1880 году обнаружил, что в проводнике, помещенном в магнитное поле, при определенных условиях возникает разность потенциалов между его противоположными поверхностями, параллельными направлению вектора магнитной индукции \vec{B} и тока I . опыты показали, что разность потенциалов U определяется равенством

$$U = kdjB, \tag{25}$$

где k – постоянная Холла, зависящая от рода вещества; j – плотность тока в проводнике.

Этот эффект объясняется следующим образом. В направлении вектора \vec{j} свободные электроны проводника движутся со скоростью v , и на них действует сила Лоренца, равная $\vec{F}_L = e[\vec{B} \times \vec{v}]$. В результате все электроны смещаются вверх к плоскости S_1 , соз-

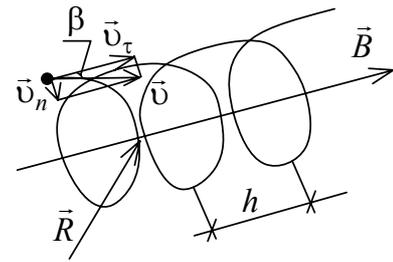


Рис. 1.12

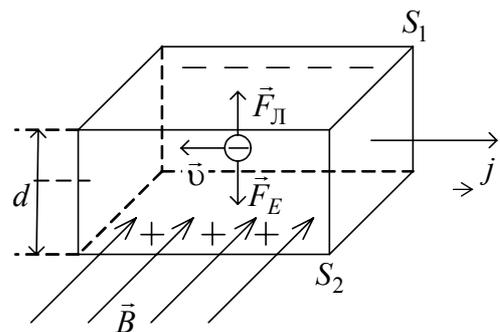


Рис. 1.13

давая на ней избыточный отрицательный заряд и потенциал (рис. 1.13). На нижней плоскости остается нескомпенсированный положительный заряд атомов кристаллической решетки, и потенциал S_2 становится положительным. Электрическое поле E , возникающее в проводнике, действует на электроны с силой F_E . Условие $|F_{(E)}| = |F_{(Л)}|$ обеспечивает постоянство разности потенциалов U , равной $U = Ed$. С учетом равновесия сил $F_{Л}$ и F_E можно записать: $U = \upsilon Bd$. Скорость электронов υ можно выразить через плотность тока j . Так как $j = ne\upsilon$, получим

$$U = \frac{1}{ne} jBd.$$

Сравнивая это выражение с (25), получаем

$$k = \frac{1}{ne}.$$

Таким образом постоянная Холла зависит от концентрации электронов в проводнике. Следовательно, через постоянную Холла можно определить концентрацию электронов проводимости в проводнике.

1.2. Вопросы для самоконтроля

1. Чему равен и как направлен магнитный момент рамки с током?
2. Что называют индукцией магнитного поля? Как определяют направление вектора магнитной индукции \vec{B} ?
3. Нарисуйте и покажите, как ориентированы линии магнитной индукции поля прямого тока.
4. Что такое линии магнитной индукции? Как определяется их направление? Чем они отличаются от линий напряженности электростатического поля?
5. Почему магнитное поле является вихревым?
6. Как вычислить силу взаимодействия между протяженными проводниками с током?
7. Как взаимодействуют между собой тонкие прямолинейные параллельные проводники с током?
8. Сформулируйте закон Био – Савара – Лапласа.
9. Как вычислить вектор магнитной индукции магнитных полей линейных токов?
10. Вычислите магнитную индукцию поля бесконечно прямого проводника с током.

11. Вычислите магнитную индукцию поля на оси квадратного контура с током.
12. Когда целесообразно использовать закон полного тока для определения индукции магнитного поля?
13. Что такое поток вектора магнитной индукции?
14. Получите и поясните формулу для силы Лоренца.
15. Опишите движение заряженной частицы в магнитном поле.
16. Когда заряженная частица движется в магнитном поле по спирали? От чего зависит шаг спирали? (Ответы подтвердите выводами формул).
17. Опишите поведение рамки с током в магнитном поле.
18. Как определяется работа, совершаемая силой Ампера при перемещении замкнутого контура в магнитном поле?
19. Поясните, как рассчитать индукцию магнитного поля, создаваемого в некоторой точке проводником произвольной формы.
20. В чем заключается эффект Холла? Выведите формулу для холловской разности потенциалов.

1.3. Методические указания к практическим занятиям

1.3.1. Перечень типовых задач

1. Определение индукции магнитного поля, создаваемого проводником с током произвольной формы, в любой точке пространства.
2. Движение зарядов в магнитном поле.
3. Взаимодействие проводников с током с магнитным полем.
4. Определение магнитного поля распределенных токов.

1.3.2. Методические рекомендации

1. При решении задач первого типа рекомендуется на одной или двух задачах довести закон Био – Савара – Лапласа до «инженерной» формулы; научиться применять правило буравчика и принцип суперпозиции полей от элементов проводника; обосновать равенство нулю индукции магнитного поля в точке, лежащей на проводнике.

«Инженерный» вариант закона Био – Савара – Лапласа закрепить применением его при решении 1-й и 2-й задач.

Особое внимание следует уделить определению магнитного поля, создаваемого «эквивалентными токами» движущихся зарядов при движении заряженных тел на примере задач с движением тел с распределенными зарядами (линейными, поверхностными, объемными).

2. При решении задач второго типа рассмотреть задачи для электронов и положительных зарядов на определение силы Лоренца. Закрепить навыки решения задач на движение зарядов решением задач на эффект Холла, определяя ЭДС (Холла) или концентрацию свободных зарядоносителей.

3. При решении задач третьего типа целесообразно подчеркнуть, что проводники могут быть замкнутыми или нет; уточнить характер действия магнитного поля на каждый из видов проводников (вращающий момент или перемещение) на основе определения сил Ампера; определить работу, затраченную на движение или вращение проводника (замкнутого). При этом необходимо научиться определять работу в неоднородном магнитном поле. Движение заряженных тел могут создавать эквивалентные (замкнутые) токи, поэтому необходимо подчеркнуть, что такое движение макрозарядов сопровождается совершением работы. Уяснить, откуда берется энергия для совершения работы, если магнитное поле не может изменять энергию зарядов.

Необходимо также ознакомиться с тем, что определяет энергию проводника с током (замкнутого) в магнитном поле.

4. При решении задач четвертого типа необходимо уяснить, что такое распределенные токи, вспомнить понятие плотности тока. Необходимо научиться выбирать рациональный вид контура циркуляции \vec{B} для упрощения процедуры нахождения циркуляции. Целесообразно показать применение закона полного тока на примере соленоида и проводниках конечного сечения, проводников из различных материалов, объединенных в один проводник.

1.4. Примеры решения задач

Пример 1.

По двум бесконечно длинным прямолинейным проводникам, находящимся на расстоянии 10 см друг от друга, текут токи силой 5 А в каждом. Определите индукцию магнитного поля, создаваемого токами в точке А, лежащей посередине между проводами в случаях: а) проводники параллельны и токи текут в одном или в разных направлениях (рис. 1.14); б) проводники перпендикулярны, направления токов показаны на рис. 1.15.

Решение. Результирующая индукция магнитного поля в данной точке равна векторной сумме индукций полей, создаваемых каждым током в отдельности:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2, \quad (1)$$

где \vec{B}_1 и \vec{B}_2 – индукции полей, создаваемых соответственно токами I_1 и I_2 .

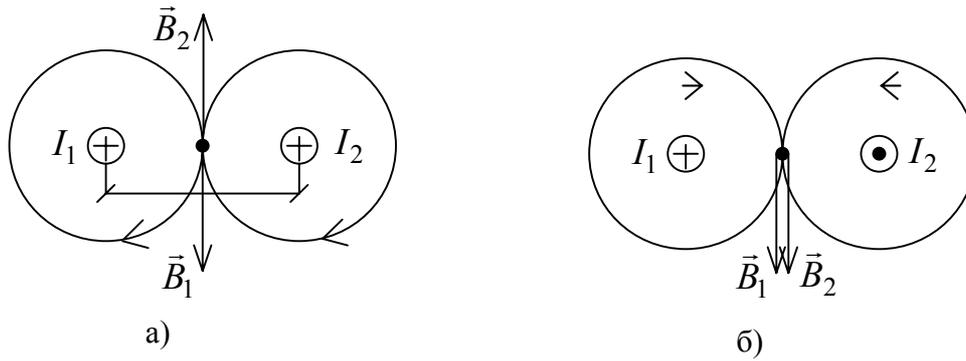


Рис. 1.14

Если токи текут по параллельным проводникам в одном направлении, то, применив правило правого винта, определяем направления \vec{B}_1 и \vec{B}_2 . Как видно из рис. 1.14, а \vec{B}_1 и \vec{B}_2 направлены в противоположные стороны, поэтому векторная сумма (1) в данном случае может быть заменена алгебраической:

$$B = (B_1 - B_2). \quad (2)$$

Индукция полей, создаваемых бесконечно длинными проводниками

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}; \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}, \quad (3) \quad \mathbf{A}$$

где r_1 и r_2 – соответственно расстояния от проводников до точки, в которой определяется индукция магнитного поля.

Согласно условию задачи: $r_1 = r_2 = r = d/2$; $I_1 = I_2 = I$. Тогда:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} - \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = 0.$$

Если токи текут в противоположных направлениях (см. рис. 1.14, б), то очевидно:

$$B = \frac{\mu_0 I}{\pi r}.$$

В случае, когда проводники перпендикулярны (рис. 1.15), результирующая индукция в точке, лежащей посередине между проводниками, равна

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2};$$

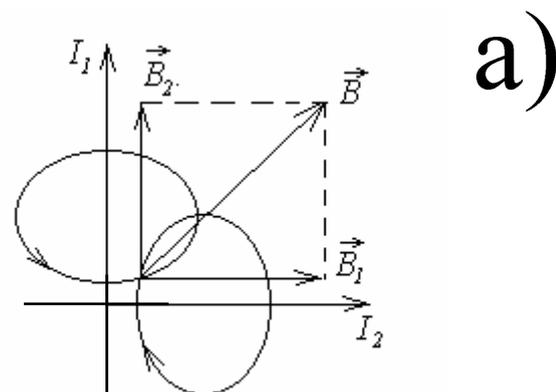


Рис. 1.15

$$B = \sqrt{\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \sqrt{2};$$

$$B = \frac{12,56 \text{ Гн/м} \cdot 5 \text{ А} \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 3,14 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}} = 27,63 \cdot 10^{-6} \text{ Тл} = 27,63 \text{ мкТл}.$$

Пример 2.

Прямолинейный проводник изогнут в виде прямого угла со стороной 20 см. В плоскости угла помещен кольцевой проводник радиусом 10 см так, что стороны угла являются касательными к кольцевому проводнику (рис. 1.16, а). Найдите индукцию в центре кольца. Сила тока в проводниках равна 2 А. Влияние подводящих проводов не учитывать.

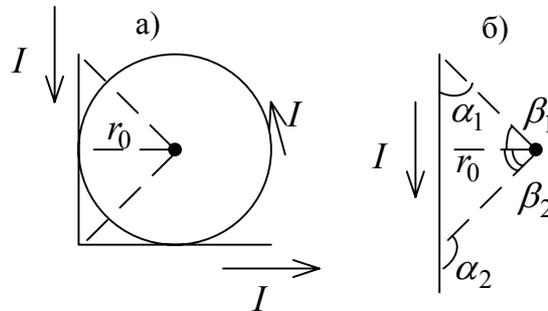


Рис. 1.16

Решение. Индукция dB в точке поля от элемента проводника dl с током I (проводник имеет произвольную конфигурацию) определяется по закону Био – Савара – Лапласа:

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2}, \quad (1)$$

где r – модуль радиус – вектора, проведенного из элемента в точку, где определяется индукция; α – угол, составленный векторами $d\vec{l}$ и \vec{r} ; μ_0 – магнитная постоянная.

Направление вектора индукции перпендикулярно плоскости, содержащей $d\vec{l}$ и \vec{r} , и определяется правилом правого винта. Например, в центре окружности (рис. 1.16, а) векторы индукции от всех элементов перпендикулярны плоскости окружности и направлены на нас. Интегрируя выражение (1), получаем индукцию в центре окружности радиусом r_0

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2r_0}. \quad (2)$$

Индукция, создаваемая в точке M конечным отрезком AB прямого проводника на расстоянии r_0 от него (см. рис. 1.16, б)

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Эту формулу в некоторых случаях удобнее записать в виде

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\sin \beta_1 + \sin \beta_2). \quad (3)$$

Вектор индукции в точке M перпендикулярен плоскости, в которой лежат проводник AB и r_0 , и совпадает по направлению с \vec{B}_1 .

По условию задачи $\beta_1 = \beta_2 = 45^\circ$. Индукция от двух сторон угла

$$B_3 = \frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{4\pi r_0 \cdot 2} + \frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{4\pi r_0 \cdot 2} = \frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{4\pi r_0}. \quad (4)$$

Так как направления создаваемых проводниками векторов индукции полей совпадают, то результирующая индукция в центре кольца равна сумме $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ или

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2r_0} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \right);$$

$$B = \frac{12,56 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м} \cdot 2 \text{ А}}{2 \cdot 0,1 \text{ м}} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3,14} \right) = 15,32 \cdot 10^{-6} \text{ Тл} = 15,32 \text{ мкТл}.$$

Пример 3.

Пройдя ускоряющую разность потенциалов 3,52 кВ, электрон влетает в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции. Индукция поля 0,01 Тл, радиус траектории $r = 2$ см. Определите удельный заряд электрона.

Решение. Удельным зарядом частицы называется величина, равная отношению заряда к массе, т.е. e/m .

В магнитном поле с индукцией \vec{B} на заряд, движущийся со скоростью \vec{v} перпендикулярно линиям индукции, действует сила Лоренца $F_{\text{Л}} = Bev$. Под действием этой силы заряд перемещается по дуге окружности. Так как при этом сила Лоренца вызывает центростремительное ускорение, то согласно второму закону Ньютона

$$Bev = \frac{mv^2}{r}.$$

За счет работы A сил электрического поля ($A = eU$) электрон приобретает кинетическую энергию, равную $\frac{mv^2}{2}$, поэтому

$$\frac{mv^2}{2} = eU.$$

Преобразовав последние два соотношения и исключив из них скорость, получим формулу для определения удельного заряда электрона

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{B^2 r^2};$$

$$\frac{e}{m} = \frac{2 \cdot 3,52 \cdot 10^3 \text{ В}}{10^{-4} \text{ Тл}^2 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}.$$

Пример 4.

Виток радиусом 2 см, по которому течет ток силой 10 А, свободно установился в однородном магнитном поле с индукцией 1,5 Тл. Линии индукции перпендикулярны плоскости витка. Определите работу, совершаемую внешними силами при повороте витка на угол 90° вокруг оси, совпадающей с диаметром витка. Считать, что при повороте витка силы тока в нем поддерживаются неизменной.

Решение. На виток с током, помещенный в магнитное поле, действует вращающий момент

$$M = p_m B \sin \alpha, \quad (1)$$

где $p_m = IS = I\pi r^2$ – магнитный момент витка; B – индукция магнитного поля; α – угол между векторами \vec{p}_m и \vec{B} .

В начальном положении согласно условию задачи виток свободно установился в магнитном поле. Следовательно, векторы \vec{p}_m и \vec{B} совпадают по направлению, т.е. $\alpha = 0$ и $M = 0$.

При действии внешних сил виток выходит из положения равновесия, при этом возникает момент сил, определяемых формулой (1). Момент сил стремится вернуть виток в исходное положение. При повороте витка внешние силы совершают работу против этого момента, который является переменным и зависит от угла поворота α :

$$dA = Md\alpha;$$

$$dA = I\pi r^2 B \sin \alpha d\alpha.$$

Взяв интеграл от этого выражения, найдем работу, совершаемую при повороте витка на конечный угол:

$$A = \int_0^{\pi/2} I\pi r^2 B \sin \alpha d\alpha = I\pi r^2 B \int_0^{\pi/2} \sin \alpha d\alpha = I\pi r^2 B (-\cos \alpha) \Big|_0^{\pi/2} = \\ = I\pi r^2 B (-\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0) = I\pi r^2 B;$$

$$A = 10 \text{ А} \cdot 3,14 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \cdot 1,5 \text{ Тл} = 18,84 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} \approx 0,02 \text{ Дж}.$$

Пример 5.

Ток $I = 10 \text{ А}$ течет по стержню диаметром 1 см. Определите зависимость B магнитного поля, создаваемого током, от расстояния, измеряемого от центра стержня (рис. 1.17).

Решение. При решении этой задачи целесообразно воспользоваться теоремой полного тока $\oint B_l dl = \mu_0 I$.

1. Так как сечение проводника – круг, контур циркуляции целесообразно взять в виде окружности.

2. Область пространства относительно центра проводника делится на две зоны: первая – в ней течет ток; вторая – в ней ток не течет.

Для первой зоны: длина произвольно выбранной окружности циркуляции равна $2\pi r$, в каждой точке ее \vec{B} направлен по касательной и лежит в плоскости окружности. Поэтому

$$\oint B_l dl = B_{(r)} 2\pi r.$$

Ток, охватываемый контуром циркуляции, равен

$$I_{(r)} = j\pi r^2$$

и теорема полного тока запишется в виде:

$$B_{(r)} 2\pi r = \mu\mu_0 j\pi r^2.$$

$$\text{Так как } j = \frac{I}{\frac{\pi d^2}{4}}, \text{ получим } B_{(r)} = \frac{4\mu\mu_0 I r}{2\pi d^2} = 2\mu\mu_0 I \frac{r}{\pi d^2},$$

где r – текущая координата.

Для второй зоны: контур циркуляции также выбираем в виде окружности и, как и для зоны первой, циркуляция запишется в виде

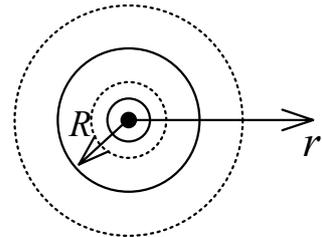


Рис. 1.17

$\oint_l B_l dl = B_{(r)} \cdot 2\pi r$. Но какой бы радиус r контура циркуляции не был взят для этой зоны, они будут охватывать все ток I . Поэтому

$$B_{(r)} \cdot 2\pi r = \mu_0 I.$$

Отсюда

$$B_{(r)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Строим зависимость B от r (рис. 1.18). Величину B_{\max} находим из любого соотношения для B , подставляя вместо r величину радиуса проводника

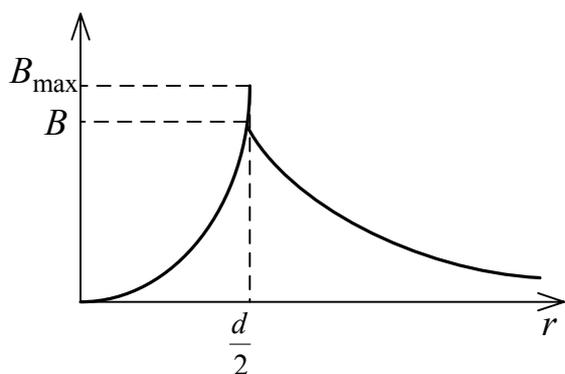


Рис. 1.18

$$R = d/2.$$

$$B_1 = \frac{2\mu\mu_0 I \left(\frac{d}{2}\right)}{\pi d^2} = \frac{\mu\mu_0 I}{\pi d}$$

или

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi \frac{d}{2}} = \frac{\mu_0 I}{\pi d}.$$

Видим, что функция B от r на границе проводника терпит разрыв, определяемый величиной μ .

Пример 6.

Тонкий стержень длиной l , заряженный с линейной плотностью заряда τ , вращается с угловой скоростью ω . Ось вращения перпендикулярна стержню и проходит на расстоянии a от одного из его концов. Определить индукцию магнитного поля в точке A и создаваемый стержнем магнитный момент (рис. 1.19).

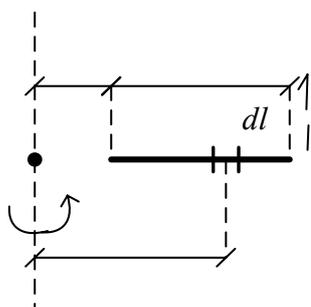


Рис. 1.19

Решение. Каждый элемент несет заряд $dq = \tau dl$. Вследствие вращения стержня dq движется по окружности радиуса r и создает эквивалентный круговой ток

$$\text{Так как } dI = \frac{dq}{dt}, \text{ то } dI_s = \frac{dq}{T} = \frac{\tau dl}{T},$$

поскольку за период T в воображаемой цепи эквивалентного тока проходит заряд dq . Заменяя dl на dr , можно записать

$$dB_{(r)} = \frac{\mu_0 dq}{2rT} = \frac{\mu_0 \tau dr}{2T r}.$$

Так как $\omega = \frac{2\pi}{T}$, выражение для $dB_{(r)}$ запишется в виде

$$dB_{(r)} = \frac{\mu_0 \tau \omega dr}{4\pi r}.$$

Чтобы учесть весь заряд стержня, интегрируем

$$B_A = \int_a^{l+a} dB_{(r)} = \frac{\mu_0 \tau \omega}{4\pi} \ln r \Big|_a^{l+a} = \frac{\mu_0 \tau \omega}{4\pi} \ln \frac{l+a}{a}.$$

Магнитный момент замкнутого эквивалентного тока равен

$$p_{Mi} = I_i S_i,$$

поэтому

$$dp_M = \frac{dq}{T} \pi r^2 = \frac{\pi \tau \omega r^2}{2\pi} dr.$$

Интегрируя, находим p_M , создаваемый стержнем

$$p_M = \int_a^{l+a} dp_M = \frac{\tau \omega}{2} \int_a^{l+a} r^2 dr = \frac{\tau \omega r^3}{6} \Big|_a^{l+a} = \frac{\tau \omega}{6} [(l+a)^3 - a^3].$$

1.5. Задачи для самостоятельного решения (задачи № 1 – 6 пояснить рисунком)

1. По двум бесконечно длинным прямолинейным проводникам, расположенным параллельно друг другу на расстоянии 10 см текут токи в одном направлении. Напряженность поля в точке, удаленной на 10 см от каждого проводника, равна 16,33 А/м. По одному из проводников течет ток силой 0,5 А. Определите силу тока, текущего по другому проводнику.
2. Два круговых витка с током лежат в одной плоскости и имеют общий центр. Радиус большего витка 12 см, меньшего – 8 см. Напряженность поля в центре витков равна 50 А/м, если токи текут в одном направлении, и нулю, если в противоположном. Определите силы токов, текущих по круговым виткам.
3. По двум бесконечно длинным прямолинейным проводникам текут токи силой 4 и 6 А. Расстояние между проводниками 15 см. Определите геометрическое место точек, в которых индукция магнитного поля равна нулю.
4. Прямой проводник согнут в виде прямоугольника со сторонами длиной 0,2 и 0,3 м. Какой силы ток нужно пропустить по этому проводнику, чтобы напряженность поля в точке пересечения диагоналей была 19 А/м.

5. По круговому проводнику радиусом 0,12 м течет ток силой 0,2 А. Перпендикулярно плоскости кругового проводника проходит бесконечно длинный проводник, по которому течет ток силой 0,1 А. Индукция магнитного поля в центре кругового проводника $11,3 \cdot 10^{-7}$ Тл. Определите, на каком расстоянии от центра кругового проводника находится прямолинейный проводник.
6. Прямой проводник длиной 90 см согнут в виде равностороннего треугольника. Определите силу тока, текущего по этому проводнику, если индукция магнитного поля в точке пересечения высот треугольника равна $1,24 \cdot 10^{-6}$ Тл.
7. Частица, обладающая энергией 16 МэВ, движется в однородном магнитном поле с индукцией 2,4 Тл по окружности радиусом 24,5 см. Определите заряд этой частицы, если ее скорость $2,72 \cdot 10^7$ м/с.
8. Электрон, обладающий энергией 0,5 кэВ, пролетает в вакууме сквозь однородное магнитное поле напряженностью 1 кА/м перпендикулярно вектору индукции поля. Определите скорость электрона, силу Лоренца и радиус траектории его движения.
9. Рамка в виде кольца с током силой 1 А и радиусом 2 см находится в воздухе в однородном магнитном поле, напряженность которого равна 75 А/м. Плоскость рамки составляет угол 10° с вектором напряженности поля. Какую работу надо совершить, чтобы повернуть рамку перпендикулярно полю?
10. Прямолинейный проводник с током силой 5 А и длиной 1 м вращается со скоростью 50 с^{-1} в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, относительно оси, проходящей через конец проводника. Напряженность магнитного поля 50 А/м. Определите работу, совершаемую сторонними силами при вращении проводника за 5 минут.
11. Определите работу внешних сил, совершаемую при перемещении проводника за 30 мин, если проводник двигается со скоростью 30 км/ч перпендикулярно магнитному полю, напряженность которого 15 А/м ($\mu = 1$). Длина проводника 20 см, по нему течет ток силой 0,5 А.
12. Ток 100 А течет по длинной трубе внутренним радиусом 5 см и внешним радиусом 8 см. Нарисуйте зависимость индукции магнитного поля от расстояния от центра трубы; определите максимальное значение индукции магнитного поля, если μ материала трубы равно 10.
13. Тонкий диск, заряженный равномерно распределенным зарядом с плотностью σ , вращается вокруг оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через его центр, делая 20 оборотов в секунду. Определите индукцию магнитного поля в центре диска и магнитный момент, создаваемый им, если радиус диска равен R .

2. УЧЕБНЫЙ БЛОК «ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ. МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА»

Введение

Теория электромагнитной индукции имеет важное значение для практической деятельности человечества в областях преобразования механической и тепловой видов энергии в электрическую; преобразования электрической энергии, электромагнитной связи и локации; исследования свойств вещества. В содержание блока включены взаимосвязанные вопросы, составляющие феноменологическую основу электромагнитной теории.

Для успешного изучения материала блока необходимо

знать:

- характеристики магнитного поля;
- силовые характеристики взаимодействия токов и зарядов с магнитным полем;

– электронную теорию проводимости;

– законы Ома для постоянного тока;

– теорию колебаний;

иметь представление:

– об электрической емкости;

– об энергии электрического поля;

– об эквивалентных токах;

– о магнитном потоке;

– о принципе суперпозиции магнитных полей.

Учебная программа блока

Содержание	Форма подготовки	Литература
1. ЭДС электромагнитной индукции. Закон Фарадея. Потокосцепление. Электронная теория электромагнитной индукции	лекция	[4, § 40 – 48] [6, § 2.45 – 2.53]
2. Самоиндукция. Индуктивность контура. Взаимная индукция, индуктивность. Энергия магнитного поля. Плотность энергии	лекция, самост.	[7, § 16.1 – 16.4] [10, § 122 – 136]
3. Токи при замыкании и размыкании цепи с индуктивностью. Электромагнитные колебания в L, C контуре	лекция	[15, § 7.1 – 8.6] [17, § 99 – 132]
4. Магнитные свойства вещества. Вектор намагничивания. Диамагнетики. Парамагнетики. Ферромагнетики	лекция	[19, § 121 – 149]

Цели обучения

Студент должен знать	Студент должен уметь
<ul style="list-style-type: none"> – закон электромагнитной индукции; правило Ленца; – явления самоиндукции и взаимной индукции; – формулы, определяющие: энергию магнитного поля, плотность энергии, временные закономерности токов при замыкании и размыкании цепи с индуктивностью, частоту колебаний в LC – контуре, волновое сопротивление LC – контура; – магнитные свойства вещества на основе ориентационной и индуцированной намагниченности 	<ul style="list-style-type: none"> – определять ЭДС индукции в проводниках, взаимодействующих с магнитным полем; – определять энергию и плотность энергии магнитного поля в различных структурах; – определять направление индукционных токов при изменении потокосцепления; – определять индуктивность проводников; – определять взаимную индуктивность проводников; – определять параметры колебаний в LC – контуре и его волновое сопротивление; – определять токи в цепях с индуктивностью в заданный момент времени

2.1. Краткое содержание теоретического материала

Электромагнитная индукция

В 1831 г. М. Фарадей экспериментально обнаружил, что в замкнутом контуре при изменении магнитного потока через площадь, охватываемую контуром, возникает электрический ток. Это явление было названо электромагнитной индукцией. Экспериментально Фарадей установил, что индукционный ток возникает при изменении магнитного потока, сцепленного с контуром, независимо от того, каким способом достигается это изменение: изменением ли индукции магнитного поля во времени, изменением ли площади контура или изменением того и другого одновременно.

Рассмотрим физические причины возникновения ЭДС индукции, а следовательно, и индукционного тока. Пусть элемент проводника длиной l движется в магнитном поле со скоростью v . Магнитное поле однородно, вектор магнитной индукции направлен перпендикулярно плоскости от нас (рис. 2.1). На каждый свободный электрон проводника e со стороны магнитного поля действует сила Лоренца. Заряд электрона отрицательный, поэтому сила Лоренца F_L направлена вниз. Следовательно, электроны смещаются в нижнюю часть элемента l , а вверху остается нескомпенсированный положительный заряд, и на концах элемента проводника l образуется разность потенциалов $\Delta\varphi$. Эту разность потенциалов можно рассматривать как электродвижущую силу для замкнутой цепи, элементом которой является движущийся проводник. При этом в цепи устанавливается некоторый ток I . Если скорость движения проводника постоянна, то ток будет постоянным. Как следует из законов постоянного тока, разность потенциалов $\Delta\varphi$ стремится к максимально возможной величине ($\epsilon_{\text{инд}}$), когда

сопротивление внешней для движущегося проводника l цепи стремится к бесконечности (разрыв цепи). Для этого случая (как и при рассмотрении эффекта Холла) можно записать

$$eE = -e\upsilon B \quad \text{или} \quad E = -\upsilon B,$$

где E – напряженность электрического поля в движущемся проводнике l .

Так как в данном случае ($R \rightarrow \infty$)

$$\Delta\Phi = El = \varepsilon_{\text{инд}},$$

с учетом предыдущего равенства

$$\varepsilon_{\text{инд}} = -\upsilon Bl.$$

Учитывая, что $\upsilon = \frac{dx}{dt}$, преобразуем полученное выражение

$$\varepsilon_{\text{инд}} = -B \frac{ldx}{dt},$$

где $ldx = dS$ – площадь контура, «описываемого» движущимся проводником длиной l при движении за промежуток времени dt . Следовательно

$$\varepsilon_{\text{инд}} = -\frac{BdS}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (1)$$

где Φ – поток магнитной индукции сцепленный с контуром.

Используя закон Ома для полной цепи и закон Фарадея, выражение для индукционного тока можно записать в виде

$$I_{\text{инд}} = \frac{\varepsilon_{\text{инд}}}{R+r} = -\frac{1}{(R+r)} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (2)$$

где r – сопротивление проводника l ; R – сопротивление внешней цепи.

Направление индукционного тока определяется *по правилу Ленца*: индукционный ток всегда направлен так, что магнитное поле, формируемое им, стремится препятствовать всякому изменению магнитного потока, сцепленного с контуром, в котором возникает ЭДС электромагнитной индукции.

Знак «минус» в формуле (2) отражает *закон Ленца*: при возрастании магнитного потока $\frac{d\Phi}{dt}$ индукционный ток течет так, что индукция магнитного поля, создаваемого им, направлена против индукции внешнего поля. При

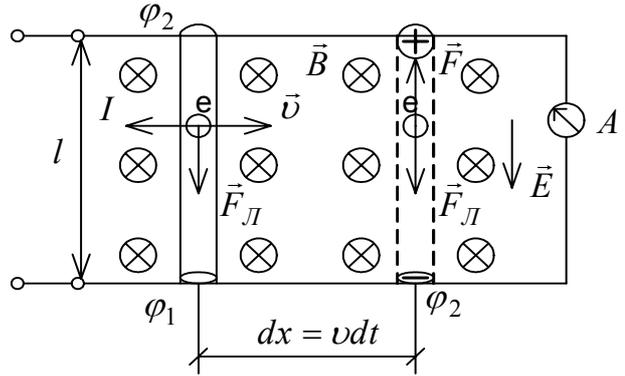


Рис. 2.1

уменьшении магнитного потока индукция магнитного поля индукционного тока сонаправлена с индукцией внешнего поля.

Электродвижущая сила в цепи – это результат действия сторонних сил, т.е. сил неэлектрического происхождения. При движении проводника в магнитном поле роль сторонних сил выполняет сила, движущая проводник l . Работа этой силы преобразуется в энергию магнитного поля, создаваемого индукционным током, и в тепловую энергию, согласно закону Джоуля – Ленца.

Кроме рассмотренного случая закон Фарадея (1) охватывает все возможные случаи изменения магнитного потока, сцепленного с контуром: изменение индукции внешнего магнитного поля; изменение ориентации плоскости контура во внешнем магнитном поле; изменение площади, охватываемой контуром.

Наличие индукционного тока в замкнутом контуре при всех указанных условиях свидетельствует о том, что в проводнике (контуре) формируется электрическое поле с вектором \vec{E} вдоль проводника (условие протекания тока). Очевидно, что силовые линии этого поля (как и проводник) замкнуты. Это означает, что переменное магнитное поле, сцепленное с замкнутым контуром, формирует в нем вихревое электрическое поле. Такое поле в отличие от поля зарядов не является потенциальным, т.е. перемещение заряда в таком поле по замкнутой траектории не равно нулю.

Если замкнутый контур содержит N последовательно соединенных витков (например, катушка или соленоид), то ЭДС индукции равна сумме ЭДС каждого витка

$$\varepsilon_{\text{инд}} = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}, \quad (3)$$

где Ψ – суммарный магнитный поток через N витков (потокосцепление катушки).

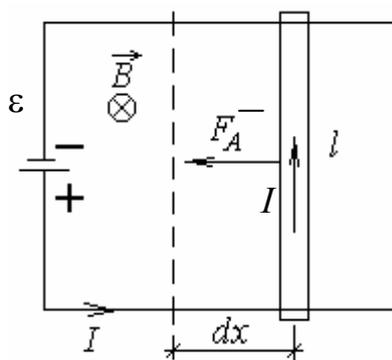


Рис. 2.2

Закон Фарадея (1) согласуется с законом сохранения энергии. Пусть в замкнутом проводнике обеспечивается источником ЭДС (ε) ток I (рис. 2.2). Элемент контура l может свободно перемещаться. Контур находится во внешнем магнитном поле с индукцией B . Под действием силы Ампера проводник за время dt переместится на отрезок dx . При этом сила Ампера совершает работу $dA = Id\Phi$. Если сопротивление контура равно R , то закон сохранения энергии запишется в виде

$$\varepsilon Idt = I^2 R dt + Id\Phi, \quad (4)$$

где левая часть равенства – энергия, потребляемая от источника ЭДС, первый элемент правой части – энергия Джоуля – Ленца, а второй элемент – работа силы Ампера по перемещению проводника l . Из (4) следует

$$I = \frac{\varepsilon - \frac{d\Phi}{dt}}{R}. \quad (5)$$

Из (5) следует, что величина $\frac{d\Phi}{dt}$ может иметь смысл только ЭДС, включенной встречно источнику ЭДС – ε .

Самоиндукция. Индуктивность контура

Известно, что контур с током формирует магнитное поле, которое оказывается сцепленным с этим контуром. Если ток в контуре изменяется, то изменяется и магнитный поток, сцепленный с контуром. ЭДС электромагнитной индукции, которая возникает в контуре при изменении силы тока в нем, называется ЭДС самоиндукции.

Магнитный поток, сцепленный с контуром, всегда пропорционален силе тока в нем

$$\Phi = LI. \quad (5)$$

Коэффициент пропорциональности L называют коэффициентом самоиндукции (индуктивностью контура).

Подставляя в закон Фарадея выражение (5), получаем

$$\varepsilon_c = -L \frac{dI}{dt}, \quad (6)$$

где ε_c – ЭДС самоиндукции.

Если контур представляет собой соленоид, содержащий N витков, то

$$\varepsilon_c = -\frac{d\Psi}{dt} = -NL \frac{dI}{dt},$$

Индуктивность L зависит от формы и размеров контура (соленоида), а также от магнитных свойств среды. Если размеры, форма контура и магнитные свойства среды, в которой формируется собственное магнитное поле, не изменяются, то $L = \text{const}$.

Определим индуктивность соленоида, т.е. катушки, длина l которой много больше ее диаметра. В этом случае можно пренебречь искажением поля вблизи концов соленоида. Используя закон полного тока, можно показать, что напряженность магнитного поля внутри соленоида равна $H = In$, где n – число витков, приходящихся на единицу длины соленоида. Если общее число витков

соленоида равно N , то $H = I \frac{N}{l}$. Магнитный поток, пронизывающий один виток соленоида, равен

$$\Phi = BS = \mu\mu_0 I \frac{N}{l} S,$$

где S – площадь поперечного сечения соленоида; μ – относительная магнитная проницаемость окружающей среды.

Полный магнитный поток равен потокоцеплению

$$\Psi = N\Phi = \mu\mu_0 \frac{N^2 I}{l} S.$$

Так как $Sl = V$ (объем соленоида), то

$$\Psi = \mu\mu_0 \frac{N^2 I}{l^2} V = \mu\mu_0 n^2 VI.$$

Поэтому индуктивность соленоида

$$L = \mu\mu_0 n^2 V \text{ или } L = \mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l}.$$

Взаимная индукция

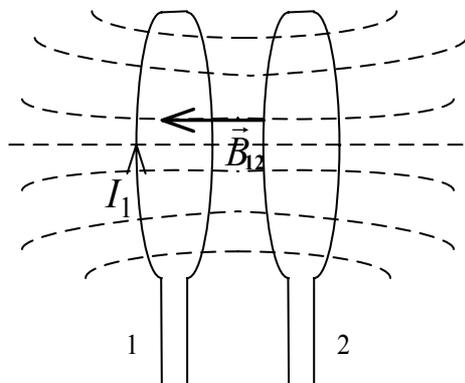


Рис. 2.3

Пусть имеются два контура, расположенные так, что силовые линии магнитного поля, создаваемого одним из контуров с током, пронизывают площадь, охватываемую вторым контуром. Такие контуры называются индуктивно связанными (рис. 2.3). Ясно, что первый контур формирует магнитный поток, охватываемый вторым контуром

$$\Phi_{12} = B_{12} S_2,$$

где B_{12} – индукция магнитного поля в плоскости второго контура, перпендикулярная плоскости; S_2 – площадь, охватываемая вторым контуром.

Так как магнитное поле формируется током I_1 , то B_{12} пропорциональна I_1 . С учетом постоянства S_2 можно записать

$$\Phi_{21} = L_{21} I_1, \quad (7)$$

где L_{21} – коэффициент пропорциональности, названный индуктивностью контура 2 относительно контура 1. Изменение тока I_1 приводит к появлению ЭДС индукции в контуре 2 (ЭДС взаимной индукции)

$$\varepsilon_{21} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (8)$$

Экспериментальное исследование взаимной индукции позволило установить следующее:

- взаимная индуктивность зависит только от формы, размеров и взаимного расположения контуров;
- магнитное потокоцепление контуров не зависит от того, по какому контуру протекает ток, создающий магнитное поле. Это означает, что

$$\frac{d\Phi_{21}}{dt} = \frac{d\Phi_{12}}{dt},$$

если $\frac{dI_1}{dt} = \frac{dI_2}{dt}$, а следовательно, согласно (8), $L_{12} = L_{21}$.

Направление индукционного тока при взаимной электромагнитной индукции, как и в случае самоиндукции, подчиняется правилу Ленца:

- если ток I_1 возрастает, то $I_{\text{инд.2}}$ течет в направлении, противоположном I_1 ;
- если ток I_1 , снижается, то $I_{\text{инд.2}}$ течет в направлении, совпадающем с направлением I_1 .

Энергия магнитного поля

Пусть источник ЭДС (U) замкнут на некоторый контур с индуктивностью L (рис. 2.4). Сопротивление контура и внутреннее сопротивление источника ЭДС обобщим сопротивлением R . Если увеличить ток в цепи, то в контуре L возникает ЭДС самоиндукции ε_c . Полярность этой ε_c определяется правилом Ленца, т.е. она включена «встречно» напряжению на источнике ЭДС.

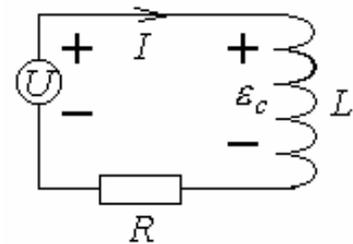


Рис. 2.4

Закон Ома для этой цепи для малого промежутка времени (мгновения) можно записать в виде

$$I = \frac{u - \varepsilon_c}{R} = \frac{u - L \frac{dI}{dt}}{R} \quad \text{или} \quad u = IR + L \frac{dI}{dt},$$

где u – напряжение на источнике тока.

Умножим последнее уравнение на $I dt$

$$u I dt = I^2 R dt + L I dI.$$

Левая часть полученного равенства есть энергия, отдаваемая источником ЭДС. Первый элемент правой части – тепловая энергия по закону Джоуля – Ленца. Второй элемент правой части может быть только энергией,

запасаемой в индуктивном элементе цепи, т.е. энергией магнитного поля или эквивалентной ей работой, затрачиваемой на увеличение сцепленного с контуром магнитного поля dA . Поэтому

$$dA = LI dI .$$

Если проинтегрировать последнее выражение по току в пределах от 0 до I , то получим работу, эквивалентную энергии магнитного поля в индуктивном элементе при токе I :

$$A = W_M = \int dA = L \int_0^I IdI .$$

В результате получаем

$$W_M = \frac{LI^2}{2} . \quad (9)$$

Используя (9), можно определить связь энергии магнитного поля с его индукцией B . В общем случае, когда магнитное поле неоднородно в каждой конкретной точке его, может быть установлена связь между B и плотностью энергии магнитного поля. Рассмотрим эту связь на примере длинного соленоида, индуктивность которого определяется формулой $L = \mu\mu_0 n^2 V$. В этом случае (9) имеет вид

$$W_M = \frac{\mu\mu_0 n^2 V I^2}{2} .$$

Учитывая, что напряженность поля внутри бесконечно длинного соленоида $H = In$, получаем

$$W_M = \frac{\mu\mu_0 n^2 H^2}{2} V$$

или

$$W_M = \frac{BH}{2} V . \quad (10)$$

Магнитное поле соленоида однородно и локализовано внутри него, поэтому энергия распределена по объему соленоида с постоянной плотностью

$$\omega = \frac{W_M}{V} .$$

Учитывая (10) для плотности энергии магнитного поля в общем случае, получаем

$$\omega = \frac{BH}{2} . \quad (11)$$

Токи при замыкании и размыкании электрической цепи с индуктивностью

Для анализа зависимостей тока в цепи с индуктивностью при подключении цепи к источнику тока и отключении от источника воспользуемся законом Ома для участка цепи (рис. 2.4)

$$I = \frac{u - L \frac{dI}{dt}}{R}. \quad (12)$$

Преобразуем (12) к виду

$$\frac{L dI}{u - IR} = dt.$$

Умножим обе части этого равенства на $\left(-\frac{R}{L}\right)$

$$-\frac{R dI}{u - IR} = -\frac{R}{L} dt.$$

Заменим $(u - IR)$ переменной v

$$\frac{dv}{v} = -\frac{R}{L} dt.$$

Проинтегрируем полученное выражение

$$\ln(u - IR) = -\frac{R}{L} t + \ln C,$$

где $\ln C$ – постоянная интегрирования. Потенцируем последнее выражение

$$u - IR = C e^{-t \frac{R}{L}}. \quad (13)$$

При этом постоянная интегрирования находится из начальных условий. При замыкании цепи $t = 0$, $u = u$ и, согласно (13), $C = u$. Подставляя $C = u$ в (13), получаем зависимость тока от времени

$$I = \frac{u}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t}\right) = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t}\right), \quad (14)$$

где $I_0 = \frac{u}{R}$ – максимально возможный ток в цепи.

При размыкании цепи $t = 0$, $u = 0$, т.к. источник тока отключается от цепи. Поскольку ток в цепи определяется в основном ЭДС самоиндукции; то $I = I_0$, т.е. ток в цепи равен току до момента отключения источника тока.

Поэтому согласно (13) при данных начальных условиях $C = -I_0 R$. Подставляя C в (13), получаем функцию тока от времени при размыкании цепи с индуктивностью в виде

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (15)$$

Из формул (14) и (15) следует, что чем больше R/L , тем быстрее завершается переходный процесс при замыкании и размыкании цепи.

Электромагнитные колебания. LC -контур

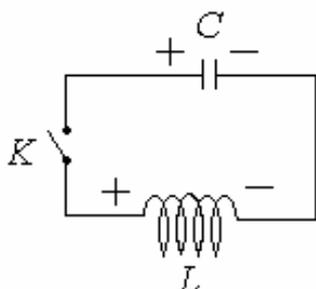


Рис. 2.5

Кроме механических колебательных систем, совершающих в процессе движения периодическое изменение состояний относительно равновесного, существуют колебательные системы, в которых осуществляется периодическое изменение состояния полевых структур, в частности электрического и магнитного полей. К таким колебательным системам относятся электрические цепи, включающие конденсатор емкости C и катушку с индуктивностью L .

Пример такого индуктивно-емкостного контура показан на рис. 2.5. Пусть в исходном состоянии ключ K разомкнут, а конденсатор C заряжен до напряжения U_0 , при котором энергия сосредоточенного в конденсаторе электрического поля равна

$$W_E = \frac{CU_0^2}{2}.$$

При замыкании ключа K конденсатор начинает разряжаться через индуктивность L . Ток разряда конденсатора вызывает появление магнитного поля индуктивности L (например, внутри соленоида с индуктивностью L). Так как ток во времени изменяется, на элементе L возникает ЭДС самоиндукции ε_c , полярность которой показана на рис. 2.5

$$\varepsilon_c = -\frac{LdI}{dt} = -L \frac{d}{dt} \left(\frac{dq}{dt} \right) = -L \frac{d^2q}{dt^2}, \quad (16)$$

где q – заряд конденсатора; dq – изменение заряда конденсатора или заряд, который протекает в цепи за время dt .

Пренебрегая для упрощения анализа активным сопротивлением цепи, согласно 2-му правилу Кирхгофа можем записать

$$U - \varepsilon_c = 0, \quad (17)$$

где U – напряжение на конденсаторе в любой момент времени.

С учетом (16) равенство (17) можно представить как

$$\frac{q}{C} = -L \frac{d^2 q}{dt^2}$$

или

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (18)$$

Уравнение (18) напоминает уравнение колебаний механических систем. Поэтому будем считать, что изменение заряда конденсатора можно описать гармоническим законом

$$q = q_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (19)$$

где q_0 – начальный (максимальный) заряд конденсатора; $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – циклическая частота колебаний заряда; φ_0 – начальная фаза колебаний.

От уравнения (19) можно перейти к уравнениям колебаний тока I и напряжения U для LC -контура:

$$\begin{aligned} I &= \frac{dq}{dt} = I_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \\ U &= \frac{q}{C} = U_0 \sin(\omega t + \varphi_0) \end{aligned}, \quad (20)$$

где $I_0 = q_0 \omega = \frac{q_0}{\sqrt{LC}}$ – амплитуда тока в контуре; $U_0 = \frac{q_0}{C}$ – амплитуда напряжения на контуре.

Величины I_0 и U_0 связаны между собой соотношением

$$I_0 = \frac{U_0 C}{\sqrt{LC}} = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Так как $\frac{U_0}{I_0} = \sqrt{\frac{L}{C}}$, величину $\sqrt{\frac{L}{C}}$ можно считать по физическому смыслу сопротивлением. Оно названо волновым сопротивлением LC -контура. После полной разрядки конденсатора энергия магнитного поля индуктивности через ЭДС самоиндукции обеспечивает перезарядку конденсатора, т.е. снова переходит в энергию электрического поля. Так как энергия в LC -контуре превращается то в энергию электрического поля, то в энергию магнитного поля, колебания в контуре являются электромагнитными.

Магнитные свойства вещества

Вектор намагничивания. Определенными магнитными свойствами обладают все вещества, поэтому термин «магнетики» применим ко всем материалам.

Для объяснения магнитных свойств различных веществ рассмотрим действие магнитного поля на движущиеся заряды (электроны) в молекулах и атомах вещества, используя «орбитальную» модель движения Бора. Условно будем считать, что электрон в атоме движется со скоростью \vec{v} по круговой орбите. Это движение можно представить эквивалентным круговым током, которое формирует собственное магнитное поле в веществе. Орбитальный магнитный момент электрона

$$p_{M_i} = IS.$$

Вектор магнитного момента \vec{p}_M атома равен векторной сумме орбитальных моментов \vec{p}_{M_i} электронов в атоме

$$\vec{p}_M = \sum_{i=1}^z \vec{p}_{M_i},$$

где z – порядковый номер элемента в таблице Менделеева.

Если вещество имеет молекулярное строение, то орбитальный магнитный момент молекулы равен векторной сумме орбитальных магнитных моментов атомов, входящих в состав молекулы.

Кроме орбитального магнитного момента электроны обладают собственным магнитным моментом – спином. Собственным магнитным моментом обладают также ядра атома.

Из этих магнитных моментов формируются полные магнитные моменты атомов и молекул, величина которых может быть равна нулю или больше, а ориентация – различной в пределах вещества.

При внесении магнетика во внешнее магнитное поле может происходить изменение ориентации существующих магнитных моментов атомов и молекул, а также появление несуществовавших в отсутствие внешнего поля магнитных моментов за счет изменения траекторий движения электронов в атомах. В результате этих эффектов в магнетике формируется собственное магнитное поле с индукцией \vec{B}_c , которое складывается с внешним магнитным полем, индукция которого $\vec{B}_{вн}$. Вектор магнитной индукции \vec{B} в магнетике определяется по принципу суперпозиции:

$$\vec{B} = \vec{B}_{вн} + \vec{B}_c. \quad (21)$$

Индукция \vec{B}_c пропорциональна \vec{B}_{BH} :

$$\vec{B}_c = \chi \vec{B}_{BH}, \quad (22)$$

где χ – магнитная восприимчивость вещества, характеризующая как сильно вещество реагирует на внешнее магнитное поле. Подставим (22) в (21)

$$\vec{B} = \vec{B}_{BH} + \chi \vec{B}_{BH} = \vec{B}_{BH} (1 + \chi)$$

или

$$\vec{B} = \mu \vec{B}_{BH}. \quad (23)$$

Величина $\mu = 1 + \chi$ получила название магнитной проницаемости вещества.

Упорядочение направлений векторов магнитных моментов \vec{p}_m отдельных атомов (молекул) магнетика, а также появление индуцированных магнитных моментов при наложении внешнего магнитного поля, приводит к тому, что макроскопический объем приобретает определенный суммарный магнитный момент. Отношение этого суммарного момента к объему вещества (магнетика), помещенного в магнитное поле, называется вектором намагничивания \vec{J}

$$\vec{J} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n \vec{p}_M, \quad (24)$$

где n – число атомов или молекул, входящих в объем.

Вектор намагничивания \vec{J} связан с напряженностью магнитного поля H соотношением $\vec{J} = \chi \vec{H}$. В отличие от диэлектрической проницаемости веществ, которая всегда больше единицы, магнитная проницаемость может быть как больше единицы, так и меньше. По величине μ все вещества делятся на три группы: диамагнетики ($\mu < 1$), парамагнетики ($\mu > 1$) и ферромагнетики ($\mu \gg 1$).

Диамагнетики. Суммарный магнитный момент атомов (молекул) диамагнитных веществ равен нулю. При помещении диамагнетика во внешнее магнитное поле возникает индуцированный магнитный момент микрочастиц. Суть этого явления заключается в следующем. Пусть в отсутствие \vec{B}_{BH} электрон вращается по круговой орбите с радиусом r и для него выполняется условие

$$F_{ц.с.} = F_k = m\omega^2 r, \quad (25)$$

где $F_{ц.с.}$ – центробежная сила, роль которой выполняет кулоновская сила F_k ; m – масса электрона; ω – угловая скорость. При наложении \vec{B}_{BH} на

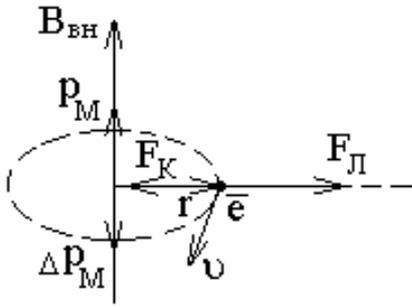


Рис. 2.6

движущийся электрон начинает действовать также лоренцева сила $\vec{F}_{Л} = -e[\vec{v} \times \vec{B}_{вн}]$, которая в рассматриваемом случае направлена по радиусу от центра окружности (рис. 2.6). Поэтому (25) запишется

$$F_{ц.с.} = F_{к} - F_{Л}.$$

Очевидно, что появление лоренцевой силы приведет к изменению угловой скорости на $\Delta\omega$. С учетом этого запишем:

$$mr(\omega + \Delta\omega)^2 = F_{к} - e\upsilon B_{вн}. \quad (26)$$

Подставим в (26) $\upsilon = r\omega$ и раскроем скобки

$$m\omega^2 r + 2mr\omega\Delta\omega + mr\Delta\omega^2 = F_{к} - er\omega B_{вн}. \quad (27)$$

Так как из (25) $F_{к} = m\omega^2 r$, то $mr\Delta\omega^2$ – величина много меньшая других элементов равенства (27) и ею можно пренебречь. В результате

$$\Delta\omega = -\frac{eB_{вн}}{2m}, \quad (28)$$

где знак «минус» означает, что угловая скорость уменьшается.

Изменение ω приводит к изменению орбитального магнитного момента электрона

$$\Delta p_M = \Delta I_{\circ} S = \frac{e\Delta\upsilon}{2\pi r} \pi r^2, \quad (29)$$

где ΔI_{\circ} – изменение эквивалентного тока орбитального движения электрона, $\frac{\Delta\upsilon}{2\pi r} = \frac{1}{T}$, T – период обращения электрона, $\Delta\upsilon = r\Delta\omega$.

В итоге (29) приводим к виду

$$\Delta\vec{p}_M = -\frac{e^2 r^2}{4m} \vec{B}_{вн}, \quad (30)$$

где знак «минус» означает, что $\Delta\vec{p}_M$ противоположен по направлению \vec{p}_M .

Так как для диамагнетиков суммарный магнитный момент всех электронов (молекул) в отсутствие $B_{вн}$ равен нулю, появление $\Delta\vec{p}_M$ и суммарного $\Delta\vec{p}_M$ для всех электронов атома свидетельствует о том, что возникает индуцированный в атоме (молекуле) $\Delta\vec{p}_M$; а значит и собственное магнитное поле, индукция которого направлена против индукции внешнего поля. В результате индукция магнитного поля в диамагнетике меньше, чем индукция внешнего поля, а μ диамагнетиков меньше 1.

Зная Δp_M для одного электрона, можно определить величину магнитной восприимчивости. Модуль $\Delta p_{M(a)}$ (для всех электронов атома (молекулы))

$$\Delta p_{M(a)} = \sum_{i=1}^N \frac{e^2}{4m} \left(\sum_{i=1}^N r_i^2 \right) B_{\text{вн}},$$

где N – число электронов в атоме; r_i – радиус орбиты i -го электрона в атоме.

Для всего объема вещества (N_0 – атомов) можем записать:

$$\sum_{i=1}^{N_0} \Delta p_{M(a)} = N_0 \frac{e^2 \sum_{i=1}^N r_i^2}{4m} B_{\text{вн}}.$$

Разделив суммарный магнитный момент вещества (диамагнетика) на объем вещества, получим величину вектора намагничивания

$$|J| = \frac{\sum_{i=1}^{N_0} \Delta p_{M(a)}}{V} = \frac{e^2 \sum_{i=1}^N r_i^2}{4m} \cdot \frac{N_0}{V} \cdot B_{\text{вн}} = \frac{e^2 n_0 \sum_{i=1}^N r_i^2}{4m} B_{\text{вн}}.$$

Из последнего равенства с учетом (24) следует, что

$$\chi = \frac{e^2 n_0 \sum_{i=1}^N r_i^2}{4m}. \quad (31)$$

Таким образом индуцированное магнитное поле в веществе приводит к снижению магнитного поля в веществе относительно внешнего поля.

Парамагнетики – вещества, в атомах (молекулах) которых магнитные моменты электронов взаимно не скомпенсированы, т.е. $\sum_{i=1}^N \Delta p_{M(a)}$ не равен

нулю. Поэтому собственное магнитное поле возникает как за счет индуцированного магнитного поля (как в диамагнетиках), так и за счет ориентации существующих магнитных моментов. Магнитное поле, обеспечиваемое ориентацией магнитных моментов эквивалентных токов электронов сонаправлено с внешним магнитным полем. Таким образом для парамагнетиков

$$B = B_{\text{вн}} + B_1 - B_2,$$

где B_1 – собственное магнитное поле, обусловленное ориентацией электронных орбит (магнитных моментов), а B_2 – собственное магнитное поле, обусловленное изменением угловой скорости движения электронов на орбитах – $\Delta\omega$.

К парамагнетикам относят вещества, у которых B_1 незначительно превышает B_2 , т.е. индукция магнитного поля в веществе незначительно превышает внешнее магнитное поле, поскольку $\mu \geq 1$.

Ферромагнетики – вещества, у которых суммарный магнитный момент электронов в атоме значителен, а ориентационная компонента собственного магнитного поля в веществе значительно превышает компоненту индуцированного магнитного поля. В ферромагнетиках молекулы (атомы) обычно объединены в группы, в которых магнитные моменты атомов (молекул) ориентированы одинаково (сонаправлены). Эти группы (области вещества) названы *доменами* (рис. 2.7). В отсутствие внешнего магнитного поля направления магнитных моментов доменов имеет случайный характер. При наложении внешнего магнитного поля происходит ориентация доменов, причем не всех при одинаковом $B_{вн}$ и в неравной степени. Поэтому между $B_{вн}$ и B существует нелинейная зависимость. Она определяется предысторией намагничивания ферромагнетика (магнитный гистерезис).

При намагничивании индукция возрастает от 0 до некоторого значения B (рис. 2.8). При увеличении $B_{вн}$ (от нуля) изменение индукции B в ферромагнетике характеризуется кривой OL . Если уменьшать $B_{вн}$, то изменение индукции соответствует (качественно) кривой LM . При $B_{вн} = 0$ индукция B отлична от нуля. В этом состоянии ферромагнетик является постоянным магнитом. Чтобы уничтожить остаточное намагничивание, приходится создавать внешнее поле с $B_{вн}$, направленным противоположно первоначальному.

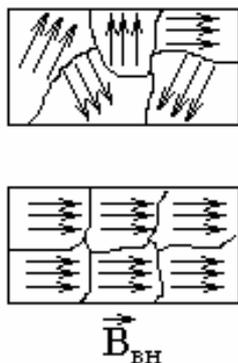


Рис. 2.7

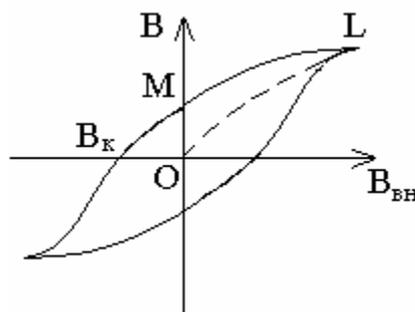


Рис. 2.8

Напряженность магнитного поля, при которой $B = 0$, называют *задерживающей* или *коэрцитивной силой* B_k . При последующем изменении индукции внешнего поля $B_{вн}$ индукция B изменяется, образуя *петлю гистерезиса* (рис. 2.8).

В зависимости от значения коэрцитивной силы ферромагнетики делят на мягкие и жесткие.

Мягкие ферромагнетики имеют узкую петлю гистерезиса и малые значения коэрцитивной силы. Для жестких ферромагнетиков характерны широкая петля гистерезиса и соответственно большие значения коэрцитивной силы.

Площадь петли гистерезиса характеризует работу, которую необходимо совершить для перемагничивания ферромагнетика.

Если в процессе использования ферромагнетик должен перемагничиваться в переменном магнитном поле, то целесообразнее использовать мягкие ферромагнетики, площадь петли гистерезиса которых мала. Из мягких ферромагнетиков изготавливают сердечники трансформаторов, генераторов, электродвигателей. Из жестких ферромагнетиков изготавливают постоянные магниты.

При нагревании веществ возрастает энергия теплового движения молекул (атомов) вещества; степень ориентации их магнитных моментов снижается. В результате у парамагнетиков и ферромагнетиков снижается вектор намагничивания их во внешнем магнитном поле и, следовательно, снижается относительная магнитная проницаемость μ . При соответствующих температурах ферромагнетики могут превращаться в парамагнетики. Соответствующие такому превращению температуры называются *точкой Кюри* (T_K).

К диамагнетикам относятся: вода, мрамор, золото, ртуть, медь, инертные газы. К парамагнетикам относятся: щелочные металлы, кислород, алюминий, платина. К мягким ферромагнетикам относятся: железо, пермаллой (сплав) и другие материалы. К жестким ферромагнетикам относятся некоторые стали и специальные сплавы (например – самарий-кобальтовые).

2.2. Вопросы для самоконтроля

1. В чем заключается явление электромагнитной индукции?
2. Что является причиной возникновения ЭДС индукции в замкнутом проводящем контуре? От чего и как зависит ЭДС индукции, возникающая в контуре?
3. Почему для обнаружения индукционного тока лучше использовать замкнутый проводник в виде одного витка провода?
4. Сформулируйте правило Ленца для индукционного тока, проиллюстрировав его примерами.
5. Возникает ли индукционный ток в проводящей рамке, поступательно движущейся в однородном магнитном поле?
6. Какова природа ЭДС электромагнитной индукции?
7. В чем заключаются явления самоиндукции и взаимной индукции?
8. Когда ЭДС самоиндукции больше – при замыкании или размыкании цепи постоянного тока?
9. Напряженность магнитного поля возросла в 2 раза. Как изменилась объемная плотность энергии магнитного поля?
10. Что такое диамагнетики? Парамагнетики? В чем различие их магнитных свойств?
11. Объясните петлю гистерезиса ферромагнетика.
12. Каков механизм намагничивания парамагнетиков и ферромагнетиков?
13. Что скрывается под физическим понятием «точка Кюри»?

2.3. Методические указания к практическим занятиям

Задачи	Рекомендации
<p>1. Задачи на определение ЭДС индукции, индукционного тока при взаимодействии проводников с магнитным полем</p>	<p>1. При решении задач типа 1 необходимо рассмотреть возможные варианты (структуры проводников), способы изменения токосцепления контуров, приводящих к появлению ЭДС индукции, индукционных токов; подчеркнуть применимость закона Фарадея в его общем варианте для любых случаев возбуждения индукционных токов. Необходимо научиться графическому отображению зависимостей ЭДС индукции индукционных токов от времени с учетом их направлений по функциям внешнего магнитного поля от времени</p>
<p>2. Задачи на определение индуктивности проводников, взаимной индуктивности, энергии и плотности энергии магнитного поля, создаваемого в индуктивных элементах при протекании в них тока</p>	<p>2. Задачи типа 2 целесообразно решать для систем, находящихся применение в практической деятельности: соленоиды, трансформаторы, электромагнитные индукторы и других. Определение индуктивности и взаимной индуктивности целесообразно осуществлять с использованием токов и параметров магнитных полей с приближением содержания задачи к методам экспериментального определения индуктивностей. При решении задач на определение энергии и плотности энергии целесообразно использовать индуктивные структуры не только с однородным полем (соленоиды), но и с неоднородным полем; необходимо также через понятие эквивалентности работы и энергии научить студентов определять источник, энергия которого преобразуется в энергию магнитного поля</p>
<p>3. Задачи на определение зависимости тока от времени в цепях с индуктивностью при их коммутации, энергии в таких цепях, на определение собственных частот LC-контуров, временных зависимостей U и I в них</p>	<p>3. При решении задач типа 3 необходимо сформировать понятие переходного процесса в электрических цепях с индуктивностью; научиться рассчитывать переходной процесс; энергию, выделяющуюся в цепи в переходном процессе. Целесообразно предложить задачи на использование переходного процесса для формирования распределенного электрического поля (как в индукционных ускорителях), для преобразования низкого напряжения в высокое</p>
<p>4. Задачи на определение силового воздействия внешнего магнитного поля на тела из диаманетиков, парамагнетиков, ферромагнетиков</p>	<p>4. Основной целью рассмотрения задач типа 4 является анализ силового взаимодействия диаманетиков, парамагнетиков и ферромагнетиков с магнитным полем. В основу анализа могут быть положены модели замкнутых токов в контурах двух типов: токи индуцированные и токи от источников ЭДС. Магнитные поля следует рассматривать стационарные, однородные, неоднородные, изменяющиеся. Для анализа взаимодействия целесообразно использовать понятия магнитных моментов и вектора намагничивания. Анализ и задачи могут быть качественными</p>

2.4. Примеры решения задач

Пример 1.

Соленоид длиной 20 см и диаметром 4 см имеет плотную трехслойную обмотку из провода диаметром 0,1 мм. По обмотке соленоида течет ток 0,1 А. Зависимость $B = f(H)$ для материала сердечника приведена на рис. 2.9. Определите: 1) напряженность; 2) индукцию поля в соленоиде; 3) магнитную проницаемость сердечника; 4) индуктивность соленоида; 5) энергию поля соленоида; 6) его объемную плотность энергии.

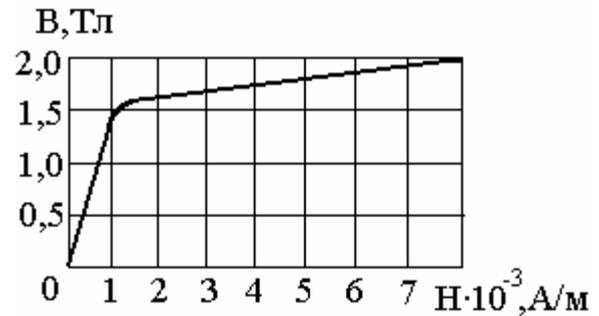


Рис. 2.9

Решение. Поле внутри соленоида можно считать однородным. В этом случае напряженность поля $H = In$, где $n = \frac{N}{d}$ – число витков, приходящихся на единицу длины соленоида; N – число слоев обмотки; d – диаметр провода.

$$\text{Тогда } H = \frac{IN}{d} = \frac{0,1 \text{ А} \cdot 3}{1 \cdot 10^{-4} \text{ м}} = 3000 \text{ А/м}.$$

По графику $B = f(H)$ находим, что напряженность 3000 А/м соответствует индукция 1,7 Тл.

Используя связь между индукцией и напряженностью $B = \mu\mu_0 H$, определим магнитную проницаемость $\mu = \frac{B}{\mu_0 H}$.

Индуктивность соленоида $L = \mu\mu_0 n^2 l S$, где l – длина; $S = \frac{\pi D^2}{4}$ – площадь поперечного сечения соленоида.

$$\text{Учитывая, что } n = \frac{N}{d}, \text{ получаем } L = \mu\mu_0 \frac{N^2}{d^2} l \frac{\pi D^2}{4}.$$

$$\text{Объемная плотность энергии магнитного поля } \omega = \frac{BH}{2}.$$

$$\text{Энергия магнитного поля соленоида } W = \omega Sl, \quad W = \frac{LI^2}{2}.$$

Проведем вычисления:

$$\mu = \frac{1,7 \text{ Тл}}{12,56 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м} \cdot 3000 \text{ А/м}} = 450;$$

$$L = \frac{450 \cdot 12,56 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м} \cdot 3^2 \cdot 0,2 \text{ м} \cdot 3,14 \cdot 4^2 \cdot 10^2 \text{ м}^2}{4 \cdot 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 128 \text{ Гн};$$

$$\omega = \frac{1,7 \text{ Тл} \cdot 3000 \text{ А/м}}{2} = 2550 \text{ Дж/м}^3; W = 128 \text{ Гн} \cdot 10^{-2} \text{ А}^2 \cdot 0,5 = 0,64 \text{ Дж}.$$

Пример 2.

На соленоид (см. условие и решение примера 1) надето изолированное кольцо того же диаметра. Определить: 1) ЭДС индукции в кольце; 2) ЭДС самоиндукции в соленоиде, если за 0,01 с ток в его обмотке равномерно снижается до нуля.

Решение. По условию за промежуток времени $\Delta t = 0,01$ сила тока в обмотке соленоида равномерно уменьшается от 0,1 А до нуля, поэтому магнитный поток, пронизывающий площадь кольца $S = \frac{\pi D^2}{4}$, уменьшается от $\Phi_1 = BS$ до $\Phi_2 = 0$.

Возникающая в кольце электродвижущая сила индукции $\varepsilon_{\text{инд}}$

$$\varepsilon_{\text{инд}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta t} = \frac{\Phi_1}{\Delta t} = \frac{B\pi D^2}{4\Delta t}.$$

Электродвижущая сила самоиндукции ε_c , возникающая в соленоиде при выключении тока в нем, $\varepsilon_c = -L \frac{dI}{dt}$. Так как при выключении сила тока уменьшается до нуля равномерно, то

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{I_2 - I_1}{\Delta t} = -\frac{I_1}{\Delta t}.$$

Тогда $\varepsilon_c = \frac{LI_1}{\Delta t}$.

$$\varepsilon_{\text{инд}} = \frac{1,7 \text{ Тл} \cdot 3,14 \cdot 16 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2}{4 \cdot 10^{-2} \text{ с}} = 0,2 \text{ В};$$

$$\varepsilon_c = \frac{128 \text{ Гн} \cdot 0,1 \text{ А}}{0,01 \text{ с}} = 1280 \text{ В}.$$

Пример 3.

По соленоиду течет ток силой 5 А. Длина соленоида 1 м, число витков 500. В соленоид вставлен железный сердечник. Найдите: 1) намагниченность; 2) объемную плотность энергии магнитного поля соленоида. Зависимость $B = f(H)$ дана на рис. 2.9 в примере 1.

Решение. Намагниченность определяется отношением магнитного момента к объему магнетика и связана с напряженностью магнитного поля соотношением

$$j = \chi H, \quad (1)$$

где χ – магнитная восприимчивость среды.

Поле соленоида можно считать однородным. В этом случае напряженность поля вычисляется по формуле

$$H = In,$$

где I – сила тока, текущего по обмотке соленоида; $n = \frac{N}{l}$ – число витков, приходящихся на единицу длины соленоида.

Тогда $H = \frac{IN}{l}$. Связь между магнитной восприимчивостью χ и магнитной проницаемостью μ среды выражается формулой

$$\chi = \mu - 1. \quad (2)$$

Используя соотношение $B = \mu\mu_0 H$, находим $\mu = \frac{B}{\mu_0 H}$. Объемная плотность энергии магнитного поля соленоида $\omega = \frac{BH}{2}$.

$$\text{Проведем вычисления: } H = 5 \text{ А} \cdot \frac{500}{1 \text{ м}} = 2500 \text{ А/м}.$$

По графику (см. пример 1) находим, что напряженности $H = 2500 \text{ А/м}$ соответствует индукция магнитного поля $B = 1,6 \text{ Тл}$

$$\mu = \frac{1,6 \text{ Тл}}{12,6 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м} \cdot 2500 \text{ А/м}} = 500.$$

Согласно формуле (2) имеем $\chi = 500 - 1 = 499$.

Определим намагниченность по формуле (1)

$$j = 499 \cdot 2500 \text{ А/м} = 124,75 \cdot 10^4 \text{ А/м} \approx 12,5 \cdot 10^5 \text{ А/м}.$$

$$\omega = 1,6 \text{ Тл} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2500 \text{ А/м} = 2 \cdot 10^3 \text{ Дж/м}^3.$$

Пример 4.

В неоднородном магнитном поле (рис. 2.10) находится кольцо с радиусом 10 см, по которому течет ток так, как показано на рис. 2.10, силой 0,1 А. В плоскости кольца в точках, где находится кольцо, вектор \vec{B} направлен под углом 45° к плоскости кольца, а модуль его равен 0,1 Тл. Определите силу, которая определяет движение кольца с током.

Решение. Рассмотрим взаимодействие элемента кольца dl с компонентами магнитного поля B_x и B_y . Компонента B_x действует на элемент dl

с силой F_x , которая направлена для каждого элемента кольца перпендикулярно к нему и от центра кольца

$$F_x = I \cdot B_x dl.$$

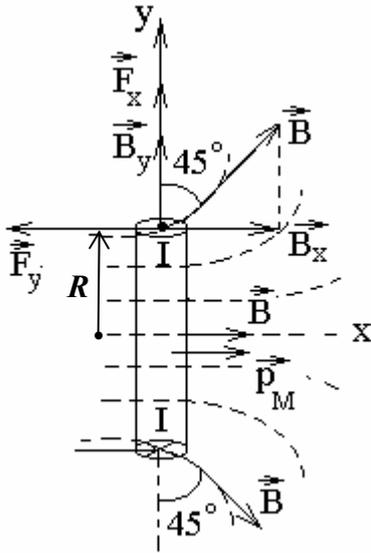


Рис. 2.10

Так как каждому элементу кольца dl найдется диаметрально противоположный элемент dl с обратным направлением тока. Все силы dF для кольца в целом взаимно уравниваются и не могут вызвать его движения (случай симметрии кольца относительно силовых линий поля, как показано на рис. 2.10).

Компонента B_y обеспечивает силу dF_y , действующую на элемент кольца dl

$$dF_y = IB_y dl$$

и направленную в область магнитного поля с большим значением \vec{B} . Действующая на кольцо полная сила F_y равна

$$F_y = \oint_l dF_y = I \cdot B_y \cdot 2 \cdot \pi \cdot R.$$

Величина $B_y = B \cos 45^\circ$, следовательно

$$F_y = 2\pi RIB \cos 45^\circ = 6,28 \cdot 0,1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0,1 \cdot 0,1 = 4,46 \cdot 10^6 \text{ Н}.$$

Силу F_y можно связать с магнитным моментом кольца p_M , сонаправленного с \vec{B} в центре кольца

$$p_M = IS_k = I\pi R^2; \quad F_y = \frac{2B_y p_M}{R}.$$

Из решения задачи следует: если некоторый объект (например, атом вещества), обладающий магнитным моментом (парамагнетики и ферромагнетики), поместить в неоднородное магнитное поле, то вначале произойдет ориентация объекта (p_M его станет сонаправленным с \vec{B}); затем объект начнет двигаться в область наибольшей индукции магнитного поля.

2.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Сила тока в соленоиде равномерно возрастает от 0 до 10 А за 1 мин, при этом соленоид накапливает энергию 20 Дж. Какая ЭДС индуцируется в соленоиде?

2. В однородном магнитном поле с индукцией $0,01$ Тл под углом 30° к полю расположена медная квадратная рамка со стороной $0,5$ м. Диаметр провода $0,2$ мм. Рамку повернули перпендикулярно полю. Какое количество электричества индуцировалось в рамке?
3. В однородном магнитном поле с индукцией 1 Тл движется прямолинейный проводник длиной 10 см со скоростью 10 м/с. Направление вектора индукции перпендикулярно проводнику и вектору скорости его. Концы проводника соединены гибким проводом вне поля. Общее сопротивление цепи 10 Ом. Определите мощность, необходимую для движения проводника.
4. С какой скоростью движется перпендикулярно магнитному полю напряженностью 1 кА/м ($\mu = 1$) прямой проводник длиной 20 см и сопротивлением $0,1$ Ом, если при замыкании проводника по нему идет ток силой $0,05$ А. Сопротивление замыкающего провода не учитывается.
5. Найдите индуктивность соленоида, если при скорости изменения силы тока 20 А/с среднее значение возникающей ЭДС самоиндукции $0,04$ В.
6. Определите индуктивность соленоида с железным сердечником, магнитный поток и энергию в нем, если по соленоиду длиной 30 см идет ток силой 3 А, диаметр соленоида 6 см и на каждый сантиметр длины приходится 10 витков. Зависимость индукции от напряженности магнитного поля показана на рис. 2.9 в примере 1.
7. Соленоид без сердечника с обмоткой из проволоки диаметром 1 мм имеет длину 1 м и поперечное сечение 40 см². Определите силу тока, текущего по обмотке при напряжении 25 В, если за время $0,001$ с в обмотке выделяется столько же теплоты, какова энергия поля соленоида.
8. В соленоид длиной 30 см, имеющий число витков 900 , введен магнитный сердечник. Найдите намагниченность железа внутри соленоида, если по нему идет ток силой 1 А. Зависимость $B = f(H)$ дана на рис. 2.9 в примере 1.
9. По соленоиду длиной $0,5$ м имеющему 250 витков, течет ток силой 5 А. Площадь поперечного сечения 25 см². В соленоид вставлен железный сердечник. Найдите энергию магнитного поля соленоида. Зависимость $B = f(H)$ дана на рис. 2.9 в примере 1.
10. По соленоиду (длина $0,2$ м, площадь поперечного сечения 10 см² и число витков 800) течет ток силой 1 А. Соленоид находится в диамагнитной среде, его индуктивность $0,4$ мГн. Найдите магнитную индукцию внутри соленоида и намагниченность.

3. УЧЕБНЫЙ БЛОК «ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАКСВЕЛЛА»

Введение

Учебно-методический блок содержит краткие базовые сведения об обобщенной теории электромагнетизма Максвелла и имеет целью ознакомить с ней студентов.

Содержание блока рассматривается как основа для более глубокого теоретического изучения теории электромагнитных явлений.

Для успешного усвоения материала данного блока студент должен **знать:**

- законы электромагнитной индукции;
- понятия потока вектора, циркуляции вектора;
- теоремы Остроградского – Гаусса, полного тока;

иметь представление:

- о вихревых и индукционных токах;
- о криволинейных и поверхностных интегралах;
- о дифференциальных уравнениях в частных производных.

Учебная программа блока

Содержание блока	Форма подготовки	Литература
1. Гипотеза Максвелла о вихревом электрическом поле. Первое уравнение Максвелла	лекция	[6, § 2.54 – 2.60] [7, § 16.5.1 – 16.5.4]
2. Ток смещения. Второе уравнение Максвелла	лекция	[10, § 137 – 139]
3. Третье и четвертое уравнения и полная система уравнений Максвелла для электромагнитного поля	лекция	[15, § 9.1 – 9.4] [17, § 150 – 153] [19, § 191 – 192]

3.1. Краткое содержание теоретического материала

Вихревое электрическое поле

Теория Максвелла

Анализируя связь между величинами электрического и магнитного поля, и обобщая результаты опытов Эрстеда и Фарадея, Максвелл создал теорию электромагнитного поля. Теория Максвелла с единой точки зрения позволяет объяснить свойства электрических и магнитных полей. Основные закономерности электромагнитных явлений описываются уравнениями Максвелла, и они составляют основу как электротехники и радиотехники, так и теории любых электромагнитных явлений.

В теории решена основная задача электродинамики – по заданному распределению зарядов и токов определяются характеристики создаваемых ими электрических и магнитных полей. Уравнения Максвелла не раскрывают механизма взаимодействия среды и поля. Среда описывается с помощью трех величин: диэлектрической проницаемости ϵ , магнитной проницаемости μ и удельной электрической проводимости σ . Теория Максвелла – теория близкодействия, согласно которой электрические и магнитные взаимодействия распространяются с конечной скоростью, равной скорости света в данной среде. В основе теории лежат два положения:

1. всякое переменное электрическое поле порождает вихревое магнитное поле;
2. всякое переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле.

Вихревое электрическое поле

Исследования явления электромагнитной индукции показали, что переменное магнитное поле порождает в проводниках индуцированные ЭДС и токи. Если магнитное поле постоянно, то индуцированных токов и ЭДС не возникает. Отсюда следует, что заряды в проводниках и сами проводники не являются обязательным условием возникновения индуцированного электрического поля, как в случае электростатического поля. Силовые линии индуцированного электрического поля не начинаются и не заканчиваются на зарядах, а замкнуты сами на себя, подобно силовым линиям магнитного поля. Это означает, что индуцированное электрическое поле, подобно магнитному, является вихревым.

Если неподвижный проводник поместить в переменное магнитное поле, то в нем индуцируется ЭДС. Электроны приводятся в направленное движение электрическим полем, индуцированным переменным магнитным полем, возникает индуцированный электрический ток. В этом случае проводник является лишь индикатором индуцированного электрического поля. Индуцированное электрическое поле приводит в движение свободные электроны в проводнике и тем самым обнаруживает себя. Максвелл выдвинул гипотезу, что индуцированное электрическое поле возникает в области переменного магнитного поля и в отсутствии вещественных зарядоносителей. Согласно этой гипотезе сущность явления электромагнитной индукции заключается не столько в появлении индуцированного тока, сколько в возникновении вихревого электрического поля. Эта фундаментальная гипотеза электродинамики сформулирована Максвеллом как обобщение законов электромагнитной индукции Фарадея.

В отличие от электростатического поля индуцированное электрическое поле не является потенциальным, так как работа, совершаемая в индуцированном электрическом поле при перемещении единичного положительного заряда по замкнутому контуру, равна ЭДС индукции, а не нулю.

Направление вектора напряженности вихревого электрического поля устанавливается в соответствии с законом электромагнитной индукции Фарадея и правилом Ленца

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt},$$

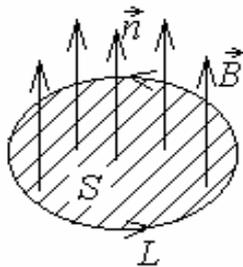


Рис. 3.1

где $\Phi = \int_S B_n dS$ – поток магнитной индукции \vec{B} сквозь площадь S , ограниченную рассматриваемым контуром L (рис. 3.1).

Согласно определению электродвижущей силы $\varepsilon = \int_L E_{cm} dL$, где E_{cm} – напряженность поля сторонних сил.

В явлении электромагнитной индукции этой величиной является напряженность вихревого электрического поля, поэтому

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\oint_L E dL. \quad (1)$$

Первое уравнение Максвелла

Уравнение (1) выражает количественную связь между изменяющимся магнитным полем \vec{B} и вихревым электрическим полем \vec{E} .

Циркуляция вектора напряженности электрического поля по любому замкнутому контуру (правая часть (1)) пропорциональна скорости приращения магнитного потока сквозь любую поверхность, ограниченную данным контуром.

При этом циркуляция электрического поля и скорость приращения магнитного потока имеют противоположные знаки

$$\oint_L E dL = -\int_S \frac{\partial B}{\partial t} dS. \quad (2)$$

Уравнение (2) отображает в интегральной и более детализированной форме уравнение (1) и является первым уравнением Максвелла.

Ток смещения. Второе уравнение Максвелла

Ток смещения

При рассмотрении постоянного и переменного токов в проводнике имеют место физические эффекты, которые, как правило, отличаются друг

от друга. Например, когда по проводнику проходит постоянный ток, то линии тока всегда замкнуты. Обратимся к процессу прохождения переменного тока по цепи, содержащей конденсатор.

Заряды в конденсаторе не могут перемещаться с одной пластины на другую. Это приводит к тому, что линии тока обрываются у поверхности пластины конденсатора, в результате чего ток проводимости, текущий по проводнику, соединяющему обкладки конденсатора, оказывается разомкнутым. До сих пор мы исходили из представления, что электрические токи представляют собой движение электрических зарядов по проводникам и что плотность их определяется электропроводимостью проводника. В конденсаторе одна из обкладок его имеет положительный заряд с поверхностной плотностью $(+\sigma)$, другая – отрицательный с поверхностной плотностью $(-\sigma)$ (рис. 3.2). При разряде конденсатора через проводник, соединяющий обкладки, ток течет от обкладки M к N .

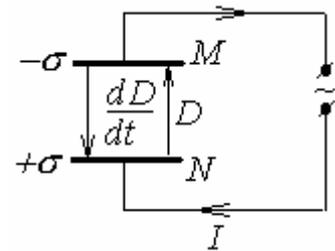


Рис. 3.2

Плотность тока j внутри обкладки конденсатора определяется производной по времени от плотности электрического заряда

$$j = \frac{d\sigma}{dt}. \quad (3)$$

Ток данной плотности течет от обкладки M конденсатора. Обратимся теперь к тому, что происходит в это время между обкладками конденсатора. Как известно, электрическое смещение (индукция) поля связано с напряженностью соотношением

$$D = \epsilon_0 \epsilon E, \quad (4)$$

а напряженность поля внутри конденсатора

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}. \quad (5)$$

Объединяя формулы (4) и (5), мы получаем, что электрическая индукция между обкладками конденсатора определяется выражением

$$D = \sigma. \quad (6)$$

При разряде конденсатора со временем изменяется поверхностная плотность σ заряда пластин конденсатора. В соответствии с формулой (6) изменяется и электрическая индукция D

$$\frac{dD}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}. \quad (7)$$

Так как вектор электрического смещения поля направлен от положительно заряженной пластины N к отрицательно заряженной пластине M , то при разряде конденсатора быстрота изменения электрической индукции отрицательна и направлена в сторону, противоположную вектору \vec{D} .

Из сказанного следует, что направление вектора $\frac{d\vec{D}}{dt}$ совпадает с направлением тока в цепи, в которую включен конденсатор. Как видно из уравнений (3) и (7), плотность электрического тока j и величина $\frac{dD}{dt}$ равны между собой.

Максвелл назвал величину $\frac{dD}{dt}$ *плотностью тока смещения*:

$$j_{\text{см}} = \frac{dD}{dt}.$$

Таким образом, *ток смещения* – это скорость изменения электрического смещения, определяемого по формуле

$$D = \varepsilon_0 E + P,$$

где E – напряженность электрического поля; P – поляризованность диэлектрика в конденсаторе.

Плотность тока смещения можно записать в виде

$$j_{\text{см}} = \frac{dD}{dt} = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} + \frac{dP}{dt},$$

где $\varepsilon_0 \frac{dE}{dt}$ – плотность тока смещения в вакууме; $\frac{dP}{dt}$ – плотность тока поляризации, т.е. упорядоченного движения электрических зарядов в диэлектрике.

Так как в силу непрерывности тока числовые значения плотности тока смещения $j_{\text{см}}$ и плотности тока проводимости j равны, то линии плотности тока проводимости внутри проводника (естественно, включая и пластины конденсатора) непрерывно переходят в линии плотности тока смещения между обкладками конденсатора. Чтобы ток был замкнут, вводится понятие *полного тока*, который включает в себя сумму тока проводимости и тока смещения, т.е. плотность полного тока равна:

$$j_{\text{полн}} = j + \frac{dD}{dt}.$$

Таким образом, ток смещения (по сути – переменное электрическое поле) подобно току проводимости, порождает магнитное поле, силовые линии которого замкнуты.

Максвелл, обобщая закон полного тока $\oint_L H_L dL = \int_S j_{\text{полн}} dS$ и вводя в правую часть кроме тока проводимости также ток смещения, записал уравнение, получившее название *второе уравнение Максвелла*

$$\oint_L H_L dL = \int_S \left(j + \frac{dD}{dt} \right) dS.$$

Система уравнений Максвелла

В систему уравнений Максвелла, кроме двух описанных выше, входит также теорема Гаусса для электрического и магнитного полей.

Теорема Гаусса для электрического поля с индукцией \vec{D} имеет вид:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q. \quad (8)$$

В случае распределенного заряда внутри замкнутой поверхности с объемной плотностью ρ выражение (8) имеет более обобщающий вид

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho \cdot dV.$$

Теорема Гаусса для магнитного поля с индукцией \vec{B} имеет вид

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

Полная система уравнений в интегральной форме

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho \cdot dV;$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{L} = - \int_S \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{S};$$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0;$$

$$\oint_L \vec{H}_L d\vec{L} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) d\vec{S}.$$

Первые два уравнения свидетельствуют о том, что электрическое поле возникает как в области с неподвижными зарядами, так и в том случае, когда происходит изменение потока индукции магнитного поля во времени.

Вторые два уравнения показывают, что магнитное поле является вихревым и возникает лишь при наличии электрических токов или изме-

нящегося во времени электрического поля или того и другого одновременно, т.е. никаких магнитных зарядов не существует.

Из уравнений Максвелла следует, что электрические и магнитные поля являются проявлением единого электромагнитного поля.

Обычно к системе уравнений Максвелла присоединяют формулы, выражающие связь между \vec{E} и \vec{D} , \vec{B} и \vec{H}

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}.$$

Эта система уравнений достаточна для описания всех электромагнитных явлений, в которых не проявляются квантовые закономерности.

Физическая сущность уравнений Максвелла заключается в том, что:

1. электромагнитное поле можно разделить на электрическое и магнитное лишь относительно;
2. изменяющееся магнитное поле порождает электрическое поле, а изменяющееся электрическое поле порождает магнитное; причем эти поля взаимосвязаны.

Из уравнений Максвелла следует, что электромагнитное поле способно существовать в отсутствие электрических зарядов и токов. Изменение его состояния имеет волновой характер, т.е. является электромагнитной волной. Электромагнитная волна в вакууме распространяется со скоростью света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Опыты Г. Герца и изобретение радио А.С. Поповым подтвердили теоретическое предсказание Максвелла.

Уравнения Максвелла стоят в одном ряду с такими законами природы, как законы механики Ньютона, начала термодинамики.

В современной физике электромагнитное поле рассматривается как особый вид материи, к которой применимы важнейшие понятия физики — энергия, импульс, масса.

УЧЕБНЫЙ МОДУЛЬ № 6 «ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ И ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ»

Введение

В данном модуле рассмотрены волновые процессы в упругих средах и электромагнитные волны (свет). Особенности электромагнитных (световых) волн рассматриваются на основе волновой оптики (распространение света в веществе, поляризация света, интерференция и дифракция).

Объединение механических и электромагнитных волн в одном модуле обусловлено возможностью единого подхода к их описанию, не смотря на различие их физической сути. Это позволяет значительно сократить бюджет времени для изучения волновых процессов.

Модуль состоит из четырех учебных блоков. В первом рассматриваются вопросы общие для волновых процессов. Во втором кратко рассматриваются основы геометрической оптики. В третьем изложены основы явлений интерференции и дифракции света. В четвертом представлены явления и законы поляризации света.

Учебно-методическая структура модуля

1. Учебный блок «Волновые процессы»	2. Учебный блок «Геометрическая оптика»	3. Учебный блок «Волновая оптика»	4. Учебный блок «Поляризация света»
<ul style="list-style-type: none"> – распространение упругих колебаний; волна; – параметры и уравнения волны; – свет – электромагнитная волна; – дисперсия волн; – энергия упругой волны; – отражение и преломление упругих волн; – стоячие волны; – звуковые волны; – эффект Доплера 	<ul style="list-style-type: none"> – законы отражения и преломления света; – плоские и сферические зеркала; – линзы 	<ul style="list-style-type: none"> – интерференция света; – дифракция света; – дисперсия света; – понятие о голографии 	<ul style="list-style-type: none"> – естественный и поляризованный свет; – степень поляризации; – закон Малюса; – поляризация света при двойном лучепреломлении; – дихроизм; – интенсивность отраженных и преломленных лучей; – поляризация света при отражении и преломлении на поверхности диэлектриков; явление и закон Брюстера; – вращение плоскости поляризации

Методическая программа модуля

Тема занятия	Тип занятия	Вид занятия	Часы
1. Распространение колебаний в упругих средах. Распространение электромагнитных колебаний. Параметры волны	Формирование новых знаний	лекция	1
2. Уравнение волны. Энергия волны, поток энергии. Дисперсия волн	Формирование новых знаний	лекция	2
3. Волновые процессы	Углубление и систематизация навыков	практ. занятие	2
4. Геометрическая оптика, оптические элементы	Систематизация знаний и формирование новых знаний	лекция	1
5. Волновая оптика, интерференция света	Формирование новых знаний	лекция	2
6. Интерференция света	Формирование новых навыков	практ. занятие	3
7. Волновая оптика, дифракции Френеля и Фраунгофера	Формирование новых знаний	лекция	2
8. Дифракция света	Формирование новых навыков	практ. занятие	3
9. Поляризация света	Формирование новых знаний	лекция	2
10. Законы Малюса, Брюстера. Вращение плоскости поляризации	Формирование новых навыков	практ. занятие	2
11. Геометрическая и волновая оптика (из перечня лабораторных работ)	Систематизация и формирование новых навыков	лабор. работа	4
12. Волновая оптика, поляризация света (из перечня лабораторных работ)	Систематизация и формирование новых навыков	лабор. работа	4

1. УЧЕБНЫЙ БЛОК «ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ»

Введение

В природе существуют процессы, в которых состояние физического объекта, непрерывно изменяясь во времени, периодически повторяется.

Данные процессы – колебания – были рассмотрены в модулях № 1 и № 2. Если совершающий колебания физический объект является частью системы взаимодействующих объектов, то в такой системе, например в веществе (упругой среде), колебания распространяются по всей среде с некоторой скоростью. Этот процесс называется волновым.

В данном разделе рассматриваются общие уравнения волновых процессов, примеры использования этих уравнений при распространении волн и взаимодействии волн с веществом. Независимо от природы волн для описания волновых процессов применяется общая терминология.

При изучении данного раздела студенты должны

иметь представление:

– о способах описания колебательного движения в механике и электромагнетизме;

– об основных механических характеристиках движения и связях между ними;

– о принципе суперпозиции в механике и электромагнетизме;

обладать навыками:

– определения механических характеристик движения (скорости, ускорения, импульса, энергии) по заданному уравнению движения;

– определения параметров результирующего колебания, как результата суперпозиции нескольких колебаний.

Учебная программа блока

Содержание блока	Форма подготовки	Литература
1. Волновое уравнение. Свет как электромагнитная волна	лекция	[3], [7], [9]
2. Скорость распространение упругих волн	лекция	[9]
3. Дисперсия волн	лекция	[3], [9]
4. Энергия упругой волны	лекция	[7]
5. Отражение и преломление упругих волн	лекция	[9]
6. Интерференция и дифракция волн. Стоячие волны	лекция	[7], [9]
7. Звуковые волны	лекция	[3], [9]
8. Эффект Доплера	лекция	[9]

Цели обучения

студент должен знать	студент должен уметь
<ul style="list-style-type: none"> – виды волнового уравнения и основные характеристики волны (скорость, длина волны, волновой вектор, энергия, вектор Умова); – причины возникновения упругих волн, их параметры и виды; – причины возникновения дисперсии, различие фазовой и групповой скоростей; – особенности отражения волн от границы раздела; – принцип Гюйгенса 	<ul style="list-style-type: none"> – определять вид волновой поверхности; – определять характеристики волны по заданному уравнению волны; – составлять уравнение волны по заданным характеристикам волны; – определять фазовую и групповую скорости; – определять частоты упругих волн в условиях эффекта Доплера

1.1. Краткое содержание теоретического материала

Волновое уравнение

Рассмотрим упрощенно формирование волны в упругой среде. Пусть имеется плоская система упруго связанных материальных точек (упругая среда), лежащая в системе координат (X, Y) . Пусть материальная точка, лежащая в начале координат, начинает колебания вдоль оси Y в момент $t = 0$ (рис. 1.1).

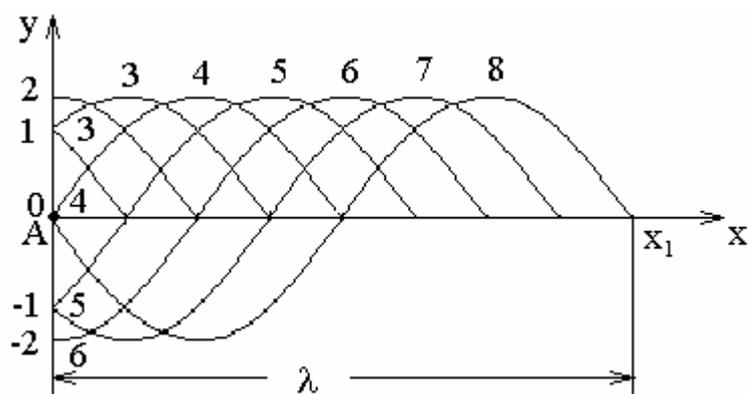


Рис. 1.1

Через некоторое время t_1 точка A перемещается в положение 1, смещая вверх рядом лежащие точки среды, согласно кривой 1. Через время t_2 точка A оказывается в положении 2, а смещение частиц среды характеризуется кривой 2. Если положение 2 соответствует амплитуде колебаний точки A , то за время t_3 точка A сместится в обратном направлении в положение 1, а положение точек среды будет характеризоваться кривой 3. Далее точка A смещается в положение 0, а возмущение среды характеризуется кривой 4.

Далее:

- А в положении (-1) , кривая 5;
- А в положении (-2) , кривая 6;
- А в положении (-1) , кривая 7;
- А в положении (0) , кривая 8.

Таким образом точка А завершает одно колебание относительно начала координат и возмущение среды (смещение точек среды относительно оси X соответствует кривой 8, которая показывает, что процесс колебаний точек среды (по оси Y) за один период T колебаний точки А распространился вдоль оси X на расстояние x_1 . Это расстояние называется длиной волны λ . При продолжении колебаний точки А, рассмотренная ситуация будет повторяться вдоль X .

Очевидно, что возмущение среды, если она объемная, будет распространяться во всех направлениях. Однако рассмотренного упрощенного примера достаточно для понимания возбуждения волны в упругой среде. Из примера также ясно, что частицы среды, в которой распространяется волна, не вовлекаются в поступательное движение вдоль направления распространения волны, а лишь совершают колебания относительно своих положений равновесия (невозмущенных состояний).

В зависимости от направления колебаний частиц среды относительно направления распространения волны подразделяют на *поперечные* (рис. 1.1) и *продольные*. В продольной волне частицы совершают колебания вдоль направления распространения волны.

Геометрическое место точек, до которых распространяется возмущение среды к моменту времени t (например точка x_1 на рис. 1.1) называется фронтом волны (волновым фронтом). Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется волновой поверхностью. Волновой фронт является частным случаем волновой поверхности. Если волновые поверхности имеют вид плоскости – волна называется *плоской*. Если волновая поверхность – сфера, то волна называется *сферической*. Волновые поверхности могут иметь различные виды, и форма их зависит от характера анизотропии упругих свойств среды в различных направлениях.

Упругие поперечные волны могут возникать лишь в средах, обладающих сопротивлением сдвигу. Поэтому поперечные и продольные волны могут возникать в твердых телах. В жидких и газообразных средах возникают только продольные волны. В жидких средах возможно также образование поверхностных волн.

Для получения волнового уравнения введем некоторые количественные характеристики волны. Так, **длина волны** λ

$$\lambda = uT$$

или (с учетом $T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$)

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{2\pi u}{\omega},$$

где u – скорость распространения волны; ν – частота колебаний (ω – циклическая частота). Пусть в некоторой точке среды с координатой $x = 0$ происходит гармоническое колебательное движение с частотой ω

$$\xi = a \cos \omega t,$$

где a – амплитуда колебания; ξ – отклонение от равновесия в момент t .

В точку x данное колебание переместится спустя время $\tau = \frac{x}{u}$, поэтому

для x можно записать

$$\xi = a \cos \omega \left(t - \tau \right) = a \cos \omega \left(t - \frac{x}{u} \right). \quad (1)$$

Выражение (1) представляет собой уравнение плоской монохроматической волны, распространяющейся вдоль оси x . Величина $\omega \left(t - \frac{x}{u} \right)$ (или $2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$) называется **фазой волны**. С учетом начальной

фазы φ_0 фазу волны можно записать в виде $\varphi = \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0$. Начальная фаза φ_0 определяется так же, как и для колебаний осциллятора – источника волны. Часто для упрощения описания волны, начало отсчета времени и начало отсчета координаты выбирают так, чтобы φ_0 была равна нулю.

Как следует из (1) в волновом процессе отклонение точки среды от положения равновесия является функцией двух аргументов t и x . Поэтому в частных производных можно записать:

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = -a\omega^2 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \right]; \quad \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{a\omega^2}{u^2} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \right].$$

Используя эти выражения, можно получить дифференциальное уравнение волнового процесса

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Как и уравнение (1), волновое уравнение (2) описывает некоторую волну, распространяющуюся вдоль оси x со скоростью u . Причем u характеризует скорость распространения фазы волны и носит название **фазовой скорости**:

$u = \frac{dx}{dt}$ (скорость перемещения фронта волны или волновой поверхности).

Если ввести величину k

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{uT} = \frac{\omega}{u}, \quad \vec{k} = \frac{\omega}{u} \vec{n}, \quad (3)$$

где \vec{k} – волновой вектор, \vec{n} – единичный вектор, нормальный к волновой поверхности, то уравнение (1) может быть записано в более общем виде

$$\xi = a\omega(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0), \quad (4)$$

\vec{r} – перемещение, на которое распространилась волна в направлении \vec{k} .

При распространении волн в поглощающей энергию среде интенсивность волны с удалением от источника колебаний постепенно уменьшается, т.е. происходит затухание волны. Следовательно, уравнение волны имеет вид

$$\xi = a_0 e^{-\gamma x} \cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

где a_0 – амплитуда в точке $x = 0$, γ – коэффициент затухания, зависящий от свойств среды.

Наряду с плоскими волнами большое практическое значение имеют сферические волны. Фаза колебаний на расстоянии \vec{r} от центра пульсирующего шара радиуса R (источника волны) будет отставать от фазы колебаний на поверхности шара на величину $\frac{r-R}{u}$. Если колебания шара происходят по гармоническому закону с частотой ω , то фаза φ на волновой поверхности с радиусом r будет равна

$$\varphi = \omega \left(t - \frac{r-R}{u} \right) + \varphi_0 = \omega \left(t - \frac{r}{u} \right) + \varphi_0. \quad (5)$$

Амплитуда колебаний сферической волны убывает не только за счет затухания волн в среде, но и в результате увеличения площади поверхности (так как площади dS , на которые опирается телесный угол (рис. 1.2), в котором распространяется доля энергии колебаний, с увеличением r растут). Поэтому уравнение сферической волны без учета затухания имеет вид

$$\xi = \frac{a}{r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{u} \right) + \varphi_0 \right], \quad (6)$$

где a – постоянная, численно равная амплитуде на расстоянии от центра шара $r = 1$ (в отн. единицах).

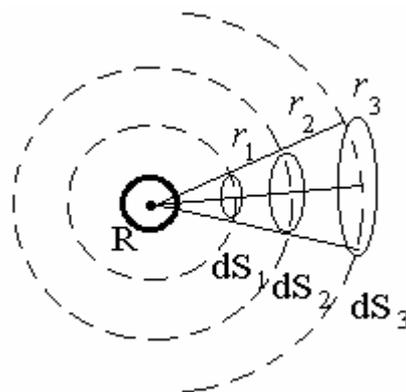


Рис. 1.2

Уравнение для волн, распространяющихся в анизотропной по упругим свойствам среде, имеет вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (7)$$

Решением уравнения (7) является выражение

$$\xi = a \cos[\omega(t - k\vec{r}) + \varphi_0], \quad (8)$$

где $k\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$, причем выполняется условие

$$kx^2 + ky^2 + kz^2 = \frac{\omega^2}{u^2}. \quad (9)$$

Скорость распространения упругих волн

Определим скорость распространения поперечной волны в струне. Выделим элемент струны $\Delta l \ll \lambda$, для него равнодействующая сил натяжения F направлена вниз и равна $F\Delta\alpha$ ($\Delta\alpha$ – малый угол) (рис. 1.3). Ускорение этого элемента можно определить через скорость u вдоль z (по касательной) и радиус кривизны, как $\frac{u^2}{R}$, а массу элемента Δl представить в виде $\rho S \Delta l$, где ρ – плотность материала струны, S – площадь сечения.

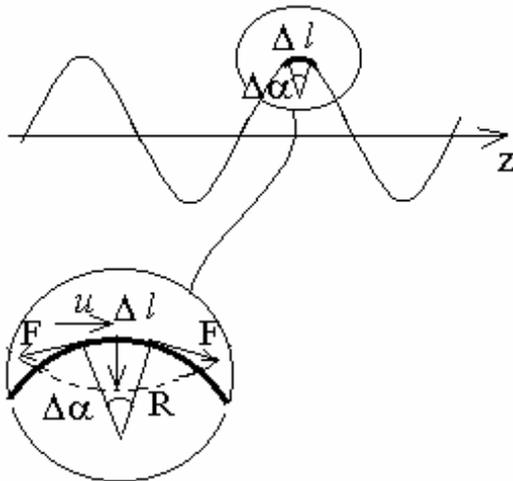


Рис. 1.3

Согласно II закону Ньютона

$$F\Delta\alpha = \rho S \Delta l \frac{u^2}{R}.$$

Учитывая, что $\Delta l = R\Delta\alpha$, получаем выражение для скорости распространения поперечной упругой волны

$$u_{\perp} = \sqrt{\frac{F}{\rho S}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}, \quad (10)$$

где $\sigma = \frac{F}{S}$ – механическое напряжение в струне (модуль сдвига).

Так как в поперечной волне колебания частиц среды осуществляются в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, любое направление колебаний можно разложить на две волны с взаимно перпендикулярными направлениями колебаний частиц среды.

Выражение для скорости распространения продольных волн в стержне

$$u_{II} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (11)$$

где E – модуль Юнга.

В изотропном твердом теле по любому направлению могут распространяться продольная упругая волна со скоростью $u_{II} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ и две поперечные волны со скоростью $u_{\perp} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$.

Скорость поперечных волн меньше скорости продольных волн ($u_{\perp} < u_{II}$). Так, для стали $u_{II} \approx 6000$ м/с, $u_{\perp} \approx 3000$ м/с. Эти различия в скоростях используют, например, для определения положения эпицентра землетрясений в сейсмографах.

В жидкостях возможно распространение лишь продольных волн. Скорость их распространения определяется формулой

$$u_{II} = \sqrt{\frac{k}{\rho}}, \quad (12)$$

где k – модуль всестороннего сжатия, ρ – плотность жидкости (например, в воде $u_{II} \approx 1450$ м/с).

Скорость распространения продольных волн в газообразной среде (звук) определяется выражением

$$u_{II} = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}, \quad (13)$$

где $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ отношение теплоемкости газа при постоянном давлении и теплоемкости газа при постоянном объеме (показатель адиабаты), P и ρ – давление и плотность невозмущенного газа. С учетом уравнения Менделеева – Клапейрона $\frac{P}{\rho} = \frac{RT}{\mu}$ (μ – молярная масса газа, T – абсолютная температура, R – универсальная газовая постоянная) выражение (13) принимает вид

$$u_{II} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}} = \langle v \rangle \sqrt{\frac{\pi\gamma}{8}}, \quad (14)$$

где $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\mu}}$ – средняя скорость теплового движения молекул газа.

При нормальных условиях скорость звука в воздухе составляет $u_{II} \approx 340$ м/с.

Отдельную группу представляют волны на поверхности жидкости. Распространение таких волн обусловлено действием сил тяжести и поверхностного натяжения. Роль этих сил различна для волн разной длины: для достаточно коротких волн, когда кривизна поверхности жидкости велика, преобладающими являются силы поверхностного натяжения, а в случае длинных волн этими силами можно пренебречь. В первом случае волны на воде называются **капиллярными** и представляют собой мелкую рябь. Во втором случае волны называются **гравитационными**.

Для определения скорости капиллярных волн u_{σ} воспользуемся методом анализа размерности. Физическими величинами, от которых может зависеть скорость таких волн, являются коэффициент поверхностного натяжения σ $\left[\frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2} \right]$, плотность воды ρ $\left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]$, длина волны λ [м]. Связь этих величин со скоростью капиллярной волны запишем в виде уравнения

$$u_{\sigma} = C \sigma^x \rho^y \lambda^z,$$

где C – некоторый коэффициент пропорциональности, (x, y, z) – показатели степени, которые должны согласовать размерности левой и правой частей уравнения

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = z = -\frac{1}{2}.$$

$$\frac{\text{м}}{\text{сек}} = \left[\frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{сек}^2} \right]^x \cdot \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]^y \cdot \text{м}^z.$$

Поэтому запишем

$$u_{\sigma} = C \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \lambda}}.$$

$$\text{Точный расчет дает } C = \sqrt{2\pi} \text{ и } u_{\sigma} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}}. \quad (15)$$

При рассмотрении гравитационных поверхностных волн предположим, что скорость их распространения u_g зависит от объема воды, вовлеченного в волновой процесс (от глубины водоема h), ускорения свободного падения g и, возможно, от соотношения глубины и длины волны C (коэффициент пропорциональности). Метод размерности дает выражение

$$u_g = C \sqrt{g\lambda}.$$

Параметр C нельзя определить из анализа размерностей. Параметр C учитывает тот факт, что на очень глубокой воде, когда $\lambda \ll h$, скорость волны не может зависеть от глубины водоема, т.е. волна не возмущает глубокие слои воды. На очень мелкой воде, когда $h \ll \lambda$, скорость распространения волны не должна зависеть от длины волны.

В первом случае: $\lambda \ll h$, $f\left(\frac{\lambda}{h}\right) \approx C$. Следовательно

$$u_g = C_1 \sqrt{g\lambda}, \text{ где } C_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Во втором случае: $h \ll \lambda$, $f\left(\frac{\lambda}{h}\right) = C \sqrt{\frac{h}{\lambda}}$, и $u_g = C_2 \sqrt{gh}$, где $C_2 = 1$.

В общем случае скорость распространения капиллярно-гравитационных волн определяется выражением

$$u = \sqrt{u_\sigma^2 + u_g^2}.$$

Анализ показывает, что на поверхности воды не могут существовать волны, распространяющиеся со скоростью меньшей, чем 23,2 см/с.

Капиллярные волны на поверхности воды – это рябь с длиной волны менее 1 см. Поэтому обычные волны, которые мы наблюдаем на поверхности воды, имеют гравитационную природу. Причем, поскольку скорость их распространения зависит от глубины водоема, то в открытом океане (где глубина достигает нескольких километров) скорость их распространения может достигать сотен метров в секунду (т.е. волна бежит со скоростью самолета).

Дисперсия волн

Под дисперсией волн понимают зависимость скорости распространения волн в среде от длины волны. Дисперсия обнаруживается в ряде физических явлений, в частности в зависимости коэффициента преломления волн на границе диспергирующих сред, в формировании волновых групп, движущихся в среде со скоростью, отличающейся от фазовой скорости волн.

Рассмотрим процесс формирования волновой группы в результате дисперсии. Пусть (для простоты рассмотрения) две волны с близкими длинами волн λ и $\lambda + \Delta\lambda$ распространяются в диспергирующей среде (рис. 1.4) с фазовыми скоростями u и $u + \Delta u$. Пусть в некоторый момент времени в некоторой точке среды фазы волн P и P_1 совпадают (рис. 1.4). Если для этого момента времени осуществить сложение волн (в соответствии с принципом супер-

позиции) в направлениях распространения и обратном, то за счет разности длин волн сдвиг фаз волн в некоторых точках оси x слева и справа от x_0 достигает величины π . В этом случае смещения точек среды от равновесного положения будут складываться в противофазе и результирующее смещение будет минимальным. В то же время в точке x_0 результирующее смещение будет максимальным. Таким образом формируется волновая группа с центром в x_0 . Подобная группа может сформироваться и в недиспергирующей среде.

Так как волна $(\lambda + \Delta\lambda)$ распространяется с большей скоростью $(u + \Delta u)$, как мы приняли, через время τ фаза точки P обгоняет фазу P_1 . Пусть при этом совпадут фазы точек Q и Q_1 . Это означает, что центр волновой группы сместится за время τ на длину волны λ . Поэтому скорость перемещения центра волновой группы (групповая скорость) u_Γ меньше скорости волны $(\lambda) -$ фазовой скорости на λ/τ

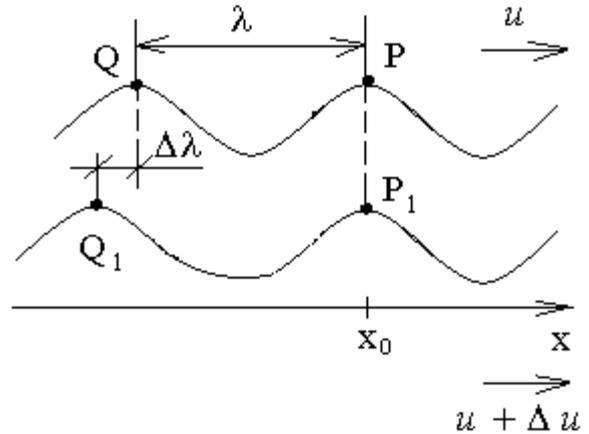


Рис. 1.4

$$u_\Gamma = u - \frac{\lambda}{\tau}.$$

Время τ , в течение которого точка Q_1 догоняет Q , равно $\frac{\Delta\lambda}{\Delta u}$. Поэтому выражение для групповой скорости при $\Delta\lambda \rightarrow 0$ принимает вид

$$u_\Gamma = u - \lambda \frac{du}{d\lambda}. \quad (16)$$

В данном случае производная $\frac{du}{d\lambda}$ описывает дисперсию, причем в практике знак производной может быть любым. В этом случае различают **нормальную** $du/d\lambda > 0$ и **аномальную** $du/d\lambda < 0$ дисперсии.

В качестве примера определим групповую скорость гравитационных волн на глубокой воде

$$\frac{du_g}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} (C\sqrt{g\lambda}) = \frac{1}{2}C\sqrt{\frac{g}{\lambda}} = \frac{1}{2}\frac{u_g}{\lambda}; \quad u_\Gamma = u_g - \frac{1}{2}u_g = \frac{1}{2}u_g.$$

Скорость распространения центра группы гравитационных волн на глубокой воде оказывается вдвое меньше скорости монохроматических волн.

Таким образом, при наличии дисперсии группа как целое движется с иной скоростью, чем входящие в ее состав монохроматические волны (горбы и впадины). Это возможно потому, что в процессе распространения группа волн «живет»: на одном конце группы возникают новые горбы, а на другом горбы угасают.

Энергия упругой волны

При распространении волн происходит передача энергии без переноса вещества. Энергия волны в упругой среде состоит из **кинетической энергии** частиц вещества, совершающих небольшие колебания, и из **потенциальной энергии** упругой деформации среды. Связь энергии с параметрами волнового процесса и среды рассмотрим на примере волны, распространяющейся вдоль упругого стержня. Такая волна описывается уравнением

$$\xi = a \cos \omega \left(t - \frac{x}{u} \right).$$

Выделим в стержне малый элемент длины между плоскостями x и $x + \Delta x$ так, что $\Delta x \ll \lambda$. В этом случае скорости всех частиц можно считать одинаковыми

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\omega a \sin \omega \left(t - \frac{x}{u} \right).$$

Масса выделенного элемента стержня Δm равна $\rho S \Delta x$ (где S – площадь сечения стержня, ρ – плотность материала стержня), поэтому его кинетическая энергия ΔE_{κ} в момент времени t

$$\Delta E_{\kappa} = \frac{1}{2} \Delta m u^2 = \frac{1}{2} \rho S \Delta x \omega^2 a^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \right].$$

Плотность кинетической энергии в точке x в момент времени t

$$\omega_{\kappa} = \frac{\Delta E_{\kappa}}{S \Delta x} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 a^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \right].$$

Поскольку длина выделенного элемента стержня мала по сравнению с длиной волны, то вызываемую волной деформацию элемента можно считать однородной. Поэтому потенциальную энергию деформации ΔE_n можно записать

$$\Delta E_n = \frac{1}{2} k (\Delta \ell)^2 = \frac{1}{2} S \Delta x E \left(\frac{\Delta \ell}{\Delta x} \right)^2,$$

где $\Delta \ell$ – удлинение рассматриваемого элемента стержня Δx , вызванное проходящей волной, E – модуль Юнга. В общем виде для $\Delta \ell$ можно записать

$$\Delta \ell = \xi(t_1x + \Delta x) - \xi(t_1x) \text{ и } \frac{\Delta \ell}{\Delta x} = \frac{\xi(t_1x + \Delta x) - \xi(t_1x)}{\Delta x}.$$

Поэтому, переходя к пределу $\Delta x \rightarrow 0$, получаем производную

$$\frac{\Delta \ell}{\Delta x} \rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\omega}{u} a \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \right].$$

Тогда выражение для потенциальной энергии

$$\Delta E_n = \frac{1}{2} S \Delta x E \left(\frac{\omega}{u} a \right)^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \right],$$

а плотность потенциальной энергии в точке x и в момент времени t

$$\omega_n = \frac{\Delta E_n}{S \Delta x} = \frac{1}{2} E \frac{\omega^2}{u^2} a^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \right].$$

Поскольку скорость распространения продольных волн

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

то

$$\omega_n = \frac{1}{2} \rho \omega^2 a^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \right].$$

Суммарная плотность энергии (рис. 1.5)

$$\omega = \omega_n + \omega_k = \rho \omega^2 a^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \right],$$

а среднее значение вдоль направления распространения волны

$$\langle \omega \rangle = \frac{1}{2} \rho \omega^2 a^2.$$

Необходимо отметить, что в отличие от локализованных колебаний (например, осциллятор), где кинетическая и потенциальная энергия изменяются в противофазе, в бегущей волне колебания потенциальной и кинетической энергии происходят в одинаковой фазе. Это общее свойство бегущих волн, распространяющихся в определенном направлении. Такое утверждение справедливо также для поперечных волн.

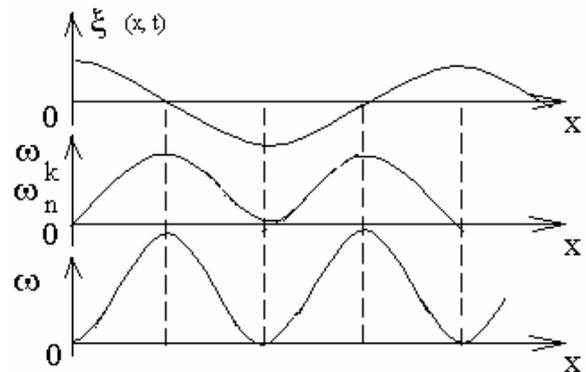


Рис. 1.5

Энергия бегущей волны не остается локализованной. Она перемещается вместе с волной со скоростью u . Имея выражения для **объемной плотности энергии** ω , можно определить **поток энергии** $\Delta\Phi$, переносимой волной за единицу времени через произвольную площадку ΔS , перпендикулярную направлению распространения волны $\Delta\Phi = \omega u \Delta S$. Величина $j = \frac{d\Phi}{dS} = \omega u$ носит название плотности потока энергии волны. Поскольку скорость u – векторная величина, то плотность потока энергии волны также векторная величина, которая получила название **вектора Умова**:

$$\vec{j} = \omega \vec{u}.$$

Среднее значение модуля вектора Умова

$$\langle j \rangle = \langle \omega \rangle u = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 u. \quad (17)$$

При произвольной ориентации площадки ΔS (единичного вектора \vec{n} , нормального к плоскости площадки) относительно вектора Умова \vec{j} поток через нее будет равен

$$\Delta\Phi = j \Delta S = j \Delta S \cos \alpha = \vec{j} \vec{u} \Delta S = j_n \Delta S.$$

Полный поток через поверхность S определяется интегралом

$$\Phi = \int_S j_n dS. \quad (18)$$

Для примера, определим поток энергии через сферическую поверхность S , переносимый сферической волной, распространяющейся из центра сферы. В этом случае во всех точках поверхности величина j_n одинакова и равна j . Поэтому

$$\Phi = j 4\pi r^2,$$

где r – радиус сферической поверхности S . Подставим вместо j среднее значение $\frac{1}{2} \rho a(r)^2 \omega^2 u$

$$\Phi = \frac{1}{2} \rho a(r)^2 \omega^2 u 4\pi r^2.$$

Поскольку средний поток энергии через сферу любого радиуса одинаков ($\Phi = \text{const}$), из последнего соотношения следует, что $a(r) = \frac{\text{const}}{r}$.

Поэтому для сферической волны мы ранее записали

$$\xi = \frac{a_0}{r} \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \right].$$

Принцип Гюйгенса

Каждая точка пространства, до которой дошел фронт волны, сама становится источником вторичной сферической волны с параметрами, соответствующими параметрам первичной волны.

Отражение и преломление упругих волн

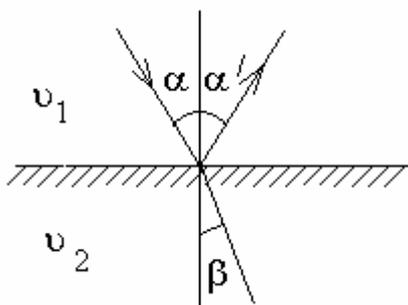


Рис. 1.6

При распространении упругой волны в неоднородной среде направление и распространение, вообще говоря, меняется. В простейшем случае двух однородных сред, отделенных одна от другой плоской границей раздела, волна частично отражается, частично преломляется на этой границе (рис. 1.6). В результате возникает две новые волны – **отраженная** и **преломленная**, направления которых

отличаются от направления падающей волны. На основе принципа Гюйгенса могут быть получены **закон отражения**:

$$\alpha = \alpha'$$

и **закон преломления**

$$v_1 \sin \beta = v_2 \sin \alpha, \quad (19)$$

где α – угол падения, α' – угол отражения, β – угол преломления, v_1 и v_2 – скорости волны в первой и второй средах соответственно.

Отражение волны от границы раздела сред требует отдельного рассмотрения. При падении плоской монохроматической волны на границу раздела возникает также плоская волна, распространяющаяся в обратном направлении с такой же по модулю скоростью u . Запишем уравнение падающей волны

$$\xi = a \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \right],$$

и уравнение отраженной волны $\xi' = a \cos \left[\omega \left(t + \frac{x}{u} \right) + \delta \right]$, где δ – дополни-

тельная разность фаз, возникающая в результате отражения. Колебания любой точки среды есть результат сложения гармонических колебаний, вызываемых падающей и отраженной волнами (рис. 1.7). Если среда, в которой распространяется падающая волна, оказывается менее плотной, чем среда,

от которой происходит отражение (например, конец струны закреплен), то складываемые колебания в этой точке (точке закрепления) должны погасить друг друга.

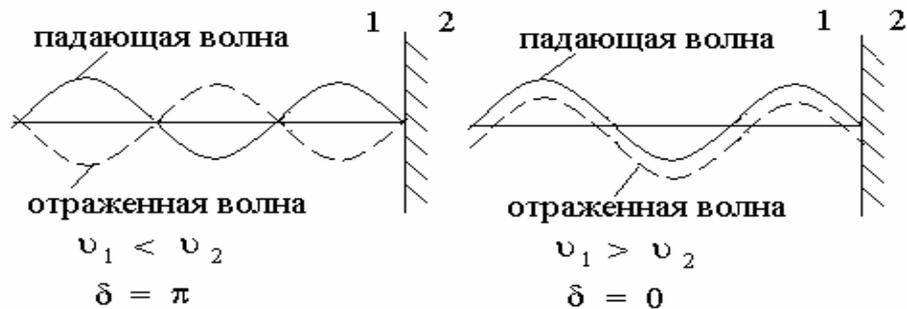


Рис. 1.7

Таким образом, колебания должны происходить в противофазе. В этом случае $\delta = \pi$, а уравнение отраженной волны

$$\xi' = -a \cos \left[\omega \left(t + \frac{x}{u} \right) \right].$$

Напротив, если конец струны свободен (плотность среды, в которой распространяется падающая волна, выше, чем плотность среды за границей раздела), то амплитуда результирующих колебаний в точке закрепления должна быть максимальной. Таким образом, в этом случае отраженная и падающая волны имеют одинаковые фазы ($\delta = 0$).

Законы отражения и преломления справедливы только при условии, что протяженность границы раздела значительно превышает длину волны λ . Если это условие не выполняется, то существенное значение начинает играть **дифракция волн**, которая проявляется в огибании волнами препятствия. Представим, что плоская волна приближается к преграде, имеющей небольшое отверстие, которое можно считать точечным (рис. 1.8). Максимумы приходящей волны производят периодическое возмущение в отверстии преграды. Это возмущение порождает сферическую волну согласно принципу Гюйгенса. Волновая картина, возникающая за преградой, состоит из набора полукруговых волн, расходящихся от отверстия, причем длина волны и частота у них такие же, как и у падающей волны (если скорости распространения с обеих сторон преграды одинаковы).

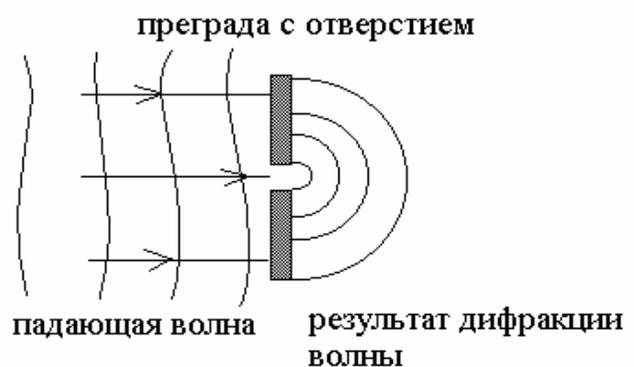


Рис. 1.8

Стоячие волны

При сложении волн с одинаковой частотой и постоянной разностью фаз возникает явление **интерференции**, заключающееся в том, что колебания в одних точках усиливаются, а в других точках ослабляются. Таким образом, результатом интерференции является **перераспределение энергии** упругих волн в пространстве. Волны, для которых возможно наблюдать интерференцию, носят название **когерентные волны** (обладающие постоянной во времени частотой и разностью фаз). Проще всего найти результат сложения таких колебаний с помощью векторных диаграмм. Пусть складываемые колебания имеют вид

$$\xi_1(t) = a_1 \cos(\omega t + \alpha_1); \quad \xi_2(t) = a_2 \cos(\omega t + \alpha_2).$$

Амплитуду a и начальную фазу α можно найти с помощью рис. 1.9. По теореме косинусов

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2), \quad (20)$$

а для $\operatorname{tg}\alpha$ справедливо выражение

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2}{a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2}. \quad (21)$$

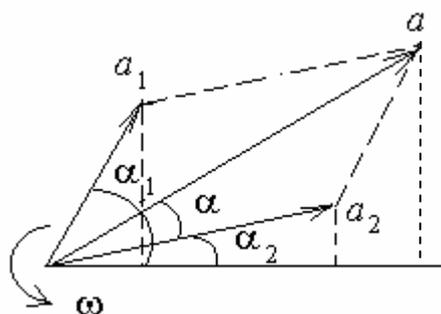


Рис. 1.9

Поскольку энергия колебаний (интенсивность волны) пропорциональна квадрату амплитуды, то из выражения (20) видно, что энергия результирующего колебания в общем случае не равна сумме энергий складываемых колебаний.

Особым случаем интерференции является наложение двух встречных когерентных плоских волн с одинаковой амплитудой. Такой случай возникает при отражении волны от границы раздела сред (см. рис. 1.7). Возникающий в результате волновой процесс называют **стоячей волной**. Запишем уравнения двух плоских волн:

для падающей волны

$$\xi = a \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \right];$$

для отраженной волны

$$\xi' = a \cos \left[\omega \left(t + \frac{x}{u} \right) \right].$$

Амплитуда результирующего колебания зависит от скачка фазы δ на границе раздела.

1. Фаза не меняется на границе раздела, дополнительная разность фаз $\delta = 0$

$$\xi_p = \xi + \xi' = 2a \cos \left[\frac{2\pi x}{\lambda} \right] \cos \omega t, \quad (22)$$

то есть амплитуда результирующего колебания $A = 2a \cos \frac{2\pi x}{\lambda}$ и в точках,

где $2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm n\pi$ ($n=0, 1, 2, \dots$) амплитуда колебаний достигает максимального значения $2a$ (**пучности стоячей волны**). Координаты пучностей (рис. 1.10)

$$x_{\text{пучн}} = \pm \frac{1}{2} n\lambda.$$

В точках, где $2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi$, $n=0, 1, 2, 3, \dots$ амплитуда результирующего колебания обращается в нуль (**узлы стоячей волны**). Координаты узлов (рис. 1.10)

$$x_{\text{узел}} = \pm \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2}.$$

Расстояние между соседними пучностями и соседними узлами равны $\frac{\lambda}{2}$, пучности и узлы друг относительно друга смещены на $\frac{\lambda}{4}$. При этом расположение узлов и пучностей в стоячей волне не меняется со временем. В этом состоит главное отличие стоячей волны от бегущей.

Из выражения (22) и рис. 1.9 следует, что стоячая волна может существовать при условии кратности длины x среды распространения (от источника волны до отражающей границы) половине длины волны

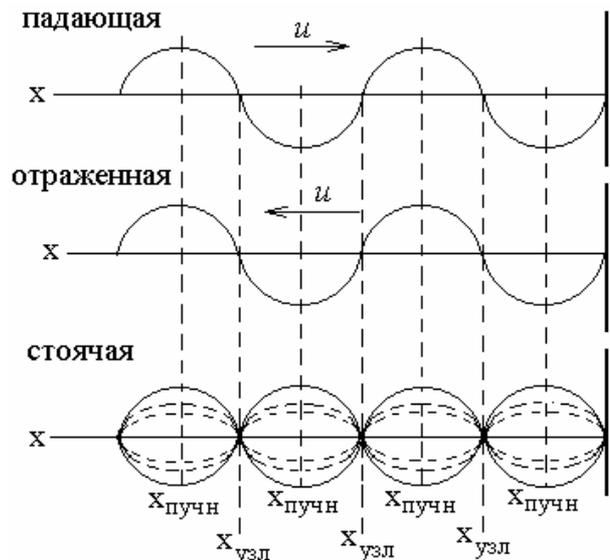


Рис. 1.10

$$x = n \frac{\lambda}{2}. \quad (23)$$

2. Фаза волны меняется на границе раздела на δ ($\delta = \pi$)

$$\xi'_p = \xi + \xi' = 2a \sin \left[\frac{2\pi x}{\lambda} \right] \sin \omega t, \quad (24)$$

то есть амплитуда результирующих колебаний

$$A = 2a \sin \frac{2\pi x}{\lambda}.$$

Подставив в данное выражение для амплитуды условие возникновения стоячей волны (24), получим, что для этого случая A всегда равна нулю, т.е. падающая и отраженная волны взаимно подавляются.

Продифференцировав уравнение (22) по t и по x , получим выражение для скорости смещения частиц среды $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ и деформации среды $\frac{\partial \xi}{\partial x}$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -2\omega a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin \omega t \quad \text{и} \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = -2 \frac{2\pi}{\lambda} a \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos \omega t$$

Первое уравнение описывает стоячую волну скорости смещения среды, второе – стоячую волну деформации. Соответственно дважды за период происходит превращение энергии стоячей волны то полностью в потенциальную, то полностью в кинетическую.

Звуковые волны

Если упругие волны, распространяющиеся в воздухе, имеют частоту в пределах от 16 до 20000 Гц, то, достигнув человеческого уха, они вызывают ощущение звука. В соответствии с этим упругие волны в любой среде, имеющие частоту, заключенную в указанных пределах, называют **звуковыми волнами** или просто **звуком**. Упругие волны с частотами меньше 16 Гц, называют **инфразвуком**; волны с частотами, превышающими 20000 Гц, называют **ультразвуком**. Инфра- и ультразвук человеческое ухо не слышит.

Воспринимаемые звуки люди различают по **высоте**, **тембру** и **громкости**. Каждой из этих субъективных оценок соответствует определенная физическая характеристика звуковой волны.

Набор частот колебаний, присутствующих в данном звуке, называется его акустическим спектром. Если в звуке присутствуют колебания всех частот в некотором интервале от ν' до ν'' , то спектр называется сплошным. Если звук состоит из колебаний дискретных частот ν_1, ν_2, ν_3 и т.д., то

спектр называется линейчатым. Сплошным акустическим спектром обладают шумы. Колебания с линейчатым спектром вызывают ощущение звука с более или менее определенной высотой. Такой звук называется тональным.

Высота тонального звука определяется основной частотой. Под **интенсивностью звука** понимают среднее по времени значение плотности потока энергии, которую несет с собой звуковая волна. Для того чтобы вызвать звуковое ощущение, волна должна обладать некоторой минимальной интенсивностью, которая называется порогом слышимости.

Субъективно оцениваемая громкость звука возрастает гораздо медленнее, чем интенсивность звуковых волн. При возрастании интенсивности в геометрической прогрессии громкость возрастает приблизительно в арифметической прогрессии, т.е. линейно. На этом основании уровень громкости L определяется как логарифм отношения интенсивности данного звука I к интенсивности I_0 , принятой за исходную

$$L = \lg \frac{I}{I_0}. \quad (25)$$

Исходная интенсивность I_0 принимается равной 10^{-12} Вт/м, так что порог слышимости при частоте порядка 1000 Гц лежит на нулевом уровне ($L = 0$). Единица уровня громкости L , определяемого формулой (24), называется **белом** (Б). Обычно пользуются в 10 раз меньшими единицами – **децибелами** (дБ). Значение L в децибелах определяется формулой

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0}.$$

Отношение двух интенсивностей I_1 и I_2 также может быть выражено в децибелах (таб.):

$$L = 10 \lg \frac{I_1}{I_2}.$$

Звук	Уровень громкости, дБ
Тиканье часов	20
Шепот на расстоянии 1 м	30
Тихий разговор	40
Речь средней громкости	60
Громкая речь	70
Крик	80
Шум самолетного мотора:	
На расстоянии 5 м	120
На расстоянии 3 м	130

Эффект Доплера

Пусть в газе или жидкости на некотором расстоянии от источника волн располагается воспринимающее колебания среды устройство (приемник). Если источник и приемник неподвижны относительно среды, в которой распространяется волна, то частота колебаний, воспринимаемых приемником, будет равна частоте ν_0 колебаний источника. Если же источник или приемник, либо оба они движутся относительно среды, то частота ν , воспринимаемая приемником, может оказаться отличной от ν_0 . Это явление называется **эффектом Доплера**.

Предположим, что источник и приемник движутся вдоль соединяющей их прямой. Скорость источника $v_{ист}$ будем считать положительной, если источник движется по направлению к приемнику, и отрицательной, если источник движется в направлении от приемника. Аналогично скорость приемника $v_{пр}$ будем считать положительной, если приемник движется по направлению к источнику, и отрицательной, если приемник движется в направлении от источника.

Если источник неподвижен и генерирует в среде колебания с частотой ν_0 , то к моменту, когда источник будет завершать ν_0 -е колебание, порожденный первым колебанием «гребень» волны успеет пройти в среде путь v (v – скорость распространения волны относительно среды). Следовательно, порождаемые источником за секунду ν_0 «гребней» и «впадин» волны уложатся на длине v . Если же источник движется относительно среды со скоростью $v_{ист}$, то в момент, когда источник будет завершать ν_0 -е колебание, «гребень», порожденный первым колебанием, будет находиться от источника на расстоянии $v - v_{ист}$ (рис. 1.11). Это следует из того, что скорость волны зависит только от параметров среды. Следовательно, ν_0 «гребней» и «впадин» уложатся на длине $v - v_{ист}$, так что длина волны будет равна

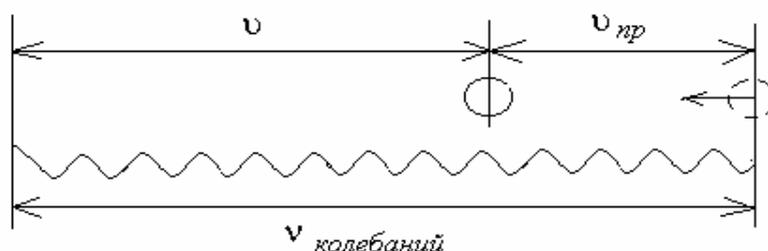


Рис. 1.11

$$\lambda = \frac{v - v_{ист}}{\nu_0}. \quad (26)$$

Через неподвижный приемник пройдут за одну секунду «гребни» и «впадины», укладываемые на длине υ . Если приемник движется со скоростью $\upsilon_{\text{пр}}$, то в конце длящегося 1 с промежутка времени он будет воспринимать «впадину», которая в начале этого промежутка отстояла от его теперешнего положения на расстояние, численно равное υ . Таким образом, приемник воспримет за секунду колебания, отвечающие «гребням» и «впадинам», укладываемым на длине, численно равной $\upsilon + \upsilon_{\text{пр}}$ (рис. 1.12), и будет колебаться с частотой

$$\nu = \frac{\upsilon + \upsilon_{\text{пр}}}{\lambda}. \quad (25)$$

Подставим в эту формулу выражение (26) для λ

$$\nu = \nu_0 \frac{\upsilon + \upsilon_{\text{пр}}}{\upsilon - \upsilon_{\text{ист}}}. \quad (27)$$

Из формулы (27) вытекает, что при таком движении источника и приемника, при котором расстояние между ними уменьшается, воспринимаемая приемником частота ν оказывается больше частоты источника ν_0 . Если расстояние между источником и приемником увеличивается, ν будет меньше, чем ν_0 .

$$\nu = \nu_0 \frac{\upsilon - \upsilon_{\text{пр}}}{\upsilon + \upsilon_{\text{ист}}}. \quad (27a)$$

Если направления скоростей $\upsilon_{\text{ист}}$ и $\upsilon_{\text{пр}}$ не совпадают с проходящей через источник и приемник прямой, вместо $\upsilon_{\text{ист}}$ и $\upsilon_{\text{пр}}$ в формуле (27) нужно брать проекции векторов $\mathbf{v}_{\text{ист}}$ и $\mathbf{v}_{\text{пр}}$ на направление указанной прямой.

Из формулы (27) следует, что эффект Доплера для звуковых волн определяется скоростями движения источника и приемника относительно среды, в которой распространяется звук. Для световых волн также наблюдается эффект Доплера, однако формула для изменения частоты имеет иной вид, чем (27). Это обусловлено тем, что для световых волн не существует вещественной среды, колебания которой представляли бы собой «свет». Поэтому скорости источника и приемника света относительно «среды» не имеют смысла. В случае света

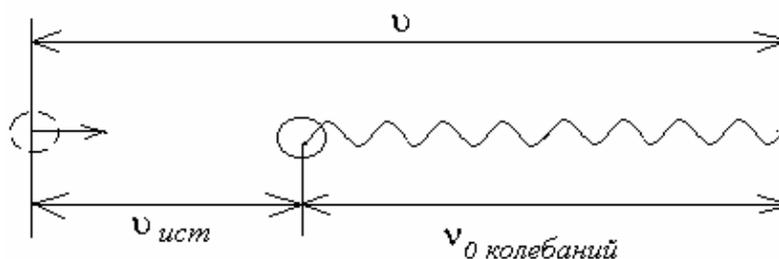


Рис. 1.12

можно говорить лишь об относительной скорости приемника и источника. Эффект Доплера для световых волн зависит от величины и направления этой скорости.

Электромагнитные волны

В разделе, касающемся электромагнитной индукции и самоиндукции, было показано, что переменные электрическое и магнитное поля взаимно порождают друг друга и электрически взаимосвязаны. Поэтому колебания напряженности электрического поля в некоторой точке пространства приводит к возникновению магнитного поля с соответствующей напряженностью (и наоборот) и распределению электромагнитного поля в пространстве. Взаимосвязь параметров электрической и магнитной компонент электромагнитного поля описывается уравнениями Максвелла (см. с. 151)

$$\nabla E = -\mu\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (28)$$

$$\nabla H = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (29)$$

где $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$ – оператор Набла.

Вследствие симметричности уравнений Максвелла относительно E и H можно продифференцировать уравнение (28) и, поменяв последовательность дифференцирования по координатам и времени, с учетом (29) получить уравнение

$$\Delta E = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}, \quad (30)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Введя обозначение $\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$, уравнение (30) можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \quad (31)$$

Проведя аналогичные преобразования, из уравнения (29) с учетом (28) можно получить

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}. \quad (32)$$

Уравнения (31) и (32) являются волновыми уравнениями электрической и магнитной компонент электромагнитной волны (распространяющегося в пространстве электромагнитного поля). Фазовая скорость электромагнитной волны

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \quad (33)$$

В вакууме $\varepsilon = \mu = 1$ и скорость электромагнитных волн совпадает со **скоростью света** в пустоте c . Поскольку вектор скорости перпендикулярен

вектору напряженности электрического поля и вектору напряженности магнитного поля, то электромагнитные волны являются **поперечными волнами**.

Электромагнитные волны переносят энергию. Плотность потока энергии можно получить, умножив плотность энергии на скорость волны. Плотность энергии электромагнитного поля w складывается из плотности энергии электрического поля и плотности энергии магнитного поля

$$w = w_E + w_H = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}. \quad (34)$$

В данной точке пространства векторы E и H изменяются в одинаковой фазе. Поэтому соотношение между амплитудными значениями E и H справедливо и для их мгновенных значений. Отсюда следует, что плотности энергии электрического и магнитного полей волны каждый момент времени одинаковы: $w_E = w_H$. Поэтому

$$w = 2w_E = \varepsilon\varepsilon_0 E^2. \quad (35)$$

Воспользовавшись тем, что $E\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H\sqrt{\mu\mu_0}$, выражению (33) можно придать вид

$$w = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} EH = \frac{1}{v} EH,$$

где v – скорость электромагнитной волны. Умножив найденное выражение для w на скорость волны v , получим модуль вектора плотности потока энергии

$$S = wv = EH. \quad (36)$$

Векторы E и H взаимно перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему. Поэтому направление вектора $[\vec{E}\vec{H}]$ совпадает с направлением переноса энергии, а модуль этого вектора равен EH . Следовательно, вектор плотности потока электромагнитной энергии можно представить как векторное произведение E и H :

$$\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}]. \quad (37)$$

Вектор \vec{S} называется **вектором Пойнтинга (Умова – Пойнтинга)**.

По аналогии с (18) поток Φ электромагнитной энергии через некоторую поверхность F можно найти интегрированием

$$\Phi = \int_F S dF. \quad (38)$$

Простейшей системой, излучающей электромагнитные волны, является **колеблющийся электрический диполь**. Примером диполя может служить система, образованная неподвижным точечным зарядом $+q$ и колеб-

лющимся около него точечным зарядом $-q$. Дипольный электрический момент этой системы изменяется со временем по закону

$$\vec{p} = -q\vec{r} = -ql\vec{e} \cos \omega t = \vec{p}_m \cos \omega t, \quad (39)$$

где r – радиус – вектор заряда $-q$, l – амплитуда колебаний, e – единичный вектор, направленный вдоль оси диполя, $\vec{p}_m = -ql\vec{e}$.

Сильнее всего излучает диполь в направлениях, перпендикулярных к его оси ($\vartheta = \frac{\pi}{2}$). В направлениях, совпадающих с осью ($\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$), диполь не излучает. Зависимость интенсивности от угла ϑ очень наглядно изображается с помощью диаграммы направленности диполя (рис. 1.13). Эта диаграмма строится так, чтобы длина отрезка, отсекаемого ею на луче, проведенном из центра диполя, давала интенсивность излучения под углом ϑ .



Рис. 1.13

Мощность излучения диполя P (т.е. энергия, излучаемая по всем направлениям в единицу времени) пропорциональна квадрату второй производной дипольного момента по времени:

$$P \sim p_m^2 \omega^4 \cos^2 \omega t. \quad (40)$$

Усреднив это выражение по времени, получим

$$\langle P \rangle \sim p_m^2 \omega^4.$$

Поэтому при малой частоте излучение электрических систем (например, линий передачи переменного тока промышленной частоты) бывает незначительным.

Поскольку согласно (41) $\ddot{p} = -q\ddot{r} = -qa$, где a – ускорение колеблющегося заряда, то $P \sim q^2 a^2$. Эта формула определяет мощность излучения не только при колебаниях, но и при произвольном движении заряда. Всякий заряд, движущийся с ускорением, возбуждает электромагнитные волны, причем мощность излучения пропорциональна квадрату заряда и квадрату ускорения. Заряд, совершающий гармонические колебания, излучает монохроматическую волну с частотой, равной частоте колебаний заряда. Если же ускорение заряда a изменяется не по гармоническому закону, излучение состоит из набора волн различных частот.

В нагретых телах заряды (атомы или молекулы) совершают колебательные движения, в результате которых генерируются электромагнитные волны. Поэтому излучаемый ими свет (тепловое излучение) есть электромагнитные волны, несущие энергию и проявляющие в определенных случаях свои волновые свойства.

1.2. Методические указания к лекционным занятиям

Вопросы лекции	Форма изучения	Литература	Вопросы для самоконтроля студентов
<p>Волновые процессы</p> <ul style="list-style-type: none"> – волновое уравнение; – свет как электромагнитная волна; – скорость распространения упругих волн; – дисперсия волн; – энергия упругой волны; – отражение и преломление упругих волн; – интерференция и дифракция волн; – стоячие волны 	лекция	[3]; [7]; [9]	<p>Вопросы для самоконтроля студентов</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Что такое волновая поверхность и фронт волны? В чем их отличие? 2. В каких средах могут распространяться продольные, а в каких – поперечные волны? 3. Укажите основные характеристики волны. 4. В чем состоит явление дисперсии? 5. Какова особенность энергии бегущей волны? 6. Каковы причины возникновения стоячих волн? 7. В чем заключается особенность отражения волн от поверхности раздела сред различной плотности? 8. От чего зависит частота и интенсивность излучения диполя?

1.3. Методические указания к практическим занятиям

Тема: Волновые процессы

Задачи	Рекомендации
<ol style="list-style-type: none"> 1. Определение волнового уравнения по известным параметрам волны. 2. Определение параметров волны по известному волновому уравнению. Фазовая и групповая скорости. 3. Определение частот звуковых колебаний в соответствии с эффектом Доплера. 4. Определение фазовой и групповой скоростей по заданной функции (дисперсии) 	<p>Рекомендации</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. При определении волнового уравнения необходимо помнить, что волновой процесс – это колебание, которое распространяется в пространстве, поэтому при определении параметров волны по известному уравнению необходимо зафиксировать координату и рассматривать колебания в данной точке пространства, или зафиксировать время и рассматривать распространение точек колеблющихся в одинаковой фазе. 2. Эффект Доплера для акустических волн описывается соотношением (26), где скорость звука зависит от свойств среды, в которой он распространяется. 3. Определение групповой скорости осуществляется по заданной зависимости фазовой скорости от частоты или длины волны. При этом зависимость от частоты может быть преобразована в зависимость от длины волны с помощью соотношения, связывающего скорость, длину волны и частоту

1.4. Примеры решения задач

Задача 1.

Плоская синусоидальная волна распространяется вдоль прямой, совпадающей с положительным направлением оси x в среде, не поглощающей энергию, со скоростью $v = 15$ м/с. Две точки, находящиеся на прямой на расстоянии $x_1 = 5$ м и $x_2 = 5,5$ м от источника колебаний, колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi = \frac{\pi}{5}$. Амплитуда волны $A = 4$ см. Определить: 1) длину волны, 2) уравнение волны, 3) смещение первой ξ_1 точки в момент времени $t = 3$ с.

Решение.

1). Разность фаз колеблющихся двух точек волны $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x$, где $\Delta x = x_2 - x_1$ – расстояние между этими точками. Тогда $\lambda = \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\Delta\varphi}$. $\lambda = 5$ м

2). Циклическая частота $\omega = \frac{2\pi}{T}$ и $T = \frac{\lambda}{v}$, поэтому $\omega = \frac{2\pi v}{\lambda}$. Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x

$$\xi(x, t) = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x) = 0,04 \cos \left(6\pi t - \frac{2\pi}{5} x \right)$$

3). Подставив значение $t = 3$ с и $x_1 = 5$ м, получим

$$\xi_1(x, t) = 0,04 \cos \left(6\pi t - \frac{2\pi}{5} x \right) = 4 \text{ см}$$

Задача 2.

Неподвижный приемник при приближении источника звука, излучающего волны с частотой $\nu_0 = 360$ Гц, регистрирует звуковые колебания с частотой $\nu = 400$ Гц. Принимая температуру воздуха $T = 290$ К, его молярную массу $M = 0,029$ кг/моль, определите скорость движения источника звука.

Решение. В акустике для эффекта Доплера при покоящемся приемнике ($v_{\text{пр}} = 0$) и приближающемся со скоростью $v_{\text{ист}}$ источнике, частота звука определяется выражением

$$\nu = \nu_0 \frac{v + v_{\text{пр}}}{v - v_{\text{ист}}} = \nu_0 \frac{v}{v - v_{\text{пр}}},$$

где v – скорость звука. Тогда скорость источника

$$v_{\text{ист}} = v \left(1 - \frac{\nu_0}{\nu} \right).$$

Скорость распространения звуковых волн в газах определяется как $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$, где для воздуха $\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{7}{5}$. После подстановки численных данных получаем $v_{\text{ист}} = 34,1 \text{ М/с}$.

Задача 3.

Определите разность фазовой и групповой скоростей волны с частотой $\nu = 800$ Гц, если фазовая скорость задается выражением $v = \frac{a_0}{\sqrt{\nu + b}}$, где $a_0 = 24 \frac{\text{М}}{\text{с}^{3/2}}$, $b = 100$ Гц

Решение. Выражение для групповой скорости имеет вид

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$$

Скорость волны связана с частотой и длиной волны выражением $v = \lambda \nu$, поэтому, подставив в $v = \frac{a_0}{\sqrt{\nu + b}}$ можно получить функцию $\lambda(\nu) = \frac{v^3}{a_0^2 - b\nu^2}$. Продифференцируем это выражение по скорости

$$\frac{d\lambda}{d\nu} = \frac{\nu^2(3a_0^2 - b\nu^2)}{(a_0^2 - b\nu^2)^2}$$

Перевернув дробь, получим выражение для искомой производной (дисперсии)

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{(a_0^2 - b\nu^2)^2}{\nu^2(3a_0^2 - b\nu^2)}$$

Разность скоростей определяется выражением

$$\nu - u = \lambda \frac{d\nu}{d\lambda}$$

После подстановки $v = \frac{a_0}{\sqrt{\nu + b}}$ с учетом $\lambda = \frac{v}{\nu}$ получим

$$\nu - u = \frac{a_0 \nu}{(3\nu + 2b)\sqrt{\nu + b}}, \text{ т.е. } \nu - u = 0,246 \text{ М/с}$$

Задача 4.

В незатухающей бегущей волне задана точка M , отстоящая от источника колебаний на расстоянии $y = \lambda/12$ в направлении распространения волны. Амплитуда колебаний $A = 0,050$ м. Считая в начальный момент времени смещение точки P , находящейся в источнике, максимальным, определить смещение от положения равновесия точки M для момента $t = T/6$, а также разность фаз колебаний точек M и P .

Решение. Смещение точки M можно найти с помощью уравнения бегущей волны. Используя условие задачи, преобразуем это уравнение так, чтобы в него вошли длина волны λ и период T колебаний. Учитывая соотношение $\omega = 2\pi/T$, получим

$$x = A \sin \left[2\pi \left(\frac{1}{T} - \frac{y}{cT} \right) + \varphi_0 \right] = A \sin \left[2\pi \left(\frac{1}{T} - \frac{y}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right]. \quad (1)$$

Чтобы найти начальную фазу φ_0 , воспользуемся начальными условиями задачи: если $t = 0$, $y = 0$, то $x = A$. При этих значениях t , y , x из уравнения (1) имеем $\sin \varphi_0 = 1$, откуда $\varphi_0 = \pi/2$.

Подставив числовые значения величин A , t/T , y/λ , φ_0 в (1), получим

$$x = 0,050 \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12} \right) + \frac{\pi}{2} \right] = 0,050 \cdot 0,87 \text{ м} = 0,044 \text{ м}.$$

Для вычисления разности фаз $\varphi_M - \varphi_P$ колебаний точек M и P , учтем, что для точки P координата $y = 0$. Следовательно, в любой момент t фаза точки P , т.е. аргумент синуса в (1), равна $\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0$. Тогда

$$\varphi_M - \varphi_P = \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right] - \left[2\pi \frac{t}{T} + \varphi_0 \right] = -2\pi \frac{y}{\lambda}. \quad (2)$$

Этот же результат можно получить сразу, если положить $y_1 - y_2 = -y$. Подставив в (2) числовое значение отношения y/λ , найдем

$$\varphi_M - \varphi_P = -2\pi \cdot (1/12) = -\pi/6.$$

Таким образом, колебания точки M отстают по фазе от колебаний источника на угол $\pi/6$.

Задача 5.

Показатель преломления сероуглерода для света с длинами волн 509, 534 и 589 нм равен соответственно 1,647; 1,640 и 1,630. Вычислить фазовую и групповую скорости света вблизи длины волны 534 нм.

Решение. Групповая скорость u связана с фазовой скоростью v света в среде соотношением

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (1)$$

Учитывая, что $v = c/n$, из (1) получаем, что $u = v \left[1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right]$.

Для средней дисперсии вещества

$$u = v \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{\Delta n}{\Delta \lambda} \right), \quad (2)$$

где $\Delta n/\Delta \lambda$ – средняя дисперсия показателя преломления среды. Для $\lambda = 534$ нм и $n = 1,640$ находим относительную дисперсию

$$\frac{\lambda}{n} \frac{\Delta n}{\Delta \lambda} = \frac{535 \text{ нм}(1,647 - 1,630)}{1,640(509 - 589) \text{ нм}} = -0,069.$$

Из соотношения (2) определяем

$$\frac{u}{v} = \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{\Delta n}{\Delta \lambda} \right) = (1 - 0,069) = 0,931; \quad (3)$$

$$u = 0,931v.$$

Учитывая, что фазовая скорость $v = c/n$, находим ее значение вблизи $\lambda = 534$ нм

$$v = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{1,640} = 1,83 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

По формуле (3) вычислим групповую скорость

$$u = 0,931 \cdot 1,83 \cdot 10^8 \text{ м/с} = 1,70 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

2. УЧЕБНЫЙ БЛОК «ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА»

Введение

Оптикой называется раздел физики, в котором изучаются явления и закономерности, связанные с возникновением, распространением и взаимодействием с веществом световых электромагнитных волн.

В **геометрической оптике** рассматриваются законы распространения света в прозрачных средах на основе представлений о свете как о совокупности световых лучей – линий, вдоль которых распространяется энергия световых электромагнитных волн. В геометрической оптике не учитываются волновые свойства света и связанные с ним дифракционные явления. **Общий критерий применимости геометрической оптики:** $D \gg \sqrt{\ell\lambda}$, где D – линейный размер препятствия, на котором происходит дифракция, ℓ – расстояние от препятствия до экрана.

Этот блок основан, в основном, на материале, который изучался в школьном курсе физике. Однако, поскольку инженерная подготовка требует навыков работы с оптическими приборами, то данный раздел вынесен для самостоятельного изучения (повторения).

При изучении данного раздела студенты должны **иметь представление:**

- об основных законах геометрической оптики и их проявлениях;
- об основных способах построения изображений в линзах и зеркалах;

обладать навыками:

- решения задач на основе формулы тонкой линзы;
- применения геометрических способов решения задач на построение изображений в линзах и зеркалах.

Учебная программа блока

Содержание блока	Форма подготовки	Литература
1. Законы геометрической оптики	самост.	[9]
2. Сферические зеркала	самост.	[7]
3. Линзы	самост.	[9]

Цели обучения

студент должен знать	студент должен уметь
<ul style="list-style-type: none">– приемы построения изображений в различных оптических приборах;– законы геометрической оптики;– основные характеристики линз и зеркал;– принцип Ферма и его следствия	<ul style="list-style-type: none">– строить изображения различных объектов в линзах, зеркалах и оптических системах из них;– определять параметры световых лучей в результате их отражения и преломления

2.1. Краткое содержание теоретического материала

Принцип Ферма

Действительный путь распространения монохроматического луча света есть путь, для прохождения которого требуется минимальное время по сравнению с любым другим возможным ближайшим путем между двумя точками. На основе этого принципа устанавливается закон прямолинейного распространения света и выводится формула тонкой линзы.

Законы геометрической оптики

Среда **оптически однородная**, если показатель преломления ее везде одинаков. В оптически однородной среде лучи прямолинейны: в такой среде свет распространяется **прямолинейно**. Это подтверждается явлением образования тени (рис. 2.1).

Пучки световых лучей, пересекаясь, не интерферируют и распространяются после пересечения независимо друг от друга (**закон независимости световых пучков**).

Отношение скорости света в вакууме к скорости света v в данной среде

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon\mu},$$

n называется **абсолютным показателем преломления** этой среды. Здесь ϵ и μ – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, $\mu \approx 1$ для неферромагнитных сред. Для любой среды, кроме вакуума, $n > 1$. Величина n зависит от частоты света и состояния среды (ее плотности и температуры). Для газов при нормальных условиях $n \approx 1$. В анизотропных средах n зависит от направления распространения света и его поляризации.

Относительным показателем преломления n_{21} второй среды относительно первой называется соотношение скоростей света v_1 и v_2 соответственно, в первой и второй средах:

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

где n_1 и n_2 – абсолютные показатели преломления первой и второй сред.

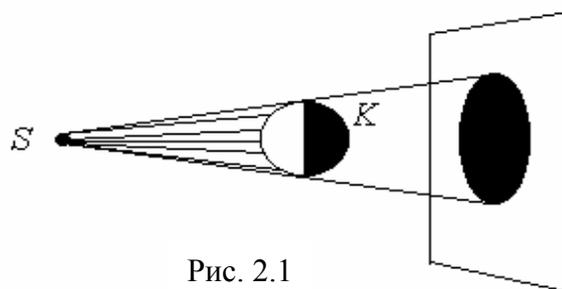


Рис. 2.1

Если $n_{21} > 1$, то вторая среда называется **оптически более плотной**, чем первая среда.

При падении световых лучей на идеально плоскую границу раздела двух сред, размеры которой значительно превышают длину волны, происходят явления преломления и отражения света. Направление распространения света изменяется при переходе его во вторую среду, за исключением случая перпендикулярного падения лучей на границу раздела.

Углом падения i называется угол между падающим лучом и перпендикуляром к границе раздела, восстановленным в точке падения. **Углом отражения** i' называется угол между отраженным лучом и тем же перпендикуляром (рис. 2.2). **Углом преломления** r называется угол между преломленным лучом и тем же перпендикуляром.

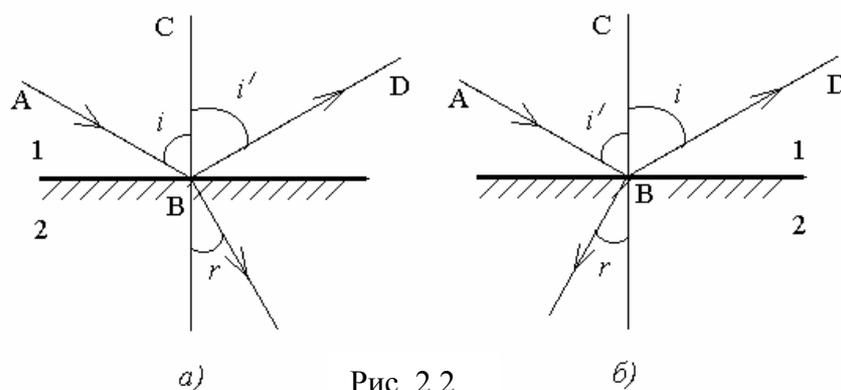


Рис. 2.2

Законы отражения света

- Падающий луч, отраженный луч и перпендикуляр к границе раздела двух сред, восстановленный в точке падения луча, лежат в одной плоскости;
- Угол отражения равен углу падения $i = i'$ (см. рис. 2.2, а).

Законы отражения справедливы при обратном направлении хода световых лучей. Луч, распространяющийся по пути отраженного, отражается по пути падающего луча (**обратимость хода световых лучей**) (см. рис. 2.2, б).

Отражение света, удовлетворяющего этим законам, называется **зеркальным**. Если условие зеркальности отражения не выполняется, то законы отражения несправедливы, и отражение света называется **диффузным**.

Законы преломления света

- Падающий луч, преломленный луч и перпендикуляр к границе раздела двух сред, восстановленный в точке падения луча, лежат в одной плоскости;
- Отношение синусов углов падения и преломления – постоянная величина, равная относительному показателю преломления данных двух сред

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}.$$

Падающий и преломленный лучи **взаимно обратимы**: если падающий луч пущен по линии преломленного луча, то луч преломленный пойдет по линии падающего.

Законы отражения и преломления света справедливы для однородных изотропных сред в отсутствие поглощения света.

Если световые лучи из оптически более плотной среды 2 падают на границу раздела с оптически менее плотной средой 1, например, из стекла в воду, то при углах падения $i \geq i_{\text{пр}}$, где $\sin i_{\text{пр}} = n_{21}$, преломления света не наблюдается (рис. 2.3). При условии $i = i_{\text{пр}}$ угол преломления $r = \pi/2$, $\sin r = 1$ и луч скользит вдоль границы раздела сред. Это явление называется **полным отражением**. Угол $i_{\text{пр}}$ называется предельным углом

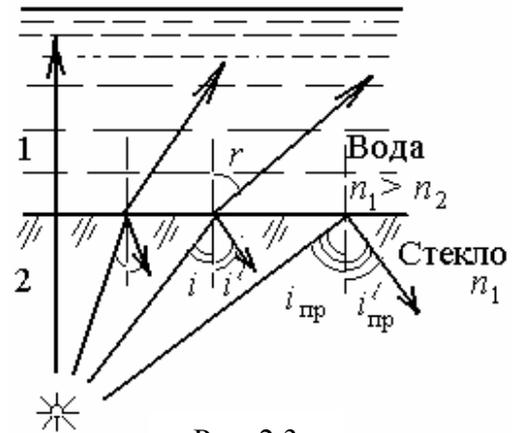


Рис. 2.3

полного отражения. Если свет переходит из вещества с абсолютным показателем преломления $n_1 = n$ в воздух, где $n_2 \approx 1$, то условие полного отражения примет вид

$$\sin i_{\text{пр}} = \frac{1}{n}.$$

Каждая точка S источника света в геометрической оптике считается центром расходящегося пучка лучей, который называется **гомоцентрическим**. Если после отражений и преломлений в различных средах пучок остается гомоцентрическим, то его центр S' называется **изображением точки S** в оптическом пространстве.

Изображение S' называется **действительным**, если в точке S' пересекаются сами лучи пучка, и **мнимым**, если в ней пересекаются продолжения этих лучей. В точке, где возникает действительное изображение, происходит концентрация световых лучей, и это может быть обнаружено, например, фотоэлементом или светочувствительной бумагой. При мнимом изображении этого не происходит – световые лучи как бы выходят из точки, в которой обнаружить энергию нельзя. Однако существенно, что и при мнимом изображении сетчатка глаза фиксирует лучи света, продолжение которых формирует мнимое изображение.

После прохождения плоскопараллельной пластинки лучи выходят под тем же углом i , под которым на нее падают (рис. 2.4). Пластика смещает луч света параллельно самому себе на расстояние

$$\Delta = d \sin i \left(1 - \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}} \right),$$

где d – толщина пластинки, i – угол падения лучей, n – показатель преломления материала пластинки по отношению к окружающей среде. Светящаяся точка S источника света или предмета кажется приближенной к поверхности пластинки на расстояние

$$\Delta' = d \left(1 - \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}} \right).$$

При нормальном падении лучей ($i = 0$) $\Delta = 0$ и $\Delta' = d \frac{n-1}{n}$.

В призме, сечение которой изображено на рис. 2.5, луч света, падающий в плоскости сечения, после преломления на гранях AC и CB отклоняется к основанию. Угол отклонения луча $\varphi = i_1 + r_2 - \alpha$, где i_1 – угол падения луча на грань AC , r_2 – угол преломления на грани BC , α – угол между гранями AC и CB , называемый **преломляющим углом призмы**.

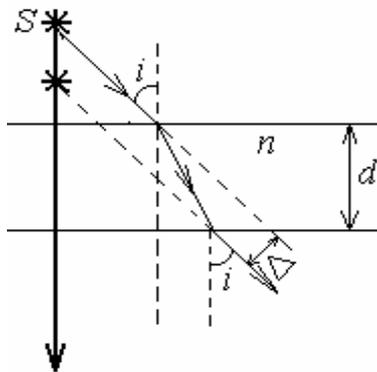


Рис. 2.4

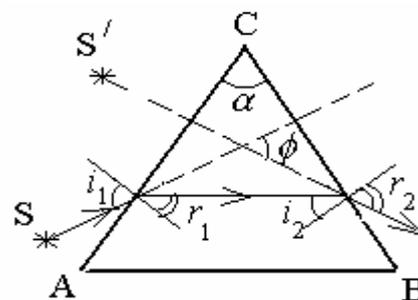


Рис. 2.5

При условии $r_2 = i_1$ угол отклонения лучей φ – наименьший ($\varphi = \varphi_{\text{мин}}$). При таком расположении призмы относительно источника света (установка под **углом наименьшего отклонения**)

$$\sin \frac{\varphi_{\text{мин}} + \alpha}{2} = n \sin \frac{\alpha}{2},$$

где n – показатель преломления материала призмы по отношению к окружающей среде.

Плоские и сферические зеркала

К зеркалам относятся оптические элементы, изображение предметов в которых формируется отраженными лучами. Ход падающих и отраженных лучей подчиняется правилу: угол падения равен углу отражения.

Оптической осью зеркальной поверхности является прямая, перпендикулярная поверхности и проходящая через центр кривизны зеркальной поверхности. Для плоского зеркала радиус кривизны равен бесконечности. На рис. 2.6 показано построение изображения точки S для плоского зеркала с поверхностью AA . Лучи 1, исходящие из точки S (предмета), – падающие, лучи 2 – отраженные лучи от зеркальной поверхности AA . Эти лучи воспринимаются (например, глазом) как исходящие из точки S' , которая является изображением точки – предмета S . Из треугольников SBO и $S'BO$ следует, что расстояние предмета от зеркальной поверхности SO равно расстоянию изображения до зеркальной поверхности $S'O$.

Изображение протяженного предмета SC показано для плоского зеркала на рис. 2.7.

Сферическое зеркало имеет форму сферического сегмента (рис. 2.8). Центр C сферической поверхности, из которой вырезан сегмент, называется **оптическим центром зеркала**; вершина O сферического сегмента – **полюсом зеркала**. Любая прямая, проходящая через оптический центр зеркала C , называется **оптической осью зеркала**. Оптическая ось CO , проходящая через оптический центр зеркала и его полюс, называется **главной оптической осью**.

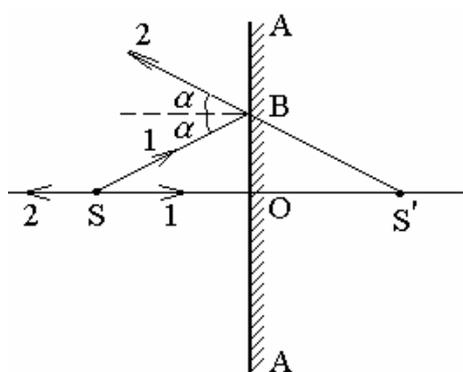


Рис. 2.6

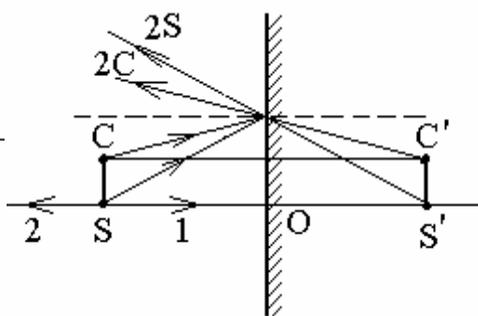


Рис. 2.7

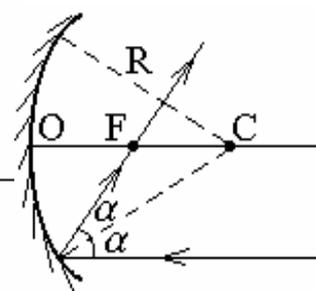


Рис. 2.8

Параксиальные лучи, параллельные главной оптической оси, после отражения от зеркала пересекаются в одной точке F , называемой **фокусом (главным фокусом)** зеркала. Расстояние $OF = f$ от полюса до фокуса зеркала называется **фокусным расстоянием**: $f = R/2$, где R – радиус кривизны

зеркала. Плоскость, проходящая через фокус перпендикулярно главной оптической оси, называется **фокальной плоскостью**.

На рис. 2.9 и 2.10 показаны примеры построения изображения в случаях: $a_1 > f$ (рис. 2.9) и $a_1 < f$ (рис. 2.10), где a_1 – расстояние от точек предмета AB до зеркала по главной оптической оси. Расстояние a_2 – расстояние от точек изображения $A'B'$ по главной оптической оси.

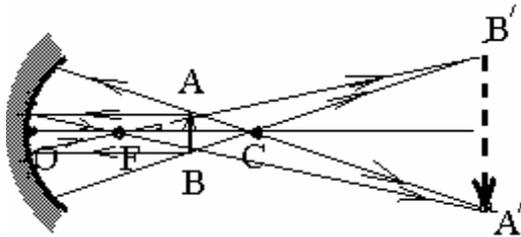


Рис. 2.9

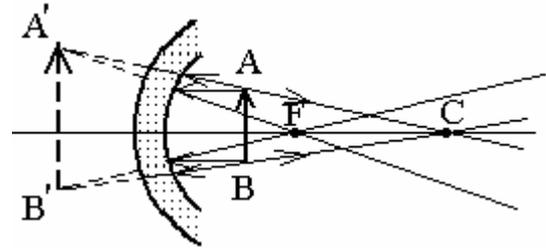


Рис. 2.10

Изображение в сферическом зеркале действительное, если предмет и его изображение находятся по одну сторону от зеркала (см. рис. 2.9). Когда предмет и его изображение находятся по разные стороны зеркала (см. рис. 2.10), изображение в зеркале мнимое.

Условие действительности или мнимости изображения в вогнутом зеркале можно записать в виде

$$\frac{a_1}{f} \begin{cases} > 1 - \text{действительное,} \\ < 1 - \text{мнимое.} \end{cases}$$

Из геометрических построений изображения получим формулу сферического зеркала

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{f} = \frac{2}{R}.$$

При этом в формуле необходимо учитывать знаки a_1 и a_2 . Считая f и a_1 положительными, если предмет находится в пространстве фокуса зеркала F , a_2 получаем отрицательное, если изображение мнимое (см. рис. 2.10), и a_2 получаем положительным, если изображение действительное. Отношение линейных размеров изображения $h_{\text{изобр}}$ и предмета $h_{\text{пр}}$, расположенных перпендикулярно к главной оптической оси, называется **линейным (поперечным) увеличением**

$$Y = \pm \frac{h_{\text{изобр}}}{h_{\text{пр}}}.$$

Знак плюс ($Y > 0$) соответствует **прямому изображению** (см. рис. 2.10), а знак минус ($Y < 0$) – **обратному (перевернутому) изображению** (см. рис. 2.9).

Линзы

Прозрачное тело, ограниченное с двух сторон криволинейной поверхностью, называется **линзой**. Линза считается **тонкой (тонкая линза)**, если ее толщина много меньше, чем радиус кривизны R_1 и R_2 обеих поверхностей.

Прямая, проведенная через центры кривизны C_1 и C_2 обеих поверхностей, называется **главной оптической осью** линзы (рис. 2.11). В тонкой линзе точки O_1 и O_2 пересечения главной оптической оси с обеими поверхностями можно считать сливающимися в одну точку O , которая называется **оптическим центром линзы**.

Плоскость, проходящая через оптический центр перпендикулярно главной оптической оси, называется **оптической плоскостью линзы**. **Побочными оптическими осями** называются прямые, проходящие через оптический центр линзы и не совпадающие с главной оптической осью.

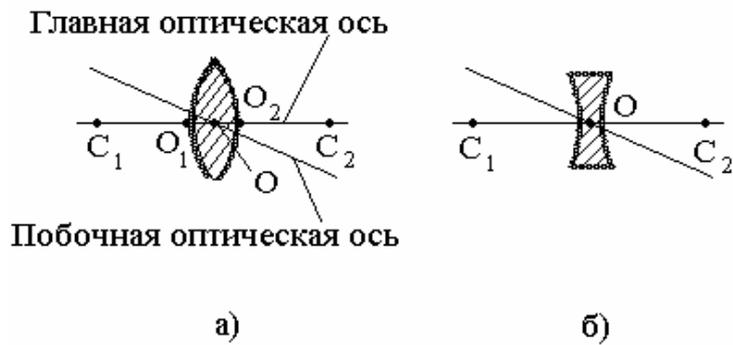


Рис. 2.11

Луч света, который распространяется по любой из оптических осей, проходит сквозь линзу без преломления.

Лучи параксиального (приосевого) светового пучка, распространяющиеся параллельно главной оптической оси, пересекаются в точке, лежащей на этой оси и называемой **фокусом линзы (главным фокусом)**. У всякой линзы имеются два фокуса по обе стороны от нее (рис. 2.12).

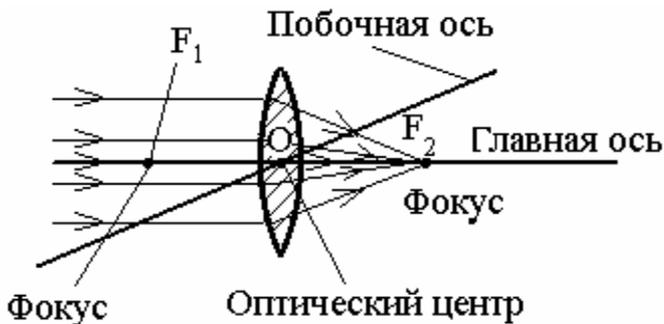


Рис. 2.12

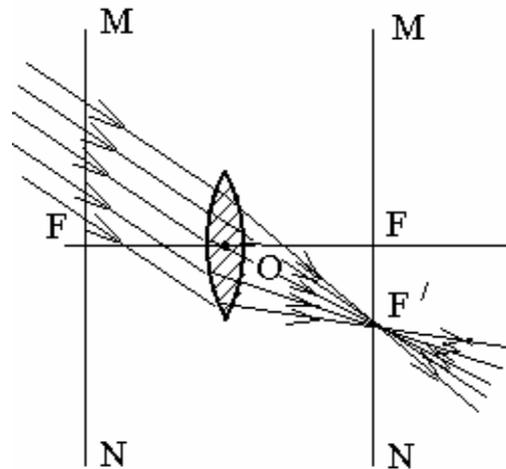


Рис. 2.13

Плоскость MN , проведенная через фокус линзы перпендикулярно к главной оптической оси, называется **фокальной плоскостью** (рис. 2.13). Лучи, падающие на линзу параллельно любой побочной оптической оси, после преломления в линзе пересекаются в точке пересечения фокальной плоскости побочной оптической осью. У линзы имеются две фокальные плоскости, расположенные по обе стороны от нее. Точки пересечения побочных оптических плоскостей с фокальными плоскостями линзы называют **побочными фокусами линзы** (точка F' на рис. 2.13).

Расстояние $OF = f$ от оптического центра линзы до ее фокусов называется **фокусным расстоянием линзы**

$$f = \frac{1}{(n_{21} - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}.$$

где $n_{21} = n_2 / n_1$, n_1 и n_2 – абсолютные показатели преломления для материала линзы и окружающей среды, R_1 и R_2 – радиусы кривизны поверхностей линзы для пространства предмета и пространства изображения.

Линза называется **собирающей**, если ее поверхности выпуклые (см. рис. 2.11, *а*) и **рассеивающей**, если ее поверхности вогнутые (см. рис. 2.11, *б*).

Геометрическое построение изображения предмета с помощью линз основывается на использовании лучей, ход которых априори известен:

- лучи, идущие по главной и побочным оптическим осям, не преломляются;
- лучи, идущие через фокус линзы в пространстве предмета, в пространстве изображения параллельны главной оптической оси;
- лучи, идущие в пространстве предмета параллельно главной оптической оси, проходят через фокус линзы в пространстве изображения (или линия хода таких лучей проходит через фокус пространства изображения для рассеивающей линзы);
- лучи, ход которых показан на рис. 2.13.

При построении изображения предмета, изображение каждой его точки является точкой пересечения двух из упомянутых лучей, исходящих из точки предмета. Примеры построения изображения показаны на рис. 2.14, 2.15, 2.16.

На рис. 2.14 собирающая линза дает действительное перевернутое изображение $A'B'$ предмета AB . На рис. 2.15 собирающая линза дает мнимое изображение $A'B'$ предмета AB . На рис. 2.16 рассеивающая линза дает мнимое изображение $A'B'$ предмета AB .

Из приведенных примеров построения изображения в тонких линзах можно вывести формулу тонких линз

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{f},$$

где f – фокусное расстояние линзы. При этом для рассеивающей линзы величины f и a_2 имеют отрицательный знак, так как, относясь к пространству изображения, лежат в пространстве предмета. Величина $D = 1/f$ называется оптической силой линзы. В системе СИ оптическая сила измеряется в диоптриях ($D = 1$ при $f = 1$ м).

Вопросы искажений оптических изображений линз рассматриваются в специальных (прикладных) курсах по построению оптических приборов.

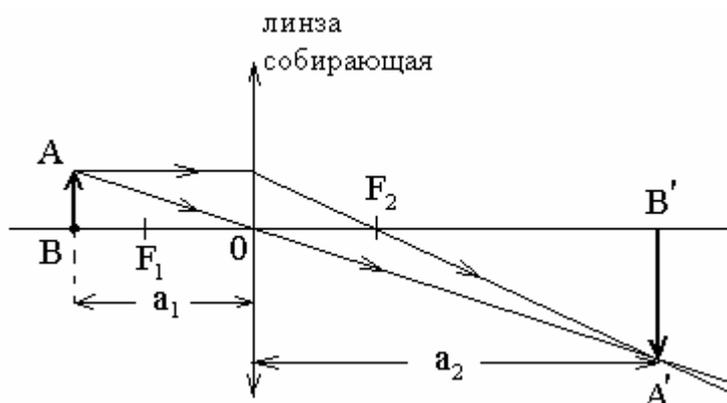


Рис. 2.14

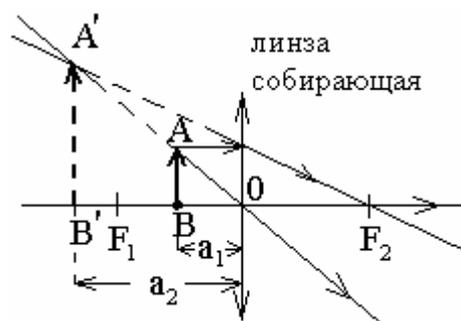


Рис. 2.15

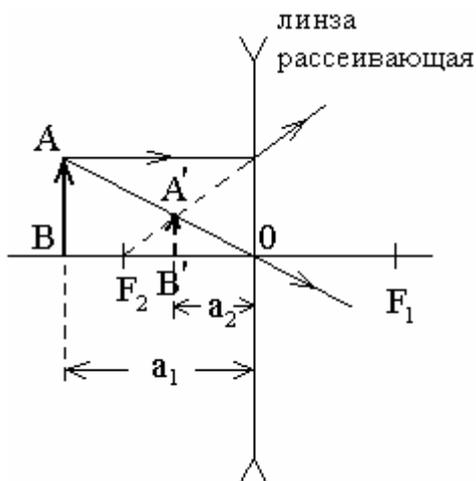


Рис. 2.16

2.2. Методические указания к лекционным занятиям

Вопросы лекции	Форма изучения	Литература	Вопросы для самоконтроля студентов
<p>Волновые процессы</p> <p>– законы геометрической оптики;</p> <p>– сферические зеркала;</p> <p>– линзы</p>	самост.	[3]; [7]; [9]	<p>1. Сформулируйте понятие фокуса и фокальной плоскости. В чем их отличие?</p> <p>2. Поясните смысл величин, входящих в формулу тонкой линзы.</p> <p>3. Укажите основные оптические характеристики среды.</p> <p>4. В чем состоит явление полного внутреннего отражения?</p> <p>5. Какова особенность отражения и преломления?</p> <p>6. В чем заключается особенность отражения волн от сферической поверхности?</p> <p>8. В каком случае отражения и преломления энергия волны переносится, а в каком нет?</p>

2.3. Методические указания к практическим занятиям

Тема: Законы геометрической оптики

Задачи	Рекомендации
<p>1. Применение законов отражения и преломления;</p> <p>2. Построение изображений в зеркалах и линзах.</p> <p>3. Определение параметров изображения и предмета на основе формул тонкой</p>	<p>1. Задачи о плоском, вогнутом и выпуклом зеркалах.</p> <p>а) Сделать чертеж, изобразив зеркало, главную оптическую ось, фокус и центр, а также предмет, изображение которого требуется найти.</p> <p>б) Построить изображение предмета. Для этого обычно достаточно найти изображение двух его крайних точек. Изображение точек предмета строят при помощи двух характерных лучей:</p> <ul style="list-style-type: none"> • луч, идущий от точки предмета параллельно какой-либо оптической оси; после отражения он проходит через фокус, лежащий на этой оси; • луч, проходящий через оптический центр зеркала, после отражения он идет по тому же направлению назад. <p>Ход отраженного луча, падающего под произвольным углом на сферическое зеркало, можно определить и с помощью побочной оптической оси. Для этого параллельно падающему лучу надо начертить побочную оптическую ось, найти на ней побочный фокус (точку пересечения фокальной поверхности с осью) и через него провести отраженный луч.</p> <p>в) Записать расчетные уравнения на основе формулы зеркала и формулы увеличения. Особое внимание следует уделить знакам перед d, f и F.</p>

линзы и формулы сферического зеркала	<p>г) Решить полученные уравнения относительно искомой величины.</p> <p>2. Задачи на построение и расчет систем зеркал.</p> <p>Здесь все расчеты и построения основываются на том, что в силу обратимости хода лучей изображение, даваемое первым зеркалом, нужно рассматривать как предмет для второго, изображение, даваемое вторым, – как предмет для первого. Следует при этом учитывать, что промежуточный предмет – изображение для следующего зеркала – может быть как действительным (в формулах зеркала a_2 следует брать со знаком «\rightarrow»), так и мнимым (a_2 – со знаком «\leftarrow»).</p> <p>3. Задачи о преломлении света на границе раздела двух сред.</p> <p>а) Сделать чертеж, изобразив ход лучей, переходящих из одной среды в другую. В точке падения луча на границу раздела провести нормаль, отметить углы падения и преломления, учитывая при этом, в какую среду, более или менее оптически плотную, переходит луч.</p> <p>б) Записать закон преломления для каждого перехода луча из одной среды в другую, записать вспомогательные соотношения, связывающие углы и расстояния, исходя из геометрии задачи.</p> <p>в) Решить полученную систему уравнений и найти неизвестные величины.</p> <p>4. Задачи на построение и расчет изображений в одиночных линзах.</p> <p>а) Сделать чертеж, отметив типичные точки линзы — фокус F и двойной фокус $2F$, расстояния от линзы до предметов.</p> <p>б) Построить изображение предмета. Для этого удобнее брать характерные лучи, упоминавшиеся в предыдущем разделе: параллельные главной оптической оси и лучи, проходящие через оптический центр линзы.</p> <p>Чтобы определить ход лучей из точек, расположенных на главной оптической оси, используются побочные оптические оси. Такую ось проводят через оптический центр линзы параллельно интересующему нас лучу и находят точку пересечения этой оси с фокальной плоскостью. Это и будет побочный фокус, в который и попадет после преломления луч.</p> <p>в) Записав формулы фигурирующих в задаче линз, решают полученную систему уравнений.</p> <p>5. Оптические системы.</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>системы, состоящие из сложенных вплотную линз.</i> <p>Сначала находят фокусное расстояние двух линз, сложенных вместе; если их фокусные расстояния равны f_1 и f_2, то фокусное расстояние такой системы f связано с ними формулой $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$ или $D = D_1 + D_2$.</p>
--------------------------------------	---

	<ul style="list-style-type: none">● <i>системы, состоящие из нескольких отстоящих друг от друга линз.</i>а) Сделать рисунок, отметить линзы, их характерные точки, предмет и заданные расстояния.б) Построить изображение предмета в первой линзе, игнорируя остальные.в) Используя формулу линзы и формулу увеличения (если необходимо), найти расстояние от изображения до первой и второй линз. При этом следует сразу же вычислять значения этих расстояний, что позволит судить о расположении этого изображения относительно второй линзы.г) Считая первое изображение предметом для второй линзы, аналогичным образом находят положение и размер второго изображения. При необходимости процедура повторяется нужное число раз. <p>Если на вторую линзу лучи падают расходящимся пучком, то изображение точки нужно рассмагивать как действительный предмет для второй линзы, а если на нее падает сходящийся пучок – как мнимый предмет. Важен выбор знаков перед a_2 и f. Если при составлении формул знаки были учтены, то при расчетах в полученных соотношениях следует подставлять модули входящих в них величин.</p> <ul style="list-style-type: none">● <i>системы, состоящие из линзы и зеркала.</i> <p>В них преобразование света происходит трижды, причем независимо от того, состоят ли они из сложных объектов или отстоящих друг от друга на некоторое расстояние. Ход лучей здесь таков: источник → линза; преломление в ней → зеркало; отражение в нем → линза; повторное преломление → окончательное изображение. Изображение может быть действительным и мнимым. Порядок расчета в таких системах такой же, как и в системах, составленных только из линз.</p>
--	--

2.4. Примеры решения задач

Примеры построения изображения в тонких линзах

Изображение любой точки предмета в линзе находится в точке пересечения двух лучей (или их продолжений), вышедших из этой точки и прошедших через линзу. Обычно для построения изображения используются два из трех лучей: луч, проходящий без преломления через оптический центр линзы; луч, падающий параллельно главной оптической оси; после преломления в линзе этот луч (или его продолжение) проходит через задний (относительно предмета) главный фокус; луч (или его продолжение), который проходит через передний главный фокус и после преломления идет параллельно главной оптической оси (рис. 2.17).

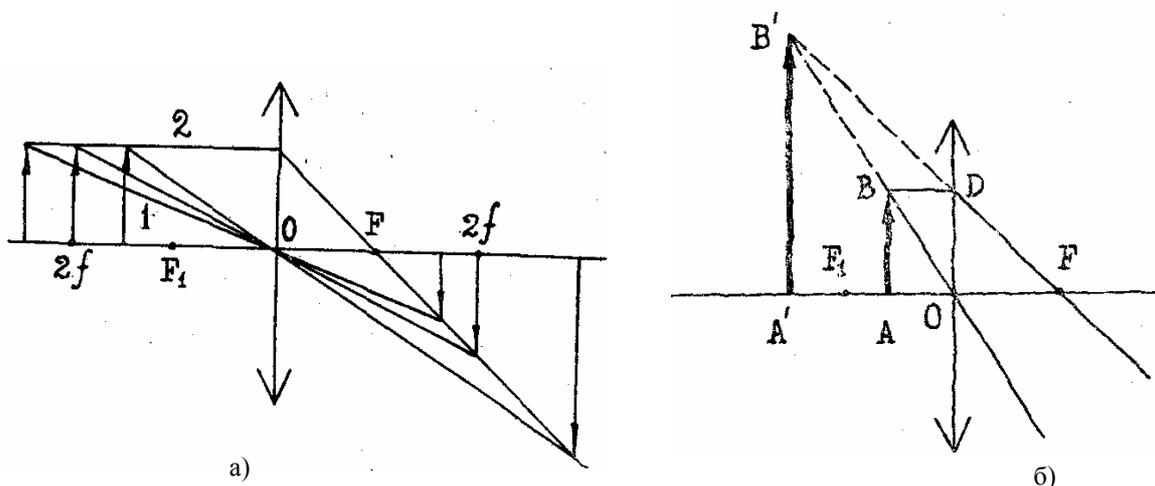


Рис. 2.17

Ход луча 2 одинаков во всех трех случаях, а луч 1 идет или под большим углом к оси (если расстояние от центра линзы до предмета меньше $2f$, но больше f), или под меньшим (если расстояние больше $2f$). Изображение получается действительное, перевернутое и либо уменьшенное, либо увеличенное.

Предмет (стрелка AB) расположен между фокусом и линзой. В этом случае лучи BDF и BO не пересекаются. Поэтому нужно строить пересечение их продолжений (см. пунктир на рис. 2.17, б). Изображение $A'B'$ мнимое (пересекаются не лучи, а их продолжения), увеличенное, прямое.

Задачи для самостоятельного решения (из курса средней школы)

1. Горизонтальный луч света падает на вертикально расположенное зеркало под углом 0° . Зеркало поворачивается на угол α вокруг вертикальной оси. На какой угол γ повернется отраженный луч?

2. Построить изображение в сферическом зеркале, если предмет (стрелка) находится на расстоянии R от зеркала (R – радиус зеркала).

3. Построить изображение в сферическом зеркале, если расстояние от предмета до зеркала лежит в пределах между фокусом и центром.

4. Построить изображение в сферическом зеркале, если предмет (стрелка) находится на расстоянии меньшем, чем фокусное.

5. Величина действительного изображения предмета в вогнутом зеркале H вдвое больше, чем величина предмета h . Расстояние между предметом и изображением $l = 15$ см. Определить: 1) фокусное расстояние зеркала; 2) оптическую силу зеркала.

6. Луч света падает под углом $I = 30^\circ$ на плоскопараллельную стеклянную пластинку и выходит из нее параллельно первоначальному лучу. Какова толщина пластинки d , если расстояние между лучами $l = 1,94$ см?

7. На дно сосуда, наполненного водой до высоты $h = 10$ см, помещен точечный источник света. На поверхности воды плавает круглая непрозрачная пластинка; ее центр находится над источником света. Какой наименьший радиус R должна иметь эта пластинка, чтобы ни один луч не мог выйти через поверхность воды?

8. Монохроматический луч падает на боковую поверхность равнобедренной призмы, и после преломления идет в призме параллельно основанию. Выйдя из призмы, он оказывается отклоненным на угол δ от своего первоначального направления. Найти связь между преломляющим углом призмы p , отклонением луча δ и показателем преломления n .

9. Какова высота предмета (стрелки), стоящего на главной оси линзы на расстоянии $g = 3/2f$ от центра, если его изображение имеет высоту $H = 0,24$ см?

10. Плосковыпуклая линза с радиусом кривизны $R = 30$ см и показателем преломления $n = 1,5$ дает изображение предмета с увеличением $\Gamma = 2$. Найти расстояние от предмета до линзы и от линзы до изображения. Построить чертеж.

11. Между неподвижным предметом и экраном помещена линза с фокусным расстоянием $f = 16$ см, сквозь которую лучи от предмета попадают на экран. Два положения линзы дают резкое изображение на экране предмета. Расстояние между этими двумя положениями $l = 60$ см. Найти расстояние L от предмета до экрана.

Примеры решения задач на законы преломления

1. Наблюдатель рассматривает светящуюся точку через плоскопараллельную стеклянную пластинку ($n = 1,5$) толщиной $d = 3,0$ см так, что луч зрения нормален к пластинке. Определить расстояние между точкой S и ее изображением S' (см. рис. 2.18).

Решение. В глаз наблюдателя попадает световой пучок, лучи которого образуют между собой весьма малые углы. Продолжения этих лучей пересекаются в одной точке S' , являющейся изображением светящейся точки S .

Пусть два луча выходят из точки S и попадают в глаз. Один из них – луч SN – падает на пластинку нормально. Другой – луч SO – падает под произвольным весьма малым углом i . Этот луч, дважды преломившись, выйдет из пластинки параллельно отрезку SO . Чтобы определить положение точки S' , в которой пересекутся продолжения этих двух лучей, проведем отрезок OA , параллельный лучу SN . Из параллелограмма $SS'CO$ следует

$$SS' = OC = d - h. \quad (1)$$

При этом отрезок $h = AC$ можно выразить через величины d, n . Для этого заметим, что, если бы в точке O находился источник света, его изображением являлась бы точка C , так как здесь пересекались бы лучи, выходящие из точки O , после преломления на верхней грани пластинки. Следовательно, применяя $a_1 = AO = d, a_2 = AC = h, n_1 = n, n_2 = 1$ (воздух), получим

$$h = d / n. \quad (2)$$

Подставив это значение h в (1), найдем

$$SS' = (n - 1)d / n = 1,0 \text{ см.}$$

Как видно из рис. 2.19, изображение S' смещено относительно предмета S на 1 см в сторону наблюдателя.

2. Человек, стоящий на берегу пруда, смотрит на камень, находящийся на дне. Глубина пруда $h = 1$ м. На каком расстоянии h' от поверхности воды увидит человек камень, если луч зрения составляет с вертикалью угол $i = 60^\circ$?

Решение. Восприятие глубины пространства, т.е. расстояния до рассматриваемого объекта, обусловлено зрением двумя глазами. Наблюдение светящейся точки одним глазом не дает ощущения глубины, а позволяет судить лишь о

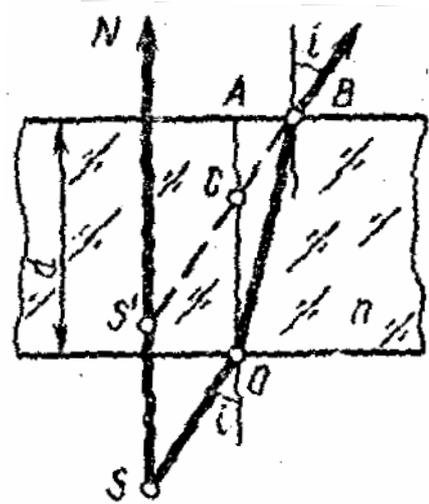


Рис. 2.18

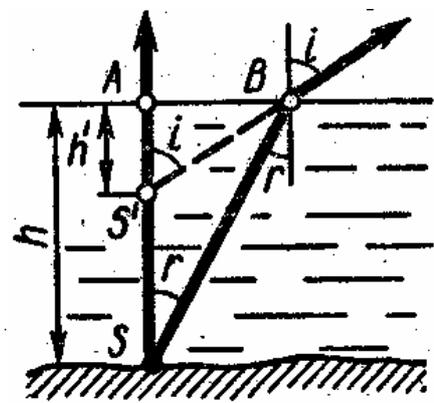


Рис. 2.19

том, в каком направлении находится точка. При наблюдении двумя глазами светящаяся точка кажется расположенной там, где пересекаются лучи зрения, соответствующие обоим глазам наблюдателя.

Но лучи, выходящие из какой-либо точки S камня, после преломления на поверхности воды уже не образуют гомоцентрического пучка: продолжения разных пар лучей пересекаются в различных точках S' . Следовательно, кажущаяся глубина пруда зависит от расположения глаз.

Полагая, что оба глаза стоящего человека находятся на одной горизонтали, можно найти положение точки S' . Пусть луч BS (см. рис. 2.19) попадает в один глаз наблюдателя. Чтобы этот луч попал в другой глаз, надо повернуть весь чертеж вокруг вертикали N на некоторый угол, зависящий от расстояния между глазами. После поворота продолжение луча BC пересечет вертикаль в той же точке, что и до поворота. Следовательно, эта точка и является искомой точкой S' – видимым изображением точки S .

Из чертежа следует

$$AB = htgr = h'tgi.$$

Отсюда, учитывая, что показатель преломления воды $h = \sin i / \sin r$

$$h' = h \frac{tgr}{tgi} = h \left(\frac{\sin r}{\cos r} : \frac{\sin i}{\cos i} \right) = \frac{h}{n} \frac{\cos i}{\sqrt{1 - (\sin^2 i)/n^2}}.$$

Подставив в формулу числовые значения величин (для воды $n = 1,33$), найдем

$$h' = 0,5 \text{ м.}$$

3. Тонкая стеклянная плосковогнутая линза, радиус кривизны которой $R = 0,2$ м, плотно закрыта тонкой стеклянной пластинкой и погружена в воду. Определите оптическую силу такой системы.

Решение. Тонкая стеклянная пластинка практически не влияет на ход световых лучей. Поэтому можно считать, что пластинки нет, а вода и воздух граничит между собой непосредственно.

Существует несколько способов решения задачи. Один из них основан на том, что, поочередно применив формулу для всех трех преломляющих поверхностей, можно найти фокусное расстояние системы, а значит, и ее оптическую силу.

Применим здесь другой способ, рассматривая нашу систему как две сложенные вплотную тонкие линзы: одна из них – плосковогнутая стеклянная, другая – плосковыпуклая воздушная. Пусть $D_{ст}$, $D_{возд}$ – оптические силы этих линз. Тогда оптическая сила системы

$$D = D_{\text{ст}} + D_{\text{возд}}. \quad (1)$$

Определим оптические силы обеих линз, считая, что каждая из них находится в воде. Пусть n_1, n_2, n_3 – коэффициенты преломления воды, стекла и воздуха соответственно. Выбрав положительное направление отсчета (направление луча) вправо, получим

$$D_{\text{ст}} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{R} \right), \quad D_{\text{возд}} = \left(\frac{n_3}{n_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\infty} \right). \quad (2)$$

Из формул (1), (2) найдем

$$D = \frac{(n_3 - n_2)}{n_1 R}.$$

Взяв из таблиц $n_1 = 1,33$ и $n_2 = 1,5$ и выполнив вычисление, получим

$$D = -1,9 \text{ дптр.}$$

Знак «−» в ответе показывает, что данная система – рассеивающая.

3. УЧЕБНЫЙ БЛОК «ВОЛНОВАЯ ОПТИКА»

Введение

Свет – это электромагнитная волна, в которой колеблются в двух взаимно перпендикулярных плоскостях два вектора: \vec{E} – вектор напряженности электрического поля и \vec{H} – вектор напряженности магнитного поля. Взаимодействие света с веществом осуществляется через электрическую компоненту электромагнитного поля. При этом вектор \vec{E} называют **световым вектором**. Поскольку свет представляет собой электромагнитную волну, то свету присущи все явления, характерные для волновых процессов. Эти явления рассматриваются в данном блоке.

Интерференция света – физическое явление, суть которого заключается в том, что наложение световых потоков при определенных условиях не приводит к увеличению интенсивности света (или освещенности) до величины, равной сумме интенсивности налагающихся потоков, а сопровождается перераспределением интенсивности в пространстве, в результате чего на экране наблюдается интерференционная картина – чередующиеся светлые и темные участки. Условия, при которых реализуется интерференция, можно установить, если рассмотреть наложение световых потоков как сложение волн.

Дифракцией называется совокупность явлений, наблюдаемых при распространении света в среде с резкими неоднородностями и связанных с отклонениями от законов геометрической оптики. Дифракция, в частности, приводит к огибанию световыми волнами препятствий и проникновению света в область геометрической тени. Для наблюдения дифракции световых волн необходимо создание специальных условий. Это обусловлено тем, что масштабы дифракции сильно зависят от соотношения размеров препятствия и длины волны. При длине волны, сравнимой с размерами препятствия, дифракция выражена наиболее сильно. В случае, если длина волны значительно меньше размеров препятствия, дифракция выражена слабо.

При изучении данного раздела студенты должны **иметь представление:**

- о принципе суперпозиции колебаний;
- об интерференции и дифракции упругих волн;
- об основных законах геометрической оптики;
- об особенностях отражения волн от границы раздела различных сред;

обладать навыками:

- геометрического построения изображений с учетом отражения и преломления волн;
- решения тригонометрических уравнений.

Учебная программа блока

Содержание блока	Форма подготовки	Литература
1. Интерференция света	лекция	[9]
2. Дифракция света	лекция	[9]
3. Дисперсия света	лекция	[7]
4. Понятие о голографии	лекция	[9]

Цели обучения

студент должен знать	студент должен уметь
<ul style="list-style-type: none"> – условие возникновения максимума и минимума интерференционной картины в различных ситуациях; – причины и условия возникновения потери длины волны на границе раздела сред; – условия максимума для дифракции на отверстии и экране (дифракции Френеля); – условие максимума и минимума для дифракции на щели; – условия для максимумов и минимумов для дифракции на дифракционной решетке; – причины возникновения дисперсии; – применение интерференции, дифракции, и голографии 	<ul style="list-style-type: none"> – определять ширину и положение интерференционных максимумов и минимумов; – определять толщину пленки в условиях проходящего и отраженного света; – определять общее количество дифракционных максимумов и минимумов; – определять углы дифракции и разрешающую способность дифракционной решетки; – определять параметры зон Френеля

3.1. Краткое содержание теоретического материала

Интерференция

Условия наблюдения интерференции

При сложении двух гармонических колебаний, происходящих в одном направлении и с одинаковой частотой ω :

$$S_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \quad \text{и} \quad S_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2),$$

получается гармоническое колебание такой же частоты ω с амплитудой A , равной

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad (1)$$

где φ_1 и φ_2 – начальные фазы колебаний; a_1 и a_2 – амплитуды колебаний

Выражение (1) показывает, что величина квадрата амплитуды результирующего колебания зависит от разности фаз $(\varphi_1 - \varphi_2)$ исходных колебаний.

Возможны два случая:

1. Разность фаз колебаний $(\varphi_1 - \varphi_2)$ в данном месте пространства сохраняется неизменной за время τ , достаточное для наблюдения. Такие колебания называются **когерентными**. Средняя энергия результирующего колебания (пропорциональная квадрату амплитуды) отличается от суммы энергий отдельных колебаний (см. (1));

2. Разность фаз колебаний беспорядочно меняется за время наблюдений, среднее значение $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ будет при этом равно нулю, а средняя энергия результирующего колебания будет равна сумме средних энергий исходных колебаний. Такие колебания **некогерентны**.

В связи с этим условием наблюдаемой интерференции волн является их **когерентность**, то есть сохранение постоянной разности фаз в данном месте наблюдения, одинаковая частота колебаний и одинаковое направление колебаний.

Получение когерентных волн. Оптическая разность хода

Для получения когерентных световых волн с помощью обычных (не лазерных) источников применяют метод разделения света от одного источника на две или несколько систем волн. В каждой из них представлено излучение одних и тех же атомов источника, так что из-за общности происхождения эти волны когерентны между собой и интерферируют при наложении. Разделение света на когерентные волны можно осуществить несколькими способами:

1. разделением падающего потока на два путем пропускания света через два близко расположенных отверстия (щели), как это сделано в опыте Юнга;

2. путем отражения или преломления света (плоскопараллельная пластинка или пленка, клин и т.п.) на границе раздела двух сред с разными показателями преломления. Так как результат интерференции определяется результирующей амплитудой (квадрат которой пропорционален интенсивности света), рассмотрим условия получения максимальной и минимальной интенсивности при наложении двух когерентных волн.

Величину **светового вектора** можно представить выражением

$$E = E_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_0} \right), \quad (2)$$

где T – период колебаний; λ_0 – длина волны в вакууме (и в воздухе); x – координата. При сложении двух когерентных волн с амплитудами E_{01} и E_{02} результирующая амплитуда колебаний будет равна (см. (1))

$$E = \sqrt{E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos \frac{2\pi}{\lambda_0}(x_2 - x_1)}. \quad (3)$$

Величина $(x_2 - x_1)$ называется **разностью хода**. Если световые волны распространяются не в воздухе, а в среде с показателем преломления n , то длина световой волны $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$ и разность фаз складываемых колебаний будет равна

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(x_2n - x_1n). \quad (4)$$

Величина $(x_2n - x_1n) = \Delta$ называется **оптической разностью хода**.

Если лучи 1 и 2 идут в средах с разными показателями преломления (n_1 и n_2), то

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(x_2n_2 - x_1n_1). \quad (5)$$

Максимальная интенсивность $I(I \sim E^2)$ при наложении световых волн будет наблюдаться, когда косинус в формуле (3) будет равен единице, то есть когда $\Delta\varphi = 2m\pi$, где $m = 0, 1, 2, 3 \dots$ (колебания в одной фазе).

Минимальная интенсивность будет наблюдаться, когда $\Delta\varphi = (2m + 1)\pi$, а $\cos \Delta\varphi = -1$ (колебания находятся в противофазе).

Оптическая разность хода Δ при этих условиях

$$\Delta = \Delta\varphi \frac{\lambda_0}{2\pi} = 2m \frac{\lambda_0}{2} \text{ (максимум);} \quad (6)$$

$$\Delta = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2} \text{ (минимум).} \quad (7)$$

Выражения (6) и (7) называются **условиями интерференционных максимумов и минимумов**, соответственно, а величина m , входящая в них, называется порядком максимума или минимума.

Расчет интерференционной картины (на примере опыта Юнга)

В опыте Юнга первичным источником света служит ярко освещенная щель S (рис. 3.1). На некотором расстоянии от S находится преграда Π с двумя узкими щелями S_1 и S_2 , параллельными щели S и находящимися на

расстоянии $\frac{d}{2}$ от оси SO (ось проходит через щель S и середину экрана, перпендикулярно преграде Π и экрану \mathcal{E}).

Интерференция наблюдается на экране \mathcal{E} на участке BC , где перекрываются световые пучки от щелей S_1 и S_2 . Расстояние от преграды Π до экрана \mathcal{E} равно L (обязательным условием наблюдения интерференции является условие: $L \gg d$).

Рассмотрим лучи 1 и 2, приходящие в точку B на экране (рис. 3.1). Эта точка отстоит от центра экрана на расстоянии $OB = x$.

Для простоты рассмотрим случай, когда вся установка находится в воздухе ($n = 1$). Рассчитаем разность хода лучей 1 и 2. Из рис. 3.1 видно, что

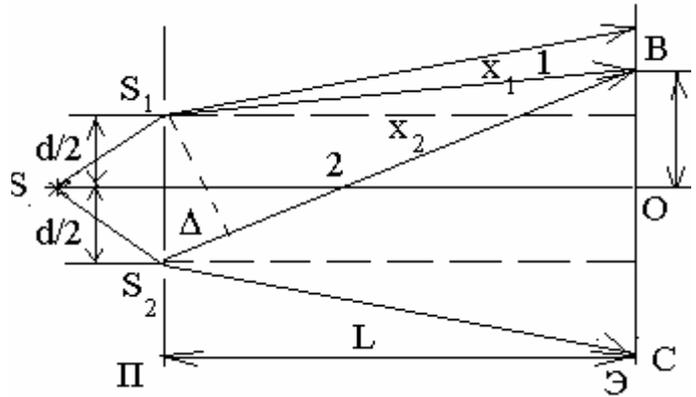


Рис. 3.1

$$\begin{cases} x_1^2 = L^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 \\ x_2^2 = L^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 \end{cases}$$

Разность этих выражений

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 = 2xd. \quad (8)$$

Используя условие, что $L \gg d$, можно считать, что $x_1 \approx x_2 \approx L$, т.е. $(x_1 + x_2) = 2L$. Тогда разность хода лучей Δ равна

$$\Delta = x_2 - x_1 = \frac{xd}{L}. \quad (9)$$

Периодически повторяющиеся на экране области с максимальной интенсивностью определяются координатами x_{\max} (см. условие максимума (6))

$$x_{\max} = \frac{\Delta \cdot L}{d} = \frac{m\lambda_0 L}{d}, \quad (10)$$

а области с минимальной интенсивностью x_{\min} (см. выражение (7)) – координатами

$$x_{\min} = \frac{(2m+1)\lambda_0 L}{2d}. \quad (11)$$

Расстояние между соседними максимумами (светлыми интерференционными полосами на экране) $(m + 1)$ -го и m -го порядка равно

$$\Delta x_{\max} = \frac{(m + 1)\lambda_0 L}{d} - \frac{m\lambda_0 L}{d} = \frac{\lambda_0 L}{d}. \quad (12)$$

Расстояние между соседними темными полосами аналогичное

$$\Delta x_{\min} = \frac{(2m + 2 + 1)\lambda_0 L}{2d} - \frac{(2m + 1)\lambda_0 L}{2d} = \frac{\lambda_0 L}{d}. \quad (13)$$

Таким образом, интерференционная картина на экране представлена чередующимися светлыми и темными полосами, расположенными на равных расстояниях друг от друга.

Из условия (13) видно, что если бы расстояние d было соизмеримо с расстоянием L , то расстояние между полосами Δx было бы порядка λ_0 , то есть составило бы несколько десятых долей микрона (в видимой области $\lambda_0 = (4 + 7)10^{-7} \text{ м} = (0,4 - 0,7) \text{ мкм}$). В этом случае отдельные полосы были бы совершенно неразличимы. Для того чтобы интерференционная картина была отчетливой, необходимо выполнение условия $L \gg d$. Ширина интерференционных полос и расстояние между ними зависят от длины волны λ_0 . Только в центре экрана ($x = 0$) совпадут максимумы всех длин волн. По мере удаления от центра экрана максимумы разных цветов смещаются относительно друг друга. На экране наблюдаются цветные полосы, если источник S излучает белый свет.

При наблюдении интерференции существует такая величина разности хода, начиная с которой исчезает интерференционная картина. Эта величина называется **длиной когерентности**. Поскольку фаза каждого цуга различна, условие когерентности будет выполняться, если оптическая разность хода меньше пространственной протяженности цуга. При большей разности хода будет осуществляться наложение волн различных следующих друг за другом цугов с различными фазами, то есть когерентность взаимодействующих волн нарушается. В этом случае интерференционная картина наблюдаться не будет (она «размывается»). Время испускания цуга волн называется длительностью цуга или временем когерентности. Пространственная протяженность цуга L (длина цуга волн) и время когерентности τ связаны очевидным соотношением: $L = \tau \cdot c$ (где c – скорость света).

Интерференция в тонких пленках (пластинках)

Пусть на тонкую плоскопараллельную пластинку (пленку) с показателем преломления n падает параллельный пучок света (рис. 3.2). Для простоты возьмем угол падения, равный нулю (пучок падает перпендикулярно поверхности).

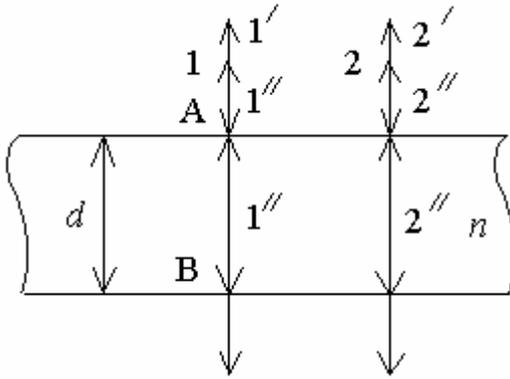


Рис. 3.2

Луч 1 в точке А (рис. 3.2) частично отражается и частично проходит в пластинку. В точке В опять происходит отражение от нижней границы пленки. В результате получается два луча, один из которых – непосредственно отраженный в точке А – $1'$, а второй – прошедший дважды толщину пластинки d – $1''$. Эти лучи когерентны и будут интерферировать. Оптическая разность хода лучей $1'$ и $1''$

$$\Delta = 2dn - \frac{\lambda_0}{2}. \quad (14)$$

Величина $\frac{\lambda_0}{2}$ появляется в оптической разности хода за счет того, что при отражении световой волны от более плотной среды (в точке А) фаза колебаний меняется на π . Это соответствует дополнительной разности хода $\frac{\lambda_0}{2}$ (в этом случае как бы происходит «потеря полуволны» при отражении).

Если эта разность хода Δ равна четному числу полуволен (см. формулу (6)), то в результате наложения волн $1'$ и $1''$ получится усиление света (максимум). Условие максимума запишется как

$$\Delta = 2dn - \frac{\lambda_0}{2} = 2m \frac{\lambda_0}{2}, \quad (15)$$

то есть

$$2dn = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2}. \quad (16)$$

Условие минимума принимает вид

$$\Delta = 2dn - \frac{\lambda_0}{2} = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2}, \quad (17)$$

то есть

$$2dn = (2m + 2) \frac{\lambda_0}{2}. \quad (18)$$

Результат интерференции зависит от **толщины пластинки d** . Минимальная толщина пластинки, при которой может наблюдаться интерференция, задается условием

$$2dn = \frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0), \quad (19)$$

то есть

$$d_{\min} = \frac{\lambda_0}{4n}. \quad (20)$$

При рассмотрении интерференции в тонких пластинках (пленках) следует учитывать, что часть света проходит через пластинку, и интерференцию можно наблюдать одновременно и в проходящем свете. Причем, если для отраженного света при заданной толщине пластинки d будет наблюдаться усиление света, то для проходящего – ослабление (и наоборот).

Результат интерференции зависит и от угла падения светового луча на поверхность пластинки. Рассмотрим случай, когда световой луч падает на пластинку под углом α (рис. 3.3).

За счет отражения света от верхней и нижней поверхностей пластинки образуются два когерентных пучка 1 и 2, прошедших разные оптические пути S_1 и nS_2 , где S_1 – длина отрезка AD (пластинка находится в воздухе; $n = 1$). S_2 – суммарная длина отрезков АВ и ВС, n – показатель преломления пластинки.

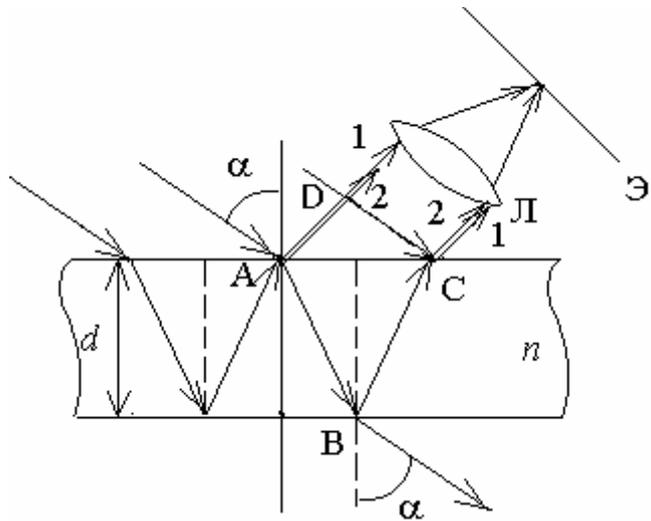


Рис. 3.3

Оптическая разность хода лучей 1 и 2 равна

$$\Delta = nS_2 - S_1 = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}. \quad (21)$$

Учитывая потерю полуволны $\frac{\lambda_0}{2}$ при отражении луча 1 от более плотной среды, получим условие интерференционного максимума

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda_0}{2} = 2m \frac{\lambda_0}{2}. \quad (22)$$

Каждая интерференционная полоса образуется лучами, падающими на пластинку под одинаковым углом α . Получающиеся в таких условиях интерференционные полосы носят название **полос равного наклона**.

Если пленка имеет переменную толщину (например, мыльная пленка, расположенная вертикально, стеклянный клин и т.д.), то результат интерференции будет зависеть от места падения луча. Каждая интерференци-

онная полоса образуется за счет отражения света от тех мест пластинки, где толщина одинакова. Интерференционные полосы в этом случае называются **полосами равной толщины**.

Явление интерференции в тонких пленках **применяется** для просветления оптики. Если покрыть поверхность линзы тонким слоем прозрачного вещества с показателем преломления, отличным от показателя преломления линзы, то можно так подобрать толщину этого слоя, чтобы для определенной (нужной) длины волны света выполнялось условие минимума интерференции в отраженном свете. Тогда свет этой длины волны полностью будет проходить через линзу, что улучшает ее оптические качества. Кроме того, явление интерференции лежит в основе устройства многих разновидностей интерференционных приборов, называемых интерферометрами. Интерферометры можно использовать для определения показателей преломления газообразных веществ (интерферометр Жамена), для точного измерения длин световых волн (интерферометр Майкельсона).

Дифракция света

Принцип Гюйгенса – Френеля

Согласно принципу Гюйгенса каждую точку фронта волны можно принять за центр вторичной сферической волны с той же частотой и фазой. Френель дополнил этот принцип следующими положениями:

1. Вторичные источники света – точки волновой поверхности – дают когерентное излучение;
2. Волны от этих вторичных источников при наложении друг на друга создают сложную *интерференционную картину* перераспределения интенсивности (квадрата светового вектора).

Эти принципы (вместе с принципом Гюйгенса) и носят название **принципа Гюйгенса – Френеля**.

В некоторый момент времени (рис. 3.4) световая сферическая волна имеет волновую поверхность SS' с радиусом $OA = R$.

Рассмотрим результат сложения большого количества когерентных волн в некоторой точке M , лежащей на оси OO' . Так как вторичных источников бесконечно много, удобнее разбить волновую поверхность на определенные участки по следующему принципу.

Из точки M проводим окружности на фронте волны с радиусами $AM + \frac{\lambda}{2}$, $AM + 2\frac{\lambda}{2}$, $AM + 3\frac{\lambda}{2}$ и т.д. Они разобьют волновую поверхность SS' на

кольцевые области, называемые зонами Френеля. Из построения видно, что вторичные волны от границ двух соседних зон приходят в точку М с разностью хода $\frac{\lambda}{2}$ (значит, в противофазе).

Расчет показывает, что площади кольцевых зон примерно равны. Тогда число вторичных источников, посылающих волны в точку М от каждой зоны, можно считать одинаковыми. Амплитуда колебаний от разных зон убывает с увеличением номера зоны (так как амплитуда обратно пропорциональна расстоянию от исходной до конечной точки)

$$A_1 > A_2 > A_3 > \dots,$$

где $A_1, A_2, A_3 \dots$ – амплитуды колебаний от первой, второй, третьей зон соответственно. Приближенно можно считать для такого убывающего ряда, что

$$A_m = \frac{A_{m+1} + A_{m-1}}{2}, \quad (23)$$

где A_m – амплитуда колебаний от m -той зоны.

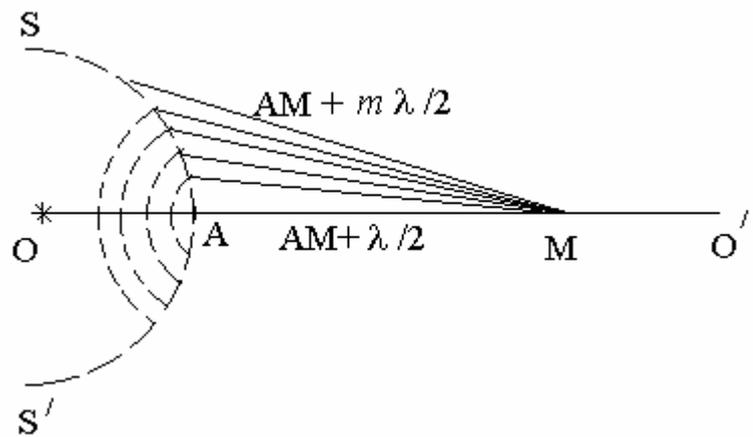


Рис. 3.4

Так как из соседних зон колебания приходят в точку М в противофазе, амплитуда результирующего колебания в точке М будет равна

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots \quad (24)$$

Это выражение можно переписать следующим образом:

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots + \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{A_{m-2}}{2} - A_{m-1} + \frac{A_m}{2} \right) + \frac{A_m}{2} (m - \text{нечетное}) \\ \left(\frac{A_{m-3}}{2} - A_{m-2} + \frac{A_{m-1}}{2} \right) + \frac{A_{m-1}}{2} - A_m (m - \text{четное}) \end{array} \right. \quad (25)$$

Учитывая условие (23), можно положить равным нулю все выражения в скобках. В результате получится (если учесть, что $\frac{A_{m-1}}{2} - A_m \approx -\frac{A_m}{2}$)

$$A = \frac{A_1}{2} \pm \frac{A_m}{2}, \quad (26)$$

где знак «плюс» берется для нечетных m , а «минус» – для четных.

Таким образом, используя принцип Гюйгенса – Френеля, можно рассчитать результирующую амплитуду (и интенсивность света) от различных участков сферической волны. Действие всей волны (полностью открытая волновая поверхность) сведется к тому, что результирующая амплитуда будет равна $\frac{A_1}{2}$ (так как для большого числа m амплитуда $A_m \approx 0$), то есть распространение света от источника O к точке M происходит так, как если бы световой поток шел внутри узкого канала вдоль OM , то есть прямолинейно.

Если на пути волны поставить непрозрачный экран с небольшим отверстием, картина будет меняться в зависимости от размеров отверстия.

Дифракция Френеля на круглом отверстии

Пусть на пути световых лучей от источника S (рис. 3.5) находится на расстоянии a непрозрачная преграда D с малым круглым отверстием радиуса r . На расстоянии b от центра отверстия находится непрозрачный экран K .

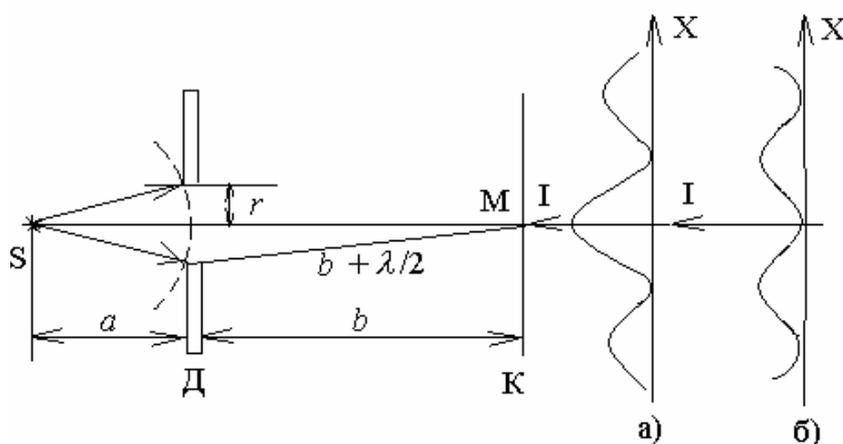


Рис. 3.5

Если из точки M построить на отверстии зоны Френеля, то число зон, укладывающихся на отверстии радиуса r , выразится формулой

$$m = \frac{r^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right). \quad (27)$$

Расстояние от края отверстия до центра экрана M (см. рис. 3.5), согласно построению Френеля, равно $\left(b + m \frac{\lambda}{2} \right)$. Число зон Френеля m на отверстии зависит от радиуса отверстия, чем меньше r , тем меньше зон укладывается на этом отверстии (при заданных расстояниях a и b).

Предположим, что величины r , a и b подобраны так, что число $m = 1$ (одна зона Френеля на отверстии). В этом случае результирующая амплитуда световых колебаний в точке M равна A_1 , а интенсивность света $I \sim A_1^2$.

При $m = 2$ (см. (1.4)) $A = \frac{A_1}{2} - \frac{A_2}{2}$, то есть много меньше, чем в предыду-

щем случае. При увеличении размеров отверстия число m увеличивается, величина A_m (амплитуда от m -ой зоны) стремится к нулю, а результирующая амплитуда – к $\frac{A_1}{2}$ (интенсивность $\frac{A_1^2}{4}$). Таким образом, малое отверстие может давать в центре экрана интенсивность в четыре раза большую, чем большое (что явно противоречит законам прямолинейного распространения света). Отверстие, на котором укладывается нечетное число зон, дает усиление света в точке М; при четном числе – ослабление. Так как число зон m на отверстии зависит и от расстояния b до экрана, то, удаляя экран от отверстия, можно наблюдать дифракционную картину. Если рассматривать другие точки экрана и для них провести построение зон Френеля, то в зависимости от их расположения в отверстии будет укладываться разное число зон Френеля, и в исследуемой точке на экране будет либо свет, либо темнота. Дифракционная картина на экране будет иметь вид чередующихся темных и светлых концентрических колец с центром в точке М (геометрическое место точек на экране, для которых строится данное число зон – окружности). Если на пути световой волны поставить вместо отверстий малый круглый непрозрачный диск радиуса r , который закрывает m первых зон Френеля, то в центре получится светлое пятно. Это объясняется тем, что результирующая амплитуда колебаний в этом случае, согласно формулам (24) и (25), будет равна

$$A = \frac{A_{m+1}}{2}, \quad (28)$$

и чем меньше размеры диска, тем ярче картина в центре экрана.

Если источник света немонахроматический, то при дифракции от круглого отверстия на экране будут наблюдаться кольца различного цвета с белым пятном в центре (если m – нечетное) и с темным пятном (если m – четное). При дифракции на круглом диске в центре дифракционной картины будет наблюдаться светлое пятно, яркость которого будет зависеть от размеров диска.

Дифракция Фраунгофера

Наибольший практический интерес представляют дифракционные явления, наблюдаемые при падении на узкую щель (или на совокупность щелей – дифракционную решетку) – **дифракции Фраунгофера** (рис. 3.6). Если после точечного источника света S поместить на расстоянии, равном фокусному, линзу L_1 , то щель АВ освещается параллельным пучком. Щель АВ должна иметь размеры меньше размера линзы (то есть меньше размера пучка). Каждая точка волновой поверхности в щели, согласно принципу

Гюйгенса – Френеля, становится вторичным точечным источником когерентных волн. На щель световые лучи падают под углом $\varphi = 0$ (φ – угол между направлением луча и перпендикуляром к плоскости щели, то есть оптической оси данной схемы опыта), а после щели, вследствие дифракции, направление световых лучей будет различным (угол φ может иметь значения от 0° до $\pi/2$). Так как вторичные точечные источники когерентны, то световые лучи при наложении будут интерферировать. Для того, чтобы сложить параллельные лучи, после щели ставят вторую линзу L_2 , которая соберет в определенную точку своей фокальной плоскости лучи, выходящие из щели под одинаковым углом φ .

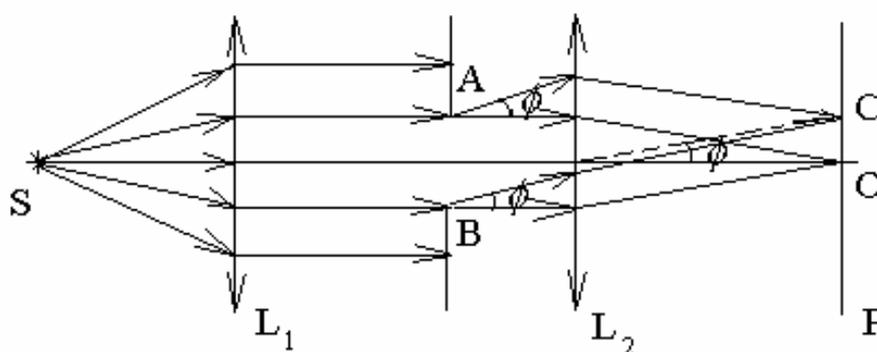


Рис. 3.6

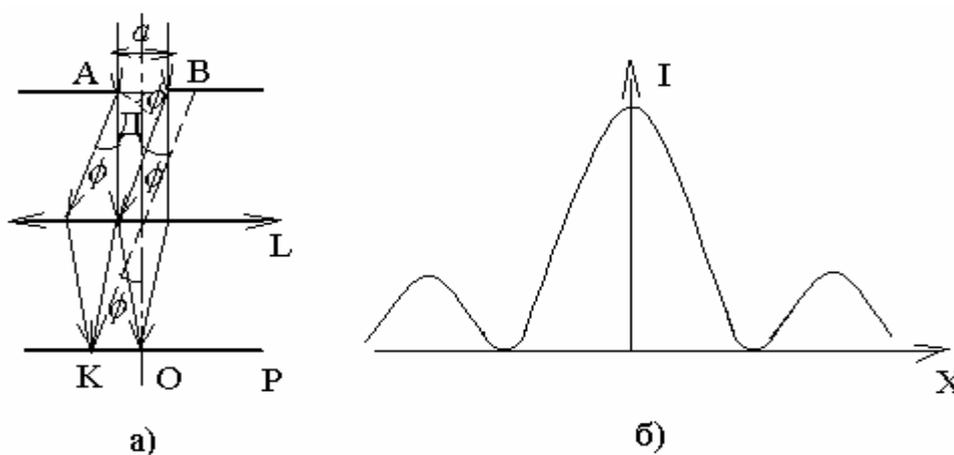


Рис. 3.7

Рассмотрим распределение интенсивности света от узкой щели с помощью построения Френеля (рис. 3.7). Лучи, идущие от щели шириной $AB = a$ (рис. 3.7, а) под углом φ (угол φ – угол между направлением падающих на щель лучей и выбранным направлением луча после щели – называется углом дифракции) имеют разность хода лучей от крайних точек щели А и В:

$$BD = a \sin \varphi, \quad (29)$$

(линза не вносит дополнительной разности хода). Если ВД равна четному числу полуволин ($2m \frac{\lambda}{2}$), значит, для данного направления щель может быть разбита на $2m$ зон Френеля, то есть от щели идет $2m$ когерентных пучков. Каждая пара соседних пучков будет иметь разность хода $\frac{\lambda}{2}$ (то есть они приходят в точку наблюдения в противофазе) и взаимно ослабляют друг друга. В результате сложения $2m$ таких пучков получается минимум освещенности экрана P . Условие минимума запишется в виде

$$a \sin \varphi = 2m \frac{\lambda}{2}, \quad (30)$$

где $m = 1, 2, 3 \dots$ – порядок дифракционного минимума.

Если разность хода между крайними лучами равна нечетному числу полуволин $(2m + 1) \frac{\lambda}{2}$, то весь пучок в данном направлении делится на нечетное число пучков, и в месте наложения этих пучков на экране будет наблюдаться максимум интенсивности. Условие максимума света

$$a \sin \varphi = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (31)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$

Если угол $\varphi = 0$, то в этом направлении разность хода лучей равна нулю (независимо от длины волны) и наблюдается максимум для всех длин волн (центральный максимум в точке O на рис. 3.7, a и на рис. 3.7, b).

Основная часть светового потока (см. рис. 3.7, b) сосредоточена в центральной дифракционной полосе между минимумами первого порядка ($m = \pm 1$), то есть в пределах углов $-\varphi_1 < \varphi < \varphi_1$, где

$$\sin \varphi_1 = \frac{\lambda}{2}. \quad (32)$$

Рассмотрим дифракцию Фраунгофера на дифракционной решетке (**дифракционная решетка** – это система, состоящая из большого числа одинаковых по ширине a и параллельных друг другу щелей, лежащих в одной плоскости и разделенных непрозрачными промежутками шириной b). Величина $(a + b) = d$ называется **постоянной** (или периодом) **дифракционной решетки**.

Пусть на решетку падает параллельный пучок монохроматического света (рис. 3.8). Каждую щель можно рассматривать как источник света,

причем все щели – когерентные источники света. После решетки свет распространяется во всех направлениях, и на экране Р, расположенном в фокальной плоскости линзы L, будет наблюдаться интерференционная картина. Эта

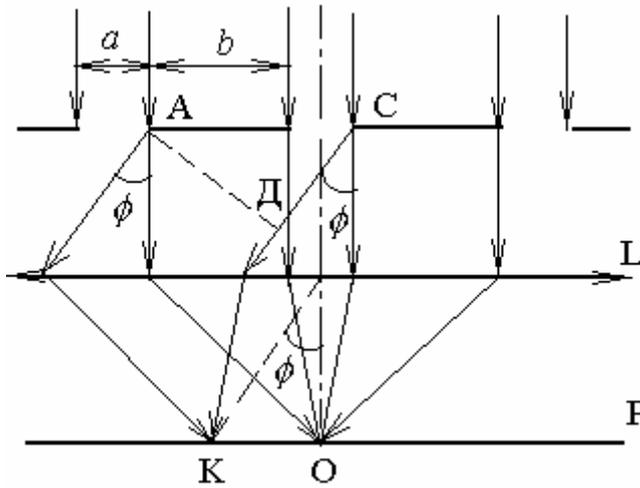


Рис. 3.8

картина является результатом дифракции света на каждой щели решетки и интерференции когерентных световых пучков, идущих от всех щелей.

Разобьем открываемую щелями часть волновой поверхности на узкие параллельные щелям зоны Френеля. Вектор амплитуды колебания, создаваемого в точке К экрана (см. рис. 3.8) i -ой зоной, обозначим $\Delta \vec{A}_i$. Тогда вектор амплитуды результирующего колебания \vec{A} равен

$$\vec{A} = \sum_{i=1} \Delta \vec{A}_i + \sum_{i=2} \Delta \vec{A}_i + \dots + \sum_{i=N} \Delta \vec{A}_i = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \dots + \vec{A}_N, \quad (33)$$

где $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_N$ – векторы амплитуд колебаний, создаваемых первой, второй, N -ой щелями соответственно.

Для направлений, удовлетворяющих условию (30), все векторы \vec{A}_i равны нулю и $\vec{A} = 0$, то есть условие минимума для одной щели является таким же условием минимума и для всех щелей решетки. При разности хода лучей от соседних и всех щелей равна $DC = d \sin \varphi$ (см. рис. 3.8). В этом случае волны от каждой щели будут иметь одинаковую фазу и при сложении дают на экране минимум. Для тех направлений (углов φ), для которых выполняются условия (31) и

$$d \sin \varphi = m \lambda, \quad (34)$$

(где $m = 0, 1, 2, \dots$), колебания от отдельных щелей взаимно усиливают друг друга (разность фаз $\Delta \varphi = 2\pi m$), вследствие чего амплитуда светового вектора в соответствующей точке экрана равна

$$A_{\max} = N A_{\varphi}, \quad (35)$$

где A_{φ} – амплитуда светового вектора от одной щели для лучей под углом φ . Таким образом формула (34) определяет положения максимумов интенсивности освещенности экрана, называемых **главными**.

Интенсивность главных максимумов I_{\max}

$$I_{\max} = N^2 I_{\varphi}. \quad (36)$$

Кроме минимумов, определяемых условием (30), в промежутках между главными максимумами имеется по $(N - 1)$ -му добавочному минимуму. Эти минимумы возникают в тех направлениях, для которых световые векторы от отдельных щелей взаимно гасят друг друга. Между дополнительными минимумами располагаются слабые вторичные максимумы. Соответствующий расчет показывает, что интенсивность вторичных максимумов не превышает $\frac{1}{23}$ интенсивности ближайшего главного максимума.

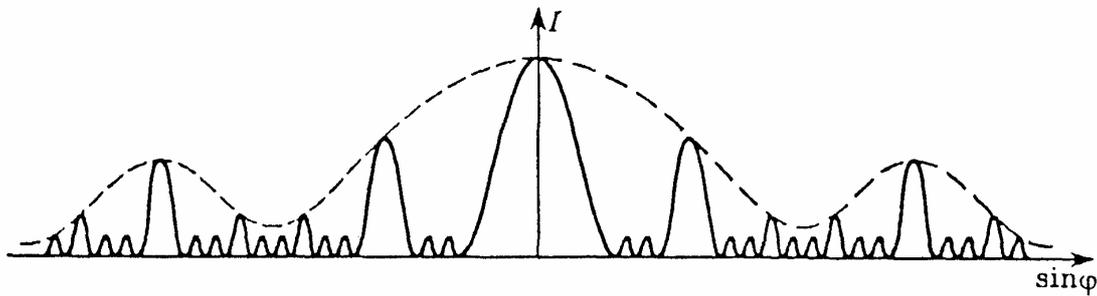


Рис. 3.9

На рис. 3.9 представлена картина распределения интенсивности I на экране для решетки с числом щелей $N = 4$ ($d = 3a$). Пунктирная кривая, проходящая через вершины главных максимумов, изображает распределение интенсивности от одной щели, умноженную на N^2 (см. формулу (36)).

Положение главных максимумов (формула (34)) зависит от длины волны λ . Поэтому при пропускании через решетку белого света все максимумы (кроме центрального) разлагаются в спектры, фиолетовый край которых обращен к центру дифракционной картины, красный – наружу (спектры первого, второго и т.д. порядков).

Если свет, падающий на решетку, состоит из двух длин волн λ_1 и λ_2 , то возможность разрешения (т.е. отдельного восприятия дифракционных полос) для этих длин волн зависит не только от разности длин волн $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, но и от ширины спектрального максимума. Согласно **критерию**, предложенному Рэлеем, спектральные линии считаются полностью разрешенными, если середина максимума для λ_1 совпадает с краем максимума для λ_2 (**критерий Рэля**). Разрешающей силой решетки называют

безразмерную величину $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$, которая зависит от номера дифракционного максимума m и от числа щелей N и определяется выражением

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN. \quad (37)$$

Для увеличения разрешающей способности решетки увеличивают число щелей N . Увеличивать число дифракционных максимумов m не имеет смысла, так как дифракционные максимумы высоких порядков имеют малую интенсивность.

Дифракция рентгеновских лучей

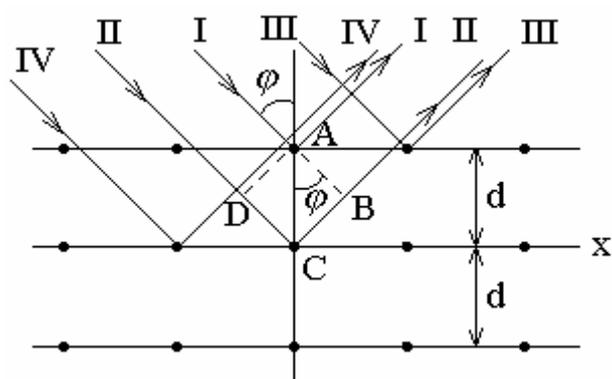


Рис. 3.10

Дифракцию можно наблюдать и на трехмерных структурах, то есть пространственных образованиях, обнаруживающих периодичность по трем не лежащим в одной плоскости направлениям. Подобными структурами являются все кристаллические тела. Однако период их (порядка 10^{-8} м) слишком мал для того, чтобы можно было на-

блюдать дифракцию в видимом свете. Условие $d \geq \lambda$ выполняется в случае кристаллов только для рентгеновских лучей ($\lambda = 10^{-8} \div 6 \cdot 10^{-12}$ м). Если на кристалл направить пучок монохроматических рентгеновских лучей, то частицы, находящиеся в узлах кристаллической решетки, рассеивают их. Возникшие вторичные волны интерферируют, и на фотопластине или флуорисцирующем экране будет запечатлена дифракционная картина.

Пространственную структуру можно представить как совокупность линейных цепочек из структурных элементов (атомов), расположенных вдоль одной из координатных осей. Рассмотрим действие отдельной линейной цепочки, параллельной, например, оси X (рис. 3.10). Пусть на нее падает пучок параллельных лучей, образующих с осью X угол $\Theta = 90 - \varphi$.

Если падающая на кристалл волна плоская, то огибающая вторичных волн, рассеянных атомами, лежащими в этой плоскости, тоже плоскость. Тогда суммарное действие атомов, лежащих в одной плоскости, можно представить в виде плоской волны, отраженной от атомов по обычным за-

конам отражения. Отраженные волны когерентны и могут интерферировать между собой подобно волнам, посылаемым в заданном направлении щелями дифракционной решетки. Разность хода лучей Δ , отразившихся от соседних атомных плоскостей (см. рис. 3.10)

$$\Delta = 2\Delta_1 = 2d \sin \Theta, \quad (38)$$

где d – расстояние между двумя соседними атомными плоскостями, Θ – угол скольжения луча (угол скольжения – угол дополнительный к углу падения луча). Условие максимума интерференции: разность хода равна целому числу длин волн, то есть

$$2d \cos \varphi = m\lambda, \quad (39)$$

где $m = 0, 1, 2, 3$. Соотношение (39) называется формулой **Вульфа – Брэггов**.

Дифракция рентгеновских лучей от кристаллов широко используется на практике для рентгеновской спектроскопии и рентгеновского структурного анализа.

Дисперсия света

Дисперсией вещества по отношению к световым волнам (дисперсией света) называется зависимость скорости распространения этих волн от частоты колебаний (или длины волны); вследствие этого абсолютный показатель преломления данного вещества также зависит от частоты или длины волны проходящего через него света. Дисперсия света в веществе определяется видом функции $n = n(\nu)$ или $n = n(\lambda)$. В различных участках спектра дисперсия характеризуется тем изменением показателя преломления, который приходится на единичный интервал длин волн. Эта величина $\Delta n / \Delta \lambda$ называется средней дисперсией для участка спектра $\lambda \div \lambda + \Delta \lambda$; величина $dn/d\lambda$ есть скорость изменения показателя преломления в данном месте спектра.

Зависимость $n = n(\lambda)$ в оптической области спектра имеет сложный характер. Для тех участков спектра, которые слабо поглощаются данным веществом (т.е. для которых это вещество прозрачно), зависимость показателя преломления от длины волны может быть с удовлетворительной точностью представлена в виде формулы Коши:

$$n = n_0 + \frac{a}{\lambda^2} + \frac{b}{\lambda^4} \quad \text{или} \quad n \approx n_0 + \frac{a}{\lambda^2}, \quad (40)$$

где n_0 , a и b – некоторые постоянные для данного вещества величины, причем при $\lambda \rightarrow \infty$, $n \rightarrow n_0$. Дисперсию вещества для этих участков спектра называют нормальной; здесь

$$\frac{dn}{d\lambda} \approx -\frac{2a}{\lambda^3}.$$

Для тех участков спектра, которые сильно поглощаются веществом, показатель преломления с увеличением длины изменяется иначе: сначала он резко уменьшается, приобретая значения, меньшие n_0 , затем быстро увеличивается и, достигнув максимума, вновь резко уменьшается. В этом случае дисперсию вещества называют аномальной. На рис. 3.11 изображен ход зависимости n от λ («кривая дисперсии»), в которой выделяются области нормальной (I и III) и аномальной (II) дисперсии.

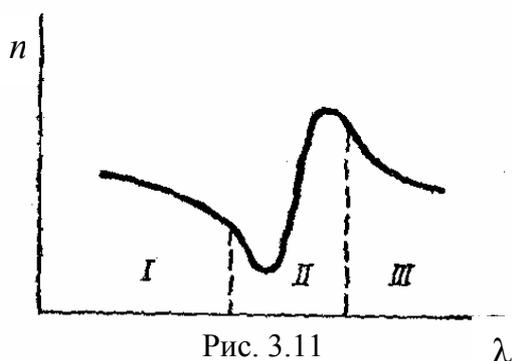


Рис. 3.11

В большом интервале длин волн у каждого вещества обнаруживается несколько таких областей аномальной дисперсии. Согласно теории дисперсии, аномальная дисперсия должна наблюдаться при резонансе между колебаниями вектора E проходящей волны и собственными колебаниями электрических зарядов в атомах и молекулах вещества.

Поэтому по измеренным частотам областей аномальной дисперсии можно определять частоты собственных колебаний в атомах и молекулах вещества. Кроме того, при резонансе должна наблюдаться также интенсивная передача энергии от проходящей волны к атомам и молекулам вещества, т.е. должно иметь место интенсивное поглощение веществом энергии проходящего вещества.

Допустим, что оптическое излучение, несущее энергию W , проходит через тонкий слой среды толщиной dx и теряет энергию dW . Полагая, что dW прямо пропорционально W и толщине слоя dx (такое предположение допустимо для бесконечно малых dx), и имея в виду, что dW – отрицательно, так как означает потерю энергии, можем записать:

$$-dW = kWdx,$$

где коэффициент k учитывает поглощательную способность среды. Из этого соотношения получаем

$$\frac{dW}{W} = -kdx; \ln W = -kx + \text{const}.$$

Но при $x = 0$, $W = W_0$, следовательно $\text{const} = \ln W_0$. Подставляя это значение постоянной интегрирования в формулу, получим **закон Бугера**:

$$W = W_0 e^{-kx}.$$

Коэффициент поглощения k у различных веществ зависит от длины волны. Некоторые вещества обнаруживают селективное поглощение, т.е. имеют очень большой коэффициент поглощения для некоторой (часто очень узкой) области спектра. Например, серебро очень сильно поглощает ультрафиолетовое излучение с $\lambda = 0,316$ мкм. Измерения показали, что в области аномальной дисперсии кривая зависимости коэффициента поглощения от длины волны имеет резкий максимум.

Понятие о голографии

Голография – это способ записи и последующего восстановления световых волн, основанный на явлениях интерференции когерентных пучков света. Схемы получения голограммы протяженного объекта и восстановления с ее помощью рассеянной объектом волны показаны на рис. 3.12, *а* и *б*. Плоская монохроматическая волна от лазера падает на полупрозрачную пластинку В и разделяется на две когерентные волны (рис. 3.12, *а*).

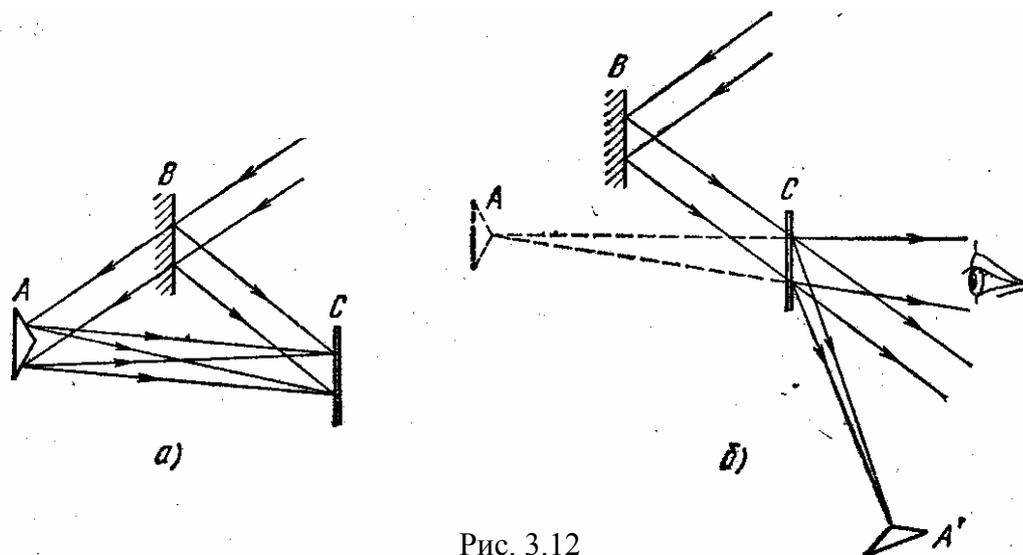


Рис. 3.12

Отраженная от В волна падает на фотопластинку С и играет роль опорной волны. Прощедшая сквозь В волна освещает объект А, каждая точка которого становится источником вторичных сферических волн. Рассеянные объектом волны также падают на фотопластинку С, где фиксируется результат их интерференции с опорной волной. Для получения интерференционной картины на фотопластинке необходимо, чтобы время когерентности используемого света было большим: протяженность цуга волн должна быть больше разности хода между опорной волной и волной, рассеянной предметом. Именно поэтому необходимо использовать лазер. При восстановлении рассеянной волны (рис. 3.12, *б*) на голограмму падает та

же опорная волна, которая использовалась при записи. Если расположить глаз (или фотоаппарат) позади голограммы, как указано на рис. 3.12, б, то, воспринимая пучок расходящихся лучей от дифрагированной на голограмме опорной волны, наблюдатель увидит сквозь голограмму объект А в том месте, где он находился при записи голограммы. Разумеется, здесь, как и в рассмотренном выше случае точечного источника, кроме расходящихся волн будут также присутствовать прошедшая без отклонения волна и сходящиеся волны, которые дают действительное изображение объекта А. Использование наклонного падения опорной волны приводит, как видно из рис. 3.12, б, к хорошему пространственному разделению всех трех волн, благодаря чему можно сквозь голограмму рассматривать мнимое изображение объекта А без помех со стороны других пучков. В отличие от обычной фотографии здесь не используются ни линзы, ни другие устройства, формирующие изображения.

Система расходящихся волн, дающая мнимое изображение, неотличима от волн, исходящих от самого объекта. Благодаря этому голограмма полностью восстанавливает объемную структуру объекта и передает ее не только видимое пространственное расположение предметов, но и эффект параллакса, заключающийся в изменении видимого взаимного расположения предметов при перемещении точки наблюдения.

Любой участок голограммы содержит информацию обо всем объекте, в то время как различные участки обычной фотографии передают информацию только об отдельных его частях. Действительно, при записи голограммы на любую часть пластинки падают волны, рассеянные всеми частями объекта.

Объем информации, содержащийся на голограмме, значительно больше, чем на фотографии того же объекта. Если объект состоит из нескольких предметов, находящихся на разных расстояниях, то при фотографировании можно получить четкое изображение, строго говоря, только для одного из них. При восстановлении голограммы такого объекта все предметы будут наблюдаться вполне четкими при соответствующей аккомодации глаза.

3.2. Методические указания к лекционным занятиям

Вопросы лекции	Форма изучения	Литература	Вопросы для самоконтроля студентов
<p>1. Интерференция света</p> <ul style="list-style-type: none"> – условия наблюдения интерференции; – получение когерентных волн. Оптическая разность хода; – расчет интерференционной картины (на примере опыта Юнга); – интерференция в тонких пленках (пластинках) <p>2. Дифракция света</p> <ul style="list-style-type: none"> – принцип Гюйгенса – Френеля; – дифракция Френеля на круглом отверстии и круглом диске; – дифракция Фраунгофера; – дифракция рентгеновских лучей 	лекция	[7]; [9]	<p>Вопросы для самоконтроля студентов</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Что такое когерентные волны? 2. Почему для наблюдения интерференции необходимым условием является когерентность? 3. Что такое оптическая разность хода? 4. Как сформулировать условия максимумов и минимумов интерференции? 5. Почему для наблюдения интерференции в опытах разделяют световой пучок? 6. Для наблюдения четкой картины интерференции в опыте Юнга необходимым условием является: расстояние от щелей до экрана много больше расстояния между щелями. Объяснить почему? 7. От чего зависит ширина интерференционной картины на экране в опыте Юнга? 8. Какой вид имеет интерференционная картина в опыте Юнга при освещении щелей: 1) монохроматическим светом? 2) белым светом? 9. От чего зависит ширина интерференционных полос при интерференции в тонких пленках? 10. Привести другие примеры применения явления интерференции в практических целях <ol style="list-style-type: none"> 1. Какими положениями дополнил Френель принцип Гюйгенса? 2. Что такое зона Френеля? Как проводится построение такой зоны для определения точки наблюдения дифракции? 3. Чему равна результирующая амплитуда от полностью открытого фронта сферической волны? 4. Как меняется интенсивность при ограничении фронта волны? 5. Какой вид имеет картина на экране при дифракции Френеля: 1) на круглом отверстии? 2) на круглом диске? 6. Какая картина получается на экране при дифракции света на узкой щели, если свет: 1) монохроматический? 2) белый? 7. Сформулировать условия главных минимумов дифракции Фраунгофера на щели? 8. Что такое дифракционная решетка? Как определить постоянную (период) решетки? 9. Какова картина распределения интенсивности на экране при дифракции Фраунгофера на решетке? 10. Сформулировать условия главных максимумов и главных минимумов при дифракции на решетке. 11. Какую величину называют разрешающей силой решетки? От чего она зависит? 12. Как наблюдается дифракция рентгеновских лучей? 13. Сформулировать условие Вульфа – Брэгга

3.3. Методические указания к практическим занятиям

Тема	Задачи	Рекомендации
1. Интерференция света	<p>1. Поиск параметров оптического объекта (пластинка, пленка), при которых достигается условие максимума или минимума;</p> <p>2. Определение параметров интерференционной картины</p>	<p>Интерференция возможна лишь в случае когерентных волн. Так как два любых независимых источника света не являются когерентными, то интерференция света возникает лишь в тех случаях, когда световая волна, испускаемая одним источником, разделяется некоторой оптической системой на две части. Соответствующие две волны, пройдя различные пути, взаимодействуют на экране (или на сетчатке глаза), создавая интерференционную картину. Последнюю нередко удается объяснить, заменив данную оптическую систему другой, эквивалентной, считая при этом, что имеется не один, а два когерентных источника. Задачи на интерференцию света делятся в основном на две группы: задачи, связанные с интерференцией волн от двух когерентных источников, и задачи на интерференцию в тонких пластинках (пленках).</p> <p>При решении задач на интерференцию света необходимо</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Обязательно построить рисунок, поскольку правильно построенный рисунок позволяет определить цель поиска и сформулировать алгоритм решения 2. Все задачи этой темы, как правило, сводятся к поиску оптической разности хода. Поэтому необходимо учитывать, в какой среде распространяется данный пучок света (см. понятие оптическая длина). Далее задача становится чисто геометрической. 3. Если условия распространения меняются, добавили пластинку или поменяли среду, то необходимо просто поменять показатели преломления, но и учесть, как изменилась геометрическая длина (добавить стеклянную пластинку можно только, удалив воздушную того же размера). 4. Важным моментом является учет потери полдлинны волны на границе раздела с оптически более плотной средой. При этом необходимо учесть все среды, окружающие пластинку. 5. При рассмотрении интерференции в проходящем свете действуют точно так же как и в случае интерференции в отраженном свете.

<p>2. Дифракция света</p>	<p>1. Определение условия максимума или минимума для дифракции на круглом диске или отверстии (дифракция Френеля); 2. Определение результатов дифракции от одной щели; 3. Дифракция на дифракционной решетке</p>	<p>В явлении дифракции световые волны огибают оптические неоднородности, встречающиеся на пути их распространения. Падая на экран, волны дают распределение освещенности на нем, отличное от того, которое должно быть согласно законам геометрической оптики.</p> <p>1. Для дифракции на круглом отверстии задача сводится к поиску количества зон Френеля, которые укладываются в отверстие (или остаются не закрыты экраном). Обратная задача сводится к поиску одного из параметров через известное выражение для размеров зон Френеля</p> <p>2. Необходимо помнить, что зоны Френеля условны и поэтому под разными углами наблюдения мы в отверстие должны будем выделить различные по площади (и количеству) зоны Френеля. Поэтому результаты дифракции в данной точке на экране будет зависеть от угла, под которым мы видим отверстие (угла дифракции).</p> <p>3. Определение результата дифракции от одной щели в конечном итоге сводится к определению числа зон Френеля. Результатом являются известные выражения (30) и (31).</p> <p>4. Дифракционная решетка дает картину как результат сложения дифракционных картин большого количества щелей. При этом необходимо учитывать отличия</p> <ul style="list-style-type: none"> – минимум от одной щели всегда даст минимум от всей щели (главный минимум) – максимум достигается только при условии, что соседние щели воздают синфазные вторичные волны (главные максимумы) – промежуточные максимумы и минимумы возникают при наложении волн от различных щелей под разными углами дифракции (для одних выполняется условие максимума, для других минимума) <p>5. При изучении дифракции света следует обратить внимание на тот факт, что здесь рассматривается наложение бесконечно большого числа когерентных волн, создаваемых непрерывным рядом точек на волновой поверхности, достигающей преграду (отверстие, щель, решетка и т.п.).</p>
---------------------------	--	---

3.4. Примеры решения задач

Решение задач по теме «Интерференция света»

Задача 1.

В опыте Юнга на пути одного из интерферирующих лучей помещалась тонкая стеклянная пластинка Π , вследствие чего центральная световая полоса смещалась в положение, первоначально занятое пятой светлой полосой (не считая центральной). Луч падает на пластинку перпендикулярно. Показатель преломления пластинки 1,5. Длина световой волны $\lambda_0 = 600$ нм. Какова толщина пластинки h ?

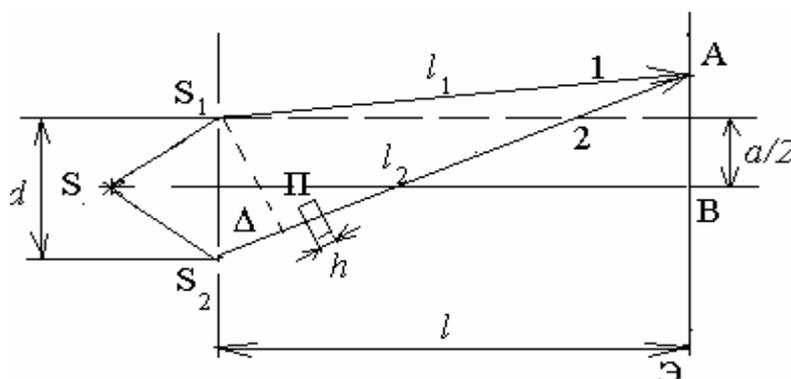


Рис. 3.13

Решение. Рассмотрим схему опыта Юнга (см. рис. 3.13). В некоторой точке А, где складываются колебания световых лучей 1 и 2, будет наблюдаться световое пятно (m -ный максимум), если оптическая разность хода лучей равна $m\lambda_0$.

Луч 1 проходит через воздух – его оптическая длина пути равна геометрической длине пути ℓ_1 . Луч 2 проходит часть пути в стеклянной пластинке толщиной h . Его оптическая длина пути будет равна $(\ell_2 - h) + hn$. Оптическая разность хода лучей 1 и 2 в этом случае равна

$$\Delta' = (\ell_2 - h) + hn - \ell_1. \quad (1)$$

Если стеклянную пластинку Π убрать, то оптическая разность хода выбранных лучей

$$\Delta = \ell_2 - \ell_1. \quad (2)$$

По условию задачи интерференционная картина при наличии пластинки Π смещается на пять полос, то есть если

$$\Delta = \ell_2 - \ell_1 = m\lambda_0, \quad (3)$$

то

$$\Delta' = (\ell_2 - h) + hn - \ell_1 = (m + 5)\lambda_0. \quad (4)$$

Вычитая из (4) выражение (3), получим

$$\Delta' - \Delta = (\ell_2 - h) + hn - \ell_1 - (\ell_2 - \ell_1) = (m + 5)\lambda_0 - m\lambda_0,$$

или

$$(n - 1)h = 5\lambda_0, \text{ и } h = \frac{5\lambda_0}{n - 1}.$$

Толщина пластинки h равна 6 микронметрам. Эта задача иллюстрирует один из возможных способов определения толщины светопрозрачных материалов.

Задача 2.

Для наблюдения колец Ньютона плосковыпуклая линза положена выпуклой стороной на стеклянную пластинку. Найти радиус кривизны линзы, если радиусы четвертого и одиннадцатого темных колец, наблюдаемых в отраженном свете, равны соответственно 0,15 мм и 6,7 мм. Длина световой волны $\lambda_0 = 700$ нм.

Решение. Рассмотрим схему наблюдения интерференционной картины (рис. 3.14). Световые лучи падают на плосковыпуклую линзу перпендикулярно поверхности MN. Наблюдая интерференционную картину в отраженном свете, можно видеть набор светлых и темных концентрических колец (в проходящем свете также возможно наблюдать). Разделение светового пучка на два происходит за счет того, что часть светового потока отражается от границы линза – воздух (точка A на рис. 3.14), а вторая часть пучка проходит через воздушный интервал AA₁ и отражается от границы воздух–стекло (точка A₁ – см. рис. 3.14). Так как радиус кривизны линз в таких схемах порядка нескольких метров, а зазор между линзой и пластинкой достаточно мал (несколько миллиметров), то лучи, отраженные от точек A и A₁ пойдут по одной прямой. Оптическая разность хода этих лучей

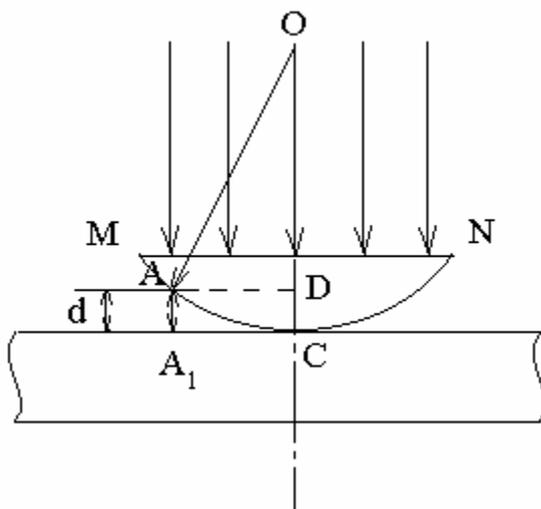


Рис. 3.14

$$\Delta = 2AA_1 + \frac{\lambda_0}{2} = 2d + \frac{\lambda_0}{2}, \quad (1)$$

где d – величина зазора AA₁ (см. рис. 3.14), и учитывается дополнительная разность хода $\frac{\lambda_0}{2}$, так как при отражении от более плотной среды один луч теряет половину длины волны.

Предположим, что при наложении лучей, отраженных от точек A и A₁, наблюдается m -ный минимум. Тогда расстояние AD (см. рис. 3.14) или A₁C есть радиус m -го темного кольца r_m . Из треугольника AOD, учитывая, что AO = R – радиус кривизны линзы, получим

$$r_m^2 = R^2 - (R - d)^2 = 2Rd - \frac{d^2}{4}.$$

Так как $d \ll R$ (таковы требования к этой схеме), величиной $\frac{d^2}{4}$ можно пренебречь, как очень малой. Учитывая это, получим

$$r_m^2 = 2Rd, \text{ и } d = \frac{r_m^2}{2R}. \quad (2)$$

Подставляя формулу (2) в (1), получим оптическую разность хода интерферирующих лучей

$$\Delta = \frac{r_m^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2}.$$

Если эта оптическая разность хода равна нечетному числу полуволен, получим условие m -го минимума

$$\Delta = \frac{r_m^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2} = (2m+1)\frac{\lambda_0}{2}, \text{ или } \frac{r_m^2}{R} = m\lambda_0.$$

Тогда для четвертого и одиннадцатого темных колец получим условия:

$$\frac{r_4^2}{R} = 4\lambda_0, \quad (3)$$

$$\frac{r_{11}^2}{R} = 11\lambda_0. \quad (4)$$

Вычитая из уравнения (4) выражение (3), получим

$$\frac{r_{11}^2 - r_4^2}{R} = 7\lambda_0 \quad \text{или} \quad R = \frac{r_{11}^2 - r_4^2}{7\lambda_0}. \quad (5)$$

Подставляя в формулу (5) данные в системе СИ, получим

$$R = \frac{\left[(6,7 \cdot 10^{-3})^2 - (0,15 \cdot 10^{-3})^2 \right] \text{ м}^2}{7 \cdot 7 \cdot 10^{-7} \text{ м}} = 9,1 \text{ м}.$$

Задача 3.

На мыльную пленку падает белый свет под углом $i = 45^\circ$ к поверхности пленки. При какой наименьшей толщине пленки отраженные лучи будут окрашены в желтый цвет ($\lambda = 600 \text{ нм}$)? Показатель преломления мыльной воды $n = 1,33$.

Решение. По условию отраженные лучи окрашены в желтый цвет. Это означает, что максимум отражения наблюдается в желтой части спектра. Максимум отражения наблюдается, когда световые волны, отраженные от обеих поверхностей пластинки (рис. 3.14), усиливают друг друга. Для

этого оптическая разность хода Δd пучков 1 и 2 должна быть равна целому числу k длин волн

$$\Delta d = \frac{\lambda}{2} + n(AC + DC) - AD = k\lambda.$$

Слагаемое $\frac{\lambda}{2}$ учитывает, что при отражении пучка 1 от оптически более плотной среды фаза колебаний электромагнитного поля изменяется на противоположную, т.е. возникает такое же изменение фазы, как при прохождении пути $\frac{\lambda}{2}$. Множитель n учитывает уменьшение скорости света в среде – на пути s в среде возникает такое же изменение фазы $\Delta\varphi$, как на пути ns в вакууме

$$\Delta\varphi = \frac{\omega s}{v} = \frac{n\omega s}{c}.$$

Используя соотношения

$$AC = BC = \frac{h}{\cos r}; \quad AD = 2h \sin i - tgr,$$

а также, применяя закон преломления, получаем

$$\left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2 i},$$

откуда

$$h = \frac{(k - 1/2)\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}.$$

При $k = 1$ минимальная толщина пленки $h = 0,13 \cdot 10^{-6}$ м.

Задача 5.

На поверхность стеклянного объектива ($n_1 = 1,5$) нанесена тонкая пленка, показатель преломления которой $n_2 = 1,2$ (просветляющая пленка). При какой наименьшей толщине d этой пленки произойдет максимальное ослабление отраженного света в средней части видимого спектра?

Решение. Из световой волны, падающей на пленку, выделим узкий пучок SB . В точках B и C падающий пучок частично отражается и частично преломляется. Отраженные пучки света BS_1 и CAS_2 падают на собирающую линзу, пересекаются в ее фокусе и интерферируют между собой. Т.к. показате-

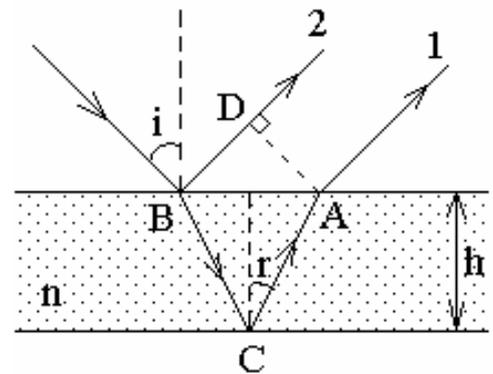


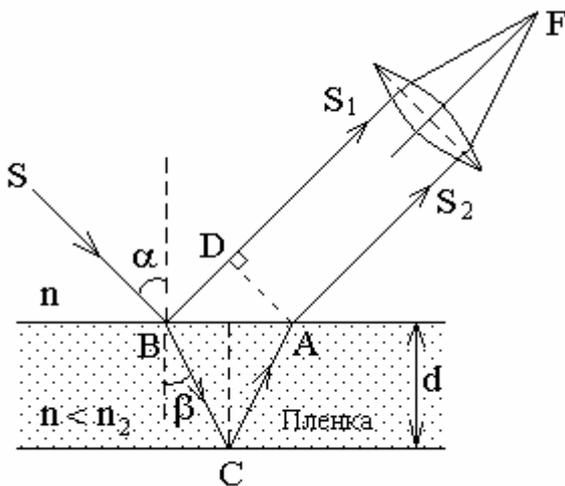
Рис. 3.14

тель преломления воздуха ($n = 1$) меньше показателя преломления вещества пленки, который, в свою очередь, меньше показателя преломления стекла, то в обоих случаях отражение происходит от среды оптически более плотной, чем та среда, в которой идет падающая волна. Поэтому фаза колебания пучка света BS_1 при отражении в точке B изменяется на π рад и точно так же на π рад изменяется фаза колебаний пучка света CAS_2 при отражении в точке C . Следовательно, результат интерференции этих пучков света при пересечении в фокусе линзы будет такой же, как если бы никакого изменения фазы колебаний ни у того ни у другого пучка не было. Условие максимального ослабления света при интерференции в тонких пленках состоит в том, что оптическая разность хода Δ интерферирующих волн должна быть равна нечетному числу полуволн

$$\Delta = (2k + 1) \left(\frac{\lambda}{2} \right).$$

Как видно из рис. 3.15, оптическая разность хода

$$\Delta = l_2 n_2 - l_1 n = (|BC| + |CA|) n_2 - |BD| n.$$



Стеклопластина $n_1 > n_2$

Рис. 3.15

откуда искомая толщина пленки

$$d = \frac{(2k + 1)\lambda}{4n}.$$

Минимальное значение d соответствует значению $k = 0$. Подставляя числовые данные, получим $d = 115 \cdot 10^{-9}$ м.

Следовательно, условие минимума интенсивности света примет вид

$$(|BC| + |CA|) n_2 - |BD| n = (2k + 1) \left(\frac{\lambda}{2} \right).$$

Если угол падения α будет уменьшаться, стремясь к нулю, то $BD \rightarrow 0$ и $|BC| + |CA| \rightarrow 2d$, где d — толщина пленки. В пределе при $\alpha = 0$ получим

$$\Delta = 2dn_2 = (2k + 1) \left(\frac{\lambda}{2} \right),$$

Решение задач по теме «Дифракция света»

Задача 5.

Точечный источник света, излучающий свет длиной $\lambda = 550$ нм, освещает экран, расположенный на расстоянии $\ell = 11$ м от источника. Между источником и экраном на расстоянии $b = 5$ м помещена ширма с круглым отверстием диаметром $d = 4,2$ мм.

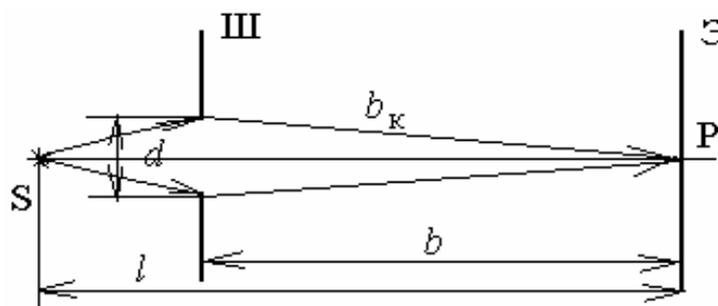


Рис. 3.16

В каком случае (с ширмой или без нее) интенсивность в центре экрана будет больше?

Решение. Рассмотрим дифракцию Френеля на круглом отверстии. Оценим интенсивность в центре экрана (точка P – рис. 3.16) в случае, когда ширма Ш убрана, то есть волновая поверхность световой волны полностью открыта. Рассчитаем результирующую амплитуду колебаний в точке P . Учитывая монотонное убывание амплитуды с увеличением номера зоны m , можно считать, что результирующая амплитуда колебаний A в центре экрана равна

$$A = \frac{A_1}{2} \quad (1)$$

(так как $\frac{A_m}{2} \approx 0$ для бесконечно большого числа m).

В этом случае интенсивность в центре экрана I будет равна

$$I \sim A^2 = \frac{A_1^2}{4}. \quad (2)$$

Если на пути световой волны поставить ширму с круглым отверстием, то число зон Френеля, открытых отверстием, можно рассчитать по формуле (27). По условию $b = 5$ м, а $a = \ell - b = 6$ м. Подставив данные задачи в формулу (27), получим

$$m = \frac{(4,2)^2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \cdot 11 \text{ м}}{4 \cdot 5,5 \cdot 10^{-7} \text{ м} \cdot 5 \text{ м} \cdot 6 \text{ м}} = 2,94 \approx 3.$$

Число зон Френеля, открытых отверстием, равно трем. Пользуясь формулой (26), оценим амплитуду A и интенсивность I в центре экрана

$$A = \frac{A_1}{2} + \frac{A_3}{2}; \quad (3)$$

$$I \sim A^2 = \left(\frac{A_1}{2} + \frac{A_3}{2} \right)^2. \quad (4)$$

Сравнивая формулы (4) и (2), делаем вывод, что интенсивность в центре экрана будет больше в случае, когда на пути световой волны стоит ширма с круглым отверстием.

Задача 6.

На щель шириной $a = 30$ мкм нормально падает белый свет. Спектр проецируется на экран с линзой с фокусным расстоянием $f = 195$ см. Определить ширину спектра десятого порядка, если границы видимого спектра лежат от 400 нм до 780 нм.

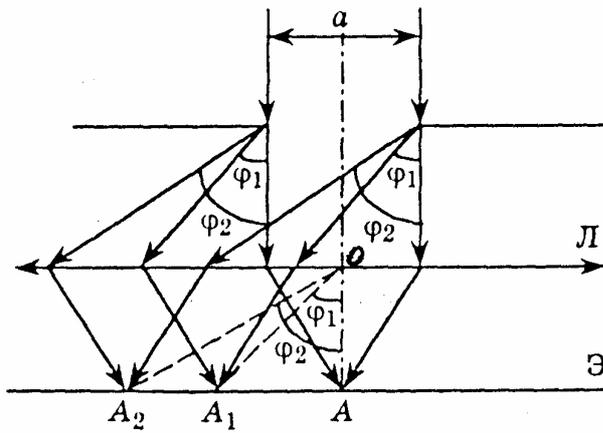


Рис. 3.17

Решение. Обозначим углы дифракции для минимальной и максимальной длин волн в спектре десятого порядка, соответственно, φ_1 и φ_2 (рис. 3.17).

Условие минимума m -го порядка для границ видимого спектра

(от λ_1 до λ_2) можно записать

$$a \sin \varphi_1 = m\lambda_1, \quad (1)$$

$$a \sin \varphi_2 = m\lambda_2. \quad (2)$$

Так как экран стоит в фокальной плоскости линзы (расстояние $OA = f$), (см. рис. 3.17), то лучи с длиной волны λ_1 , дифрагирующие под углом φ_1 , соберутся в точке A_1 , а лучи с длиной волны λ_2 в точке A_2 .

Расстояния от центра экрана A до соответствующих точек A_1 и A_2 можно рассчитать как

$$AA_1 = f \cdot \operatorname{tg} \varphi_1, \quad (3)$$

$$AA_2 = f \cdot \operatorname{tg} \varphi_2. \quad (4)$$

Если углы φ_1 и φ_2 малы, то $\operatorname{tg} \varphi$ можно заменить на $\sin \varphi$. Тогда искомое расстояние A_1A_2 (ширина спектра m -го порядка), используя формулы (1) – (4), получится равным

$$A_1A_2 = f (\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1) = f (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) = f \frac{m}{a} (\lambda_2 - \lambda_1). \quad (5)$$

Подставляя данные задачи в формулу (5), получим

$$A_1 A_2 = \frac{1,95 \text{ м} \cdot 10 \cdot 3,8 \cdot 10^{-7} \text{ м}}{3 \cdot 10^{-5} \text{ м}} = 25 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 25 \text{ см}.$$

Для сравнения можно подсчитать ширину спектра первого порядка, она будет в десять раз меньше, то есть 2,5 см.

Задачу можно решить точнее, рассчитав $\text{tg}\varphi_1$ и $\text{tg}\varphi_2$ по формулам

$$\text{tg}\varphi_1 = \frac{\sin \varphi_1}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_1}} = \frac{m\lambda_1}{\sqrt{a^2 - m^2\lambda_1^2}} \quad \text{и} \quad \text{tg}\varphi_2 = \frac{\sin \varphi_{21}}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_{21}}} = \frac{m\lambda_2}{\sqrt{a^2 - m^2\lambda_2^2}}.$$

В этом случае ширина спектра получается равной 26 см (погрешность порядка 4 % для приближенного расчета величины $A_1 A_2$).

Задача 7.

На дифракционную решетку Д нормально падает монохроматический свет с длиной волны 0,65 мкм. На экране Э, расположенном параллельно решетке и отстоящем от нее на расстояние 0,5 м, наблюдается дифракционная картина (рис. 3.18). Расстояние между дифракционными максимумами первого порядка равно 10 см. Определить постоянную дифракционной решетки и общее число главных максимумов, получаемых с помощью этой решетки.

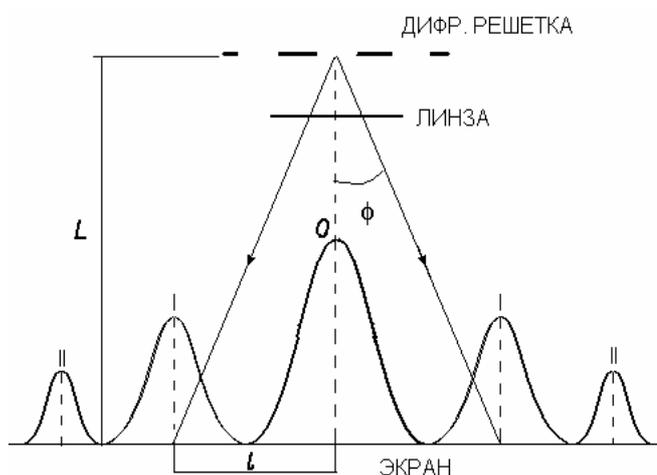


Рис. 3. 18

Решение. Запишем условие главных максимумов дифракционной решетки

$$c \sin \varphi = k\lambda, \quad (1)$$

где c – постоянная дифракционной решетки, φ – угол отклонения лучей от нормального направления распространения света; k – порядок главного дифракционного максимума; λ – длина волны падающего на решетку монохроматического света.

По условию задачи $k = 1$. Учитывая, что $l/2 \ll L$

$$\sin \varphi \approx \text{tg}\varphi = l/(2L). \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$\frac{cl}{2L} = \lambda \quad \text{или} \quad c = \frac{2\lambda L}{l}. \quad (3)$$

Подставляя в (3) числовые значения величин, находим

$$c = \frac{2 \cdot 0,65 \cdot 10^{-6} \text{ м} \cdot 0,5 \text{ м}}{0,1 \text{ м}} = 6,5 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 0,65 \text{ мкм}.$$

Для определения общего числа главных максимумов, даваемых дифракционной решеткой, исходим из условия, что максимальный угол отклонения лучей от нормального направления распространения не может превышать 90° , т.е. $\sin 90^\circ = 1$, тогда формула (1) примет вид $k_{\max} = c/\lambda$. Производим вычисления $k_{\max} = 6,5 \cdot 10^{-6} \text{ м} / 0,65 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 10$.

Общее число максимумов равно $n = 2k_{\max} + 1$, т.е. влево и вправо от центрального максимума будут наблюдаться по k_{\max} максимумов:

$$n = 2 \cdot 10 + 1 = 21.$$

Задача 8.

При каком минимальном числе штрихов дифракционной решетки с периодом $d = 2,9$ мкм можно разрешить компоненты дублета желтой линии натрия ($\lambda_1 = 5890 \text{ А}$ и $\lambda_2 = 5896 \text{ А}$)?

Решение. Число штрихов N решетки связано с ее разрешающей силой R и порядком спектра k , причем $N = R/k$. Минимальному значению N_{\min} соответствует минимальное значение R_{\min} и максимальное число k , т.е.

$$N_{\min} = R_{\min} / k_{\max}. \quad (1)$$

Минимальная разрешающая сила решетки R_{\min} , необходимая для разрешения дублета (двух составляющих) желтой линии натрия, выражается через две величины λ_1, λ_2 по формуле

$$R_{\min} = \lambda_1 / (\lambda_2 - \lambda_1). \quad (2)$$

Число k_{\max} найдем из формулы дифракционной решетки, если положим в ней $\sin \varphi = 1$ и $\lambda = \lambda_2$ (последнее соотношение гарантирует, что обе компоненты дублета с порядковым номером k_{\max} будут видны). Учитывая при этом, что k – целое число, и введя функцию $E(x)$, выделяющую целую часть числа x , получим

$$k_{\max} = E\left(\frac{d}{\lambda_2}\right) = E\left(\frac{2,9 \cdot 10^4 \text{ А}}{5896 \text{ А}}\right) = E(4,9) = 4. \quad (3)$$

Подставив значения R_{\min} и k_{\max} из (2), (3) в соотношение (1), найдем

$$N_{\min} = \frac{\lambda_1}{4(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{5890}{4 \cdot 6} = 2,5 \cdot 10^2.$$

4. УЧЕБНЫЙ БЛОК «ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА»

Введение

Тепловое излучение от нагретых тел является совокупностью электромагнитных волн (ЭМВ), излучаемых электромагнитными гармоническими осцилляторами нагретого тела. Ориентация световых векторов ЭМВ в потоке теплового излучения (света) равновероятна в плоскости, перпендикулярной направлению распространения ЭМВ и их амплитуды для каждого из направлений колебаний световых векторов практически одинаковы. Такой свет называется естественным, неполяризованным.

При взаимодействии света с веществом ЭМВ может существенно терять свою энергию в результате взаимодействия электрической компоненты ЭМВ с зарядами вещества (среды). Для некоторых веществ (оптических структур) величина теряемой ЭМВ энергии и снижения амплитуды светового вектора зависят от ориентации светового вектора. В результате для одних ЭМВ в световом потоке амплитуда светового вектора значительно снижается, а для других – существенно не изменяется. Это явление получило название поляризации света при взаимодействии с веществом, и его основные закономерности составляют предмет изучения данного учебного блока.

При изучении данного раздела студенты должны

иметь представление:

- о принципе суперпозиции колебаний одинакового направления;
- об интерференции и дифракции упругих волн;
- об основных законах геометрической оптики и их проявлениях;
- об особенностях отражения волн от границы раздела различных сред;

обладать навыками:

- геометрического построения изображений с учетом отражения и преломления волн;
- решения тригонометрических уравнений.

Учебная программа блока

Содержание блока	Форма подготовки	Литература
1. Естественный и поляризованный свет	лекция	[9]
2. Степень поляризации	лекция	[9]
3. Закон Малюса	лекция	[7]
4. Поляризация света при двойном лучепреломлении	лекция	[9]
5. Дихроизм	лекция	[9]
6. Интенсивность отраженных и преломленных лучей	лекция	[9]
7. Поляризация света при отражении и преломлении на поверхности диэлектриков. Явление и закон Брюстера	лекция	[9]
8. Вращение плоскости поляризации	лекция	[9]

Цели обучения

студент должен знать	студент должен уметь
<ul style="list-style-type: none"> – отличие естественного света от поляризованного света; – способы получения поляризованного света (дихроизм, двойное лучепреломление и др.); – законы Малюса и Брюстера; – причины возникновения поворота плоскости поляризации; – применение поляризованного света 	<ul style="list-style-type: none"> – определять степень поляризации света; – определять результат прохождения света через систему поляризаторов; – определять угол поворота плоскости поляризации, угол Брюстера и др.

4.1. Краткое содержание теоретического материала

Естественный и поляризованный свет

Моделью излучателя элементарной ЭМВ может служить периодически колеблющийся диполь. Поле линейно колеблющегося диполя представляет собой переменное электромагнитное поле, характеризуемое двумя взаимно перпендикулярными векторами: напряженности электрического поля \vec{E} и напряженности магнитного поля \vec{H} . Колебания светового вектора происходят в плоскости, образуемой осью диполя и направлением распространения ЭМВ. Эту плоскость называют – **плоскость колебания светового вектора (ПК)** (рис. 4.1). Плоскость, в которой колеблется вектор \vec{H} , называют **плоскостью поляризации (ПП)**.

Очевидно, что ЭМВ, излучаемая каким-либо отдельно взятым осциллятором в единичном акте излучения, имеет одну ПК. Но источники света состоят из огромного числа таких излучателей (атомов, молекул). Пространственная ориентация ПК для каждого из них в интервалы времени

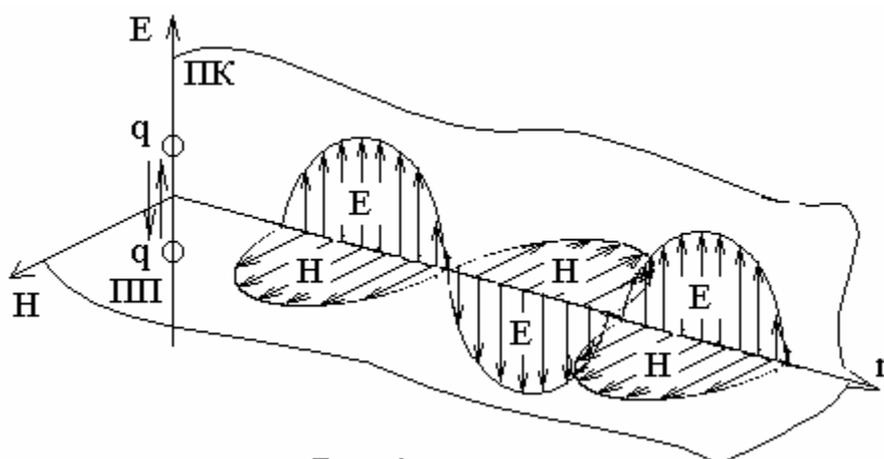


Рис. 4.1

излучения в большинстве случаев хаотична. Поэтому в общем потоке излучения множества осцилляторов для каждой ориентации ПК суммарный световой вектор \vec{E}_Σ в среднем имеет одну

и ту же амплитуду. Диаграмма световых векторов для теплового излучения может быть представлена, как показано на рис. 4.2. Такое излучение получило название естественного света, света с круговой поляризацией, неполяризованного света. При этом каждый световой вектор можно представить как сумму двух составляющих – взаимно перпендикулярных световых векторов E_x и E_y (рис. 4.2):

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y. \quad (1)$$

Это означает, что естественный свет можно представить как суперпозицию двух световых потоков, ПК которых взаимно перпендикулярны. При этом можно считать, что усредненные амплитуды составляющих \vec{E}_{x0} и \vec{E}_{y0} одинаковы:

$$E_{x0} = E_{y0}, \quad (2)$$

то есть

$$E_{\Sigma 0}^2 = E_{x0}^2 + E_{y0}^2 = 2E_{x0}^2 = 2E_{y0}^2, \quad (3)$$

где индекс 0 означает круговую поляризацию.

Интенсивность I волны пропорциональна квадрату светового вектора, то есть для естественного света

$$I \sim E_0^2, \quad (4)$$

откуда следует, что $I = I_x + I_y$, $I_x = I_y = I/2$. (5)

При взаимодействии с веществом электрическая компонента ЭМВ с круговой поляризацией взаимодействует с зарядовыми структурами вещества (молекулами) и в принципе может возбуждать все виды их механического движения – поступательное, вращательное, колебательное, – затрачивая на это энергию. В результате этого интенсивность ЭМВ снижается. Наиболее сильное поглощение энергии ЭМВ осуществляется «свободными» зарядами, способными перемещаться в веществе. В веществах, в которых отсутствуют «свободные» заряды, зарядовые структуры (молекулы) могут быть в достаточной степени ориентированы и поляризованы, т.е. образуют ориентированные диполи. Поэтому для световых векторов некоторого направления степень поглощения энергии ЭМВ может значительно превышать степень поглощения энергии ЭМВ со световыми векторами

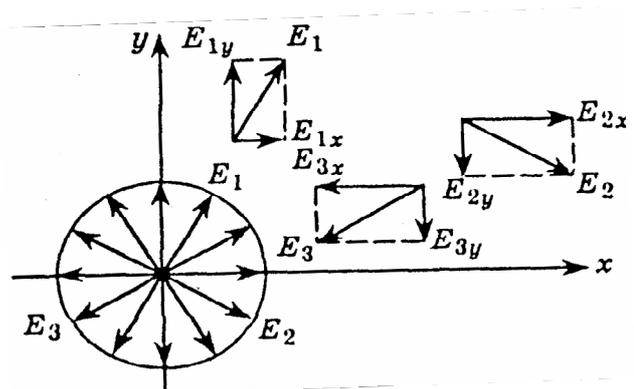


Рис. 4.2

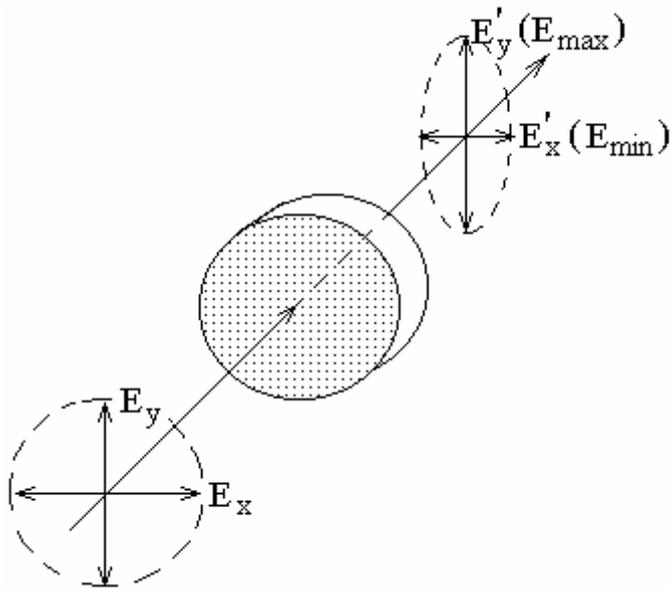


Рис. 4.3

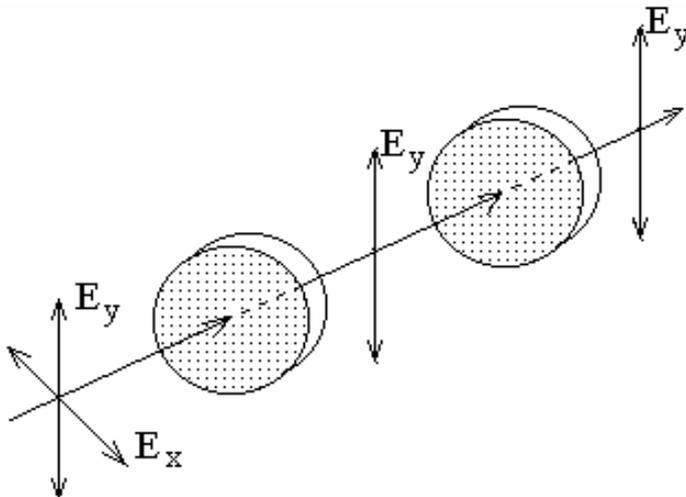


Рис. 4.4

другого направления. В результате круговая диаграмма светового вектора при прохождении естественного света через вещество изменяется на эллиптическую (рис. 4.3).

Такой свет называется частично поляризованным. Когда после прохождения вещества диаграмма светового вектора представляет собой линию (малая ось эллипса диаграммы очень мала) свет называют линейно-поляризованным (рис. 4.4).

Устройство, преобразующее естественный световой поток в линейно-поляризованный свет, называют **поляризатором** или **поляроидом**. Плоскость, в которой световой вектор выходящего из поляроида линейно-поляризованного потока максимален, называют **оптической плоскостью поляроида (ОПП)**. Согласно (5), **интенсивность выходящего** из идеального поляроида плоско-поляризованного

светового потока составляет **половину интенсивности входящего в поляроид естественного света**.

Если на пути линейно-поляризованного света поставить еще один поляроид так, что его ОПП совпадает с плоскостью колебаний светового вектора входящего луча, то второй поляроид пропустит свет без изменения интенсивности (рис. 4.4).

Степень поляризации

Реальные поляроиды отчасти пропускают и составляющую потока, световой вектор которой перпендикулярен ОПП. Поэтому из поляроида

выходит свет, в котором колебания светового вектора одного направления преобладают над колебаниями перпендикулярного направления, т.е. **частично поляризованный свет**.

Показателем «качества» поляризованного света или мерой его поляризованности является соотношение

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (6)$$

называемое **степенью поляризации**. Очевидно, для идеально линейно-поляризованного света $I_{\min} = 0$ и $P = 1$, а естественный свет ($I_{\max} = I_{\min}$) имеет P , равный 0. Частично поляризованный свет имеет промежуточное между 0 и 1 значение степени поляризации.

Закон Малюса

При падении линейно-поляризованного света на поляроид в общем случае плоскость колебания светового вектора может не совпадать с оптической плоскостью (ОП) этого поляроида. В этом случае на выходе поляроида интенсивность светового потока понизится, а при некоторых углах между ОК падающего потока и ОПП поляроид может не пропускать поляризованный свет.

Световой вектор линейно-поляризованного света, падающего на поляроид, представляем суммой двух векторов, один из которых колеблется в ОПП и определяется как проекция светового вектора на ОПП (рис. 4.5):

$$E'_y = E_y \cos \varphi. \quad (7)$$

Световой вектор E'_x соответствует задерживаемой в поляроиде Π_2 компоненте светового потока. На выходе Π_2 интенсивность света, согласно (4)

$$I'_y \sim (E'_y)^2 = E_y^2 \cos^2 \varphi,$$

то есть

$$I'_y = I_y \cos^2 \varphi. \quad (8)$$

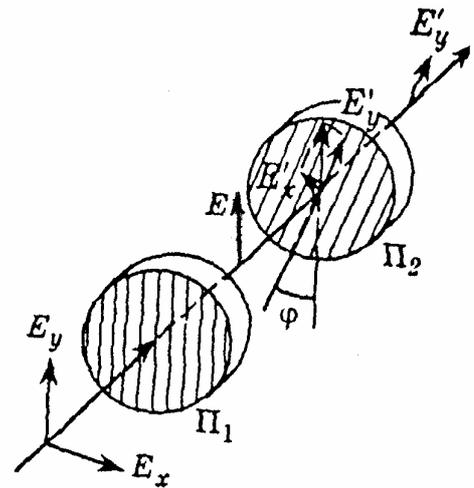


Рис. 4.5

Соотношение (8) является математической формулировкой **закона Малюса** – закона изменения интенсивности поляризованного света, прошедшего через поляроид (анализатор).

Поляризация света при двойном лучепреломлении

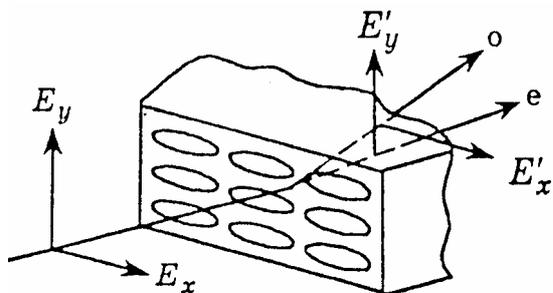


Рис. 4.6

Молекулы некоторых кристаллических веществ имеют такую упаковку в кристалле, что составляющие их заряды образуют линейные диполи с дипольным моментом $\vec{p} = q \cdot \ell$, которые располагаются упорядоченно. На рис. 4.6 схематически изображена дипольная структура вещества с упорядоченно

расположенными молекулами в виде эллипсов. Если световой вектор ЭМВ \vec{E} совпадает с большими осями эллипсов, то заряды диполей имеют относительно большую свободу, а дипольные моменты молекул приобретают в переменном поле ЭМВ большую амплитуду. Если \vec{E} направлен по-другому, то заряды диполей сильнее ограничены в движениях, а дипольные моменты молекул имеют меньшие значения. Суммарный дипольный момент единицы объема вещества, называемый **вектором поляризации**, характеризуется диэлектрической проницаемостью ϵ вещества. Таким образом, вещество обнаруживает различную ϵ для ЭМВ с той или иной ориентацией электрического поля ЭМВ. В немагнитных веществах ϵ определяет их абсолютный показатель преломления: $n = \sqrt{\epsilon}$. Нетрудно заключить, что линейно-поляризованные лучи, световые векторы (электрические поля) которых имеют разную ориентацию по отношению к кристаллической решетке вещества, **преломляются под разными углами**.

Поток естественного света – суперпозиция двух линейно-поляризованных лучей со взаимно перпендикулярными световыми векторами \vec{E}_x и \vec{E}_y . Один из векторов может быть сонаправлен с большой осью молекул – эллипсов (на рис. 4.6 это \vec{E}_x), другой – с меньшей осью. Лучи преломляются на грани кристалла, согласно закону Снеллиуса (закон преломления), под разными углами β_1 и β_2 при одном и том же угле падения α :

$$\sin \beta_1 = \frac{\sin \alpha}{n_x}, \quad \sin \beta_2 = \frac{\sin \alpha}{n_y}. \quad (9)$$

Таким образом, происходит пространственное разделение естественного света на два линейно-поляризованных луча (показаны пунктиром на рис. 4.6) со взаимно перпендикулярными ПК световых векторов. Этот эффект называют **явлением двойного лучепреломления**, а кристаллы, обнаруживающие это явление – двоякопреломляющими. Если оси «молекулярных диполей» расположены по отношению к поверхности кристалла под острым углом, то двояко преломляется и луч, нормально падающий на эту поверхность кристалла, то есть плоскость преломления одного из этих лучей может не совпадать с плоскостью падения луча естественного света (рис. 4.7). В кружках изображена поляризация световых потоков на входе и выходе двояко преломляющей пластины. Преломленные лучи соответственно называются **необыкновенными (e)** и **обыкновенными (o)**.

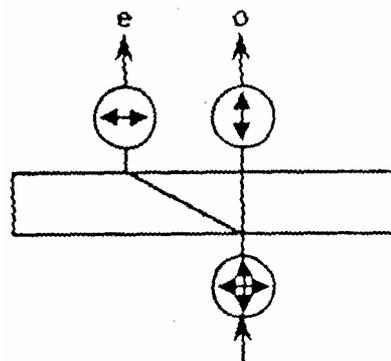


Рис. 4.7

Явление двойного лучепреломления используется в поляризаторе, называемом **призмой Николя** или просто – **ником**. Николь склеен прозрачным клеем – канадским бальзамом – из двух клинообразных двоякопреломляющих кристаллов (рис. 4.8), например, исландского шпата. Углы клиньев и расположение кристаллической решетки относительно входящего в николь потока естественного света подбираются так, чтобы необыкновенный луч (e) проходил сквозь прибор, практически не преломляясь. Обыкновенный луч (o) преломляется на входной грани николя под меньшим углом, на прослойку бальзама падает под углом, превосходящим угол полного внутреннего отражения для границы раздела сред шпат – бальзам. Здесь (o) отражается на зачерненную боковую грань николя, то есть уводится в сторону от проходящего светового потока, в котором остается линейно-поляризованный необыкновенный луч. Явление двойного лучепреломления позволяет получать пучки плоскополяризованного света.

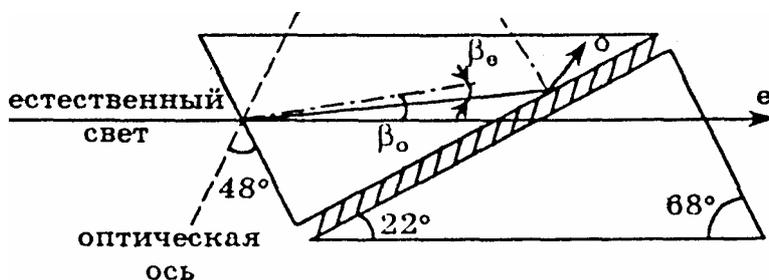


Рис. 4.8

Дихроизм

Обыкновенный и необыкновенный лучи, как результат двойного лучепреломления в оптически анизотропных кристаллах, по-разному поглощаются в веществе. Луч, электромагнитное поле которого «раскачивает» молекулярные диполи до большей амплитуды, поглощается сильнее, то есть его

энергия уже на малой толщине вещества переходит в энергию теплового хаотического колебания молекул. При достаточной толщине слоя такого вещества в проходящем световом потоке остается один линейно-поляризованный луч со степенью поляризации, близкой к единице. Такое избирательное поглощение световых потоков называется **дихроизмом**.

Примерами дихроичных веществ являются кристаллы турмалина и сульфата йодистого хинина. Последний чаще всего используется в плоских поляроидах – пластинках из прозрачного материала с нанесенной на поверхность желеобразной пленкой, в которой взвешены мельчайшие кристаллики дихроика с одинаковой ориентацией молекул в пространстве.

Наведенная анизотропия

Для получения двух плоско-поляризованных лучей при двойном Лучепреломлении необходимо наличие анизотропии оптических свойств. Такая анизотропия может существовать в кристаллах или может быть получена в результате внешних воздействий (при механическом напряжении, в электрических или магнитных полях). В этом случае анизотропию свойств называют **наведенной**. Оптическую анизотропию можно создать искусственно даже в аморфном прозрачном веществе, в обычном состоянии, не обладающим этим свойством. Например, деформированное стекло приобретает свойства двоякопреломляющего кристалла и изменяет степень поляризации проходящего сквозь него света (σ – механическое напряжение). Это происходит потому, что в направлении сжатия вещества заряды молекулярных диполей сближены, а в направлении растяжения расстояния между молекулами увеличены.

Двоякопреломляющие свойства имеет диэлектрик в сильном постоянном внешнем электрическом поле. Молекулярные диполи ориентируются в направлении силовых линий поля и, даже аморфные вещества – твердые, жидкое и газообразные – приобретают упорядоченную структуру подобно кристаллам с анизотропными свойствами. Появление двоякопреломляющих свойств у веществ в сильных электрических полях (E) носит название **эффекта Керра**. Такого же эффекта (возникновения анизотропии оптических свойств) можно достичь, поместив изначально прозрачное магнитоактивное вещество в сильное магнитное поле (H).

Характеристикой степени анизотропии может служить разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей (k – некоторые константы)

$$n_o - n_e = k_1 \sigma; \quad n_o - n_e = k_2 E^2; \quad n_o - n_e = k_3 H^2.$$

Поляризация света при отражении и преломлении на поверхности диэлектриков. Явление и закон Брюстера

Согласно волновой теории Гюйгенса – Френеля и электромагнитной теории световых волн, отраженный и преломленный на поверхности вещества луч есть вторичное излучение молекулярных диполей вещества, колебания которых возбуждаются переменным электрическим полем падающей на поверхность вещества (первичной) световой волны. Световой вектор первичной волны задает направление колебательного движения зарядов диполей, а оси диполей определяют ориентацию светового вектора вторичных волн (рис. 4.9).

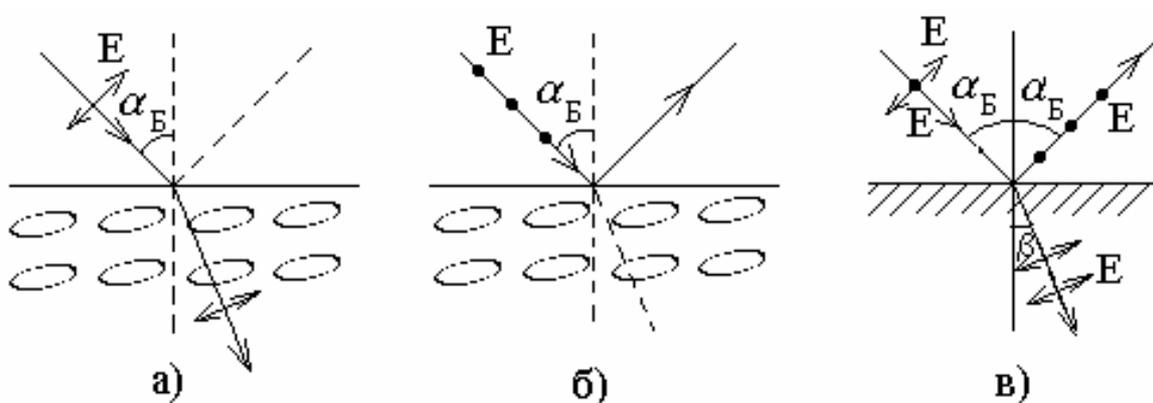


Рис. 4.9

Если световой вектор падающего луча колеблется в плоскости падения (общей с отраженным лучом), то найдется такой угол падения α_B , для которого направление отраженного луча совпадает с осями колеблющихся диполей отраженного вещества. Из теории излучения линейного диполя известно, что в направлении его оси электромагнитная волна имеет нулевую интенсивность. Это означает, что энергия падающего под углом α_B поляризованного света со световым вектором в плоскости падения луча преобразуется в энергию только преломленного луча (рис. 4.9, а), то есть такой луч не отражается от поверхности диэлектрика.

Для падающего на поверхность диэлектрика естественного света при углах падения, отличных от α_B , как в отраженном, так и в преломленном потоках присутствуют лучи с обеими ориентациями световых векторов. Если же угол падения естественного света равен α_B , то в отраженном свете будет присутствовать только луч, световой вектор которого перпендикулярен плоскости падения (рис. 4.9, б). Отражение полностью линейно-поляризованного света от поверхности диэлектрика называется **явлением Брюстера**, а соответствующий угол падения – **углом Брюстера** (рис. 4.9, в)

При полной поляризации отраженного света угол между отраженным и преломленным лучами 90° , то есть

$$\alpha'_B + \beta + \frac{\pi}{2} = \pi. \quad (10)$$

По законам преломления (9) и отражения

$$n = \frac{\sin \alpha_B}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha'_B}{\sin \beta}. \quad (11)$$

Решая совместно (10) и (11), имеем: $\alpha_B = \arctg n$ (12)

Выражение (12) – математическая формулировка **закона Брюстера**, утверждающего, что для каждого диэлектрика найдется такой угол падения света, что отраженный луч оказывается линейно-поляризованным.

В преломленном световом потоке соотношение интенсивности составляющих лучей не равно единице, но из-за присутствия того и другого степень поляризации принципиально не может быть равна единице. Преломленный в диэлектрике свет является частично поляризованным.

Интенсивность отраженных и преломленных лучей

Степень поляризации лучей – отраженного и преломленного на поверхности диэлектрика – зависит от угла падения естественного луча и показателя преломления. Это происходит из-за различия взаимодействия диэлектрика с электрическими полями волн, световые векторы которых колеблются в плоскости падения луча и в перпендикулярном направлении. Различие описывается **формулами Френеля**:

– интенсивность отраженного луча I'_{II} , световой вектор которого колеблется в плоскости падения, составляет

$$I'_{II} = I_{II} \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}^2(\alpha + \beta)}. \quad (13)$$

Здесь I_{II} – интенсивность падающего луча с \vec{E}_{II} , колеблющегося в плоскости падения;

– интенсивность I'_{\perp} отраженного луча с \vec{E}_{\perp} , перпендикулярным плоскости падения, определяется как

$$I'_{\perp} = I_{\perp} \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)}, \quad (14)$$

– разницы $I_{\parallel} - I'_{\parallel}$ и $I_{\perp} - I'_{\perp}$ составят интенсивности преломленных лучей с соответствующим направлением колебаний световых векторов I''_{\parallel} и I''_{\perp} .

Вращение плоскости поляризации (оптическая активность)

Оптическая активность вещества проявляется в повороте ПК поляризованного света, проходящего через это вещество (рис. 4.10) на угол α . Опытным путем установлена связь между углом α и длиной пути света в оптически активном веществе l :

$$\alpha = cl,$$

где постоянная c называется удельным вращением.

При взаимодействии поляризованного света с оптически активным веществом наблюдается дисперсия – зависимость c от длины волны света (λ). Обычно c снижается с увеличением λ . Для некоторых длин волн у ряда веществ c достигает значительных величин: десятки градусов при l порядка миллиметра. Оптически активность проявляют и водные растворы некоторых (органических) веществ, для которых

$$\alpha = ncl,$$

где n – концентрация вещества в растворе.

Таким образом явление оптической активности может быть использовано для определения n вещества в водном растворе.

Оптическую активность проявляют вещества, молекулы которых не имеют и не образуют ни плоскостей, ни центров симметрии; или кристаллы, в которых плоскостей и центров симметрии не имеют элементарные ячейки кристаллической решетки. В природе существуют однотипные вещества, отличающиеся (молекулами и кристаллическими ячейками) в оптическом отношении тем, что они являются как бы зеркальным отображением друг друга. При этом вещества с однотипной структурой (молекул или ячеек) вращают ПК в противоположном направлении. Современное представление о физическом механизме поворота ПК поляризованного света состоит в следующем. Электрические диполи несимметричных молекул в отсутствие подобных зеркально отображенных молекул при взаимодействии с по-

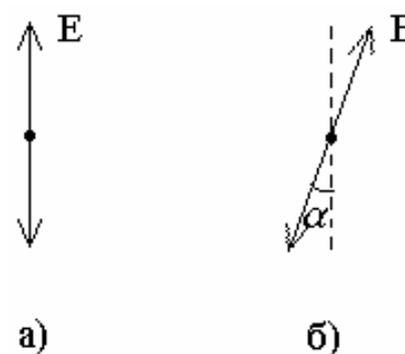


Рис. 4.10

ляризованным светом, распространяющимся вдоль оси z , возбуждаются и совершают колебания, которые могут быть связаны с колебанием вдоль осей x и y . Пусть ось x совпадает с плоскостью поляризации света. Тогда основное возбужденное колебание совершают осцилляторы (диполи) x с собственной частотой ν_1 , а осцилляторы y совершают вынужденные колебания, связанные с основным, с частотой ν_2 . Скорости распространения в веществе волн с ν_1 и ν_2 различны, поэтому при движении их в веществе между ними (плоскостями колебаний) возникает сдвиг фаз. В результате результирующий световой вектор на выходе из вещества оказывается повернутым относительно светового вектора входящего в вещество луча на некоторый угол α , так как компоненты результирующего светового вектора складываются из световых векторов E_x и E_y . При этом величина E_y в каждой точке распространения света в веществе, соответствующей определенной фазе E_x изменяется вследствие сдвига фаз.

4.2. Методические указания к лекционным занятиям

Вопросы лекции	Форма изучения	Литература	Вопросы для самоконтроля студентов
<p>Поляризация света: – естественный и поляризованный свет; – степень поляризации; – закон Малюса; – поляризация света при двойном лучепреломлении; – дихроизм; – наведенная анизотропия; – интенсивность отраженных и преломленных лучей; – поляризация света при отражении и преломлении на поверхности диэлектриков. Явление и закон Брюстера; – вращение плоскости поляризации</p>	лекция	[3]; [7]; [9]	<ol style="list-style-type: none"> 1. Какое свойство излучения называют поляризацией света? 2. Дайте понятие светового вектора и плоскости его колебаний. 3. Почему световой вектор естественного луча хаотически изменяется по величине и направлению? 4. Какие световые потоки называют поляризованными? 5. Что такое линейно-поляризованный свет? 6. Как соотносятся амплитуды световых векторов и интенсивности лучей, составляющих поток естественного света? 7. Что такое оптическая плоскость поляроида? 8. Что такое и каковы причины частичной поляризации света? 9. Как оценивается «качество» линейно- и частично-поляризованного света? 10. Что происходит в общем случае с линейно-поляризованным светом, проходящим сквозь поляроид? 11. При каком угле между оптическими плоскостями двух поляроидов естественный свет задерживается в них полностью? 12. Какие вещества являются и как другие вещества становятся оптически анизотропными? 13. В каком направлении поляризуется действие электрического поля на анизотропное вещество наибольшее, в каком – наименьшее? 14. Как внешне выглядит двойное лучепреломление в плоскопараллельных пластинах? 15. Что необыкновенного в «необыкновенном» луче? 16. В каком направлении по отношению к линейно поляризованному лучу света совершаются колебания диполи вещества? 17. В каком направлении колеблющийся линейный диполь не излучает? 18. Может ли степень поляризации отраженного от диэлектрика света быть равной 1? 0? 19. Чему равна степень поляризации луча, поляризованного по кругу? С эллиптической поляризацией?

4.3. Методические указания к практическим занятиям

Тема: Поляризация света

Задачи	Рекомендации
<p>1. Определенные параметры отраженного и преломленного на поверхности диэлектрика света</p>	<p>1. Задачи, в которых рассматривается поляризация света при отражении и преломлении на границе двух диэлектриков, решаются с помощью формул Френеля. Их частным случаем является закон Брюстера. Обратите внимание: в формуле, выражающей закон Брюстера, n – относительный показатель преломления двух диэлектриков, на границе которых происходит отражение света.</p> <p>Для расчета величин $I'_{\perp}, I'_{\parallel}$ по формулам, необходимо знать углы падения i и преломления r. При падении света на границу двух сред со стороны оптически более плотной среды может случиться, что вычисления дадут для угла преломления $\sin r = (\sin i)/n < 1$. Так как угла r, удовлетворяющего этому неравенству, не существует, такой результат должен преломляться на данной границе, т.е. возникнет полное внутреннее отражение. В этом случае $I'_{\perp} = I_{\perp}, I'_{\parallel} = I_{\parallel}$ и полная интенсивность отраженного луча $I' = I'_{\perp} + I'_{\parallel}$ равна интенсивности падающего луча $I = I_{\perp} + I_{\parallel}$.</p>
<p>2. Определенные интенсивности поляризованного света после системы поляризаторов</p>	<p>2. Главной плоскостью (главным направлением) поляризатора называют плоскость, в которой происходят колебания световых векторов в плоско-поляризованном луче, выходящем из прибора. Этими же терминами характеризуют анализатор, который представляет собой тот же прибор, что и поляризатор, но служит для анализа поляризованного света. Следовательно, величина φ в законе Малюса является одновременно углом между плоскостями, в которых колеблются световые векторы двух плоско-поляризованных лучей: падающего на анализатор и выходящего из него.</p>
<p>3. Задачи с учетом вращения плоскости поляризации</p>	<p>3. Вращение плоскости поляризации происходит как в кристаллах, так и в растворах. В задачах этого типа требуется как правило, анализировать с помощью анализаторов, определить толщины слоев таких веществ или их концентрацию. Поэтому задачи при этом сводятся к задачам второго типа (см. пункт выше)</p>

4.4. Примеры решения задач

Задача 1.

Во сколько раз отличаются составляющие светового вектора частично поляризованного потока со степенью поляризации 0,5?

Решение. Поскольку интенсивность прямо пропорциональна квадрату амплитуды, то

$$\frac{E_{\max}^2}{E_{\min}^2} = \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = k.$$

В выражении для степени поляризации P разделим числитель и знаменатель на I_{\min}

$$P = \frac{I_{\max}/I_{\min} - 1}{I_{\max}/I_{\min} + 1} = \frac{k - 1}{k + 1}.$$

$$\text{Отсюда } k = \frac{1 + P}{1 - P}, \quad \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \sqrt{k} = \sqrt{\frac{1 + P}{1 - P}} = \sqrt{3}.$$

Задача 2.

Оптическая плоскость анализатора повернута относительно ОП поляризатора на некоторый угол φ_0 . Повернув анализатор из этого положения на 30° , мы уменьшили тем самым интенсивность проходящего светового потока еще в 4 раза. Определить φ_0 .

Решение. Начальная интенсивность света на выходе анализатора $I_{\text{вых.0}}$, согласно закону Малюса, связана с интенсивностью входящего потока $I_{\text{вх}}$ соотношением

$$I_{\text{вых.0}} = I_{\text{вх}} \cos^2 \varphi_0.$$

Для нового положения анализатора

$$I'_{\text{вых}} = I_{\text{вх}} \cos^2 (\varphi_0 + 30^\circ) = \frac{1}{4} I_{\text{вх}} \cos^2 \varphi_0.$$

Сокращая $I_{\text{вх}}$, получаем тригонометрическое уравнение

$$4 \cos^2 (\varphi_0 + 30^\circ) = \cos^2 \varphi_0,$$

откуда

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}(\sqrt{3} - 1) \approx 33^\circ.$$

Задача 3.

Относительная диэлектрическая проницаемость двояко-преломляющего кристалла варьируется по направлениям от $\varepsilon_1 = 3,24$ до $\varepsilon_2 = 5,76$. На какой максимальный угол $\Delta\beta$ расходятся в кристалле обыкновенный и необыкновенный лучи при падении естественного света под углом $\alpha = 60^\circ$?

Решение. $\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1$. Согласно закону преломления $\sin\beta_1 = \frac{\sin\alpha}{n_x}$, $\sin\beta_2 = \frac{\sin\alpha}{n_2}$, где, учитывая, что $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1} = 1,8$, $n_2 = 2,4$; $\sin 60^\circ \approx 0,864$.
Итак, $\beta_1 = \arcsin 0,48 \approx 29^\circ$, $\beta_2 = \arcsin 0,36 \approx 22^\circ$ и $\Delta\beta = 7^\circ$.

Задача 4.

На поверхности стекла с $n = 1,5$ падает под углом $\alpha = 45^\circ$ пучок естественного света. Определить интенсивности отраженного и преломленного лучей в долях интенсивности I_0 падающего света, а также степени их поляризации.

Решение. Роли I_{\max} и I_{\min} при определении степени поляризации P по формуле (6) играют: для отраженного луча I'_{\parallel} и I'_{\perp} , для преломленного I''_{\parallel} и I''_{\perp} . Их попарные суммы составят интенсивности соответствующих лучей. Очевидно, $I_{\parallel} = I_{\perp} = I_0/2$. По закону преломления определяем угол преломления β :

$$\beta = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right) = 28,125^\circ.$$

По формулам Френеля мы получаем:

$$I'_{\parallel} = \frac{I_0}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2(45^\circ - 28,125^\circ)}{\operatorname{tg}^2(45^\circ + 28,125^\circ)} = 0,00424I_0;$$

$$I''_{\parallel} = I_{\parallel} - I'_{\parallel} = (0,5 - 0,0424)I_0 = 0,49576I_0;$$

$$I'_{\perp} = \frac{I_0}{2} \cdot \frac{\sin^2 16,875^\circ}{\sin^2 73,125^\circ} = 0,046 I_0;$$

$$I''_{\perp} = I_{\perp} - I'_{\perp} = 0,454 I_0;$$

$$I'_{\parallel} + I'_{\perp} = 0,05024 I_0;$$

$$I''_{\parallel} + I''_{\perp} = 0,94976 I_0;$$

$$p' = \frac{0,046 - 0,00424}{0,05024} = 0,832,$$

$$p'' = \frac{0,49576 - 0,454}{0,94976} = 0,044.$$

Задача 5.

Шлиф (специально подготовленная для исследования пластинка) двоякопреломляющего материала толщиной 6,75 мкм вдоль и поперек оптической плоскости имеет показатели преломления 2,48 и 2,64. В какой цвет окрасится поле зрения на выходе шлифа, если его осветить линейно-поляризованным белым светом?

Решение. Цвет в поле зрения определяется длиной световой волны, для которой выполняется условие максимума интерференции:

$$\Delta = 2k \cdot \frac{\lambda}{2} = k\lambda,$$

где $k = 1, 2, 3, 4 \dots$

Учитывая, что возникшая разность хода зависит от разности показателей преломления в различных направлениях, можно записать

$$d(n_x - n_y) = k\lambda; \lambda = \frac{d(n_x - n_y)}{k} = \frac{1,08 \cdot 10^{-6}}{k} (\text{м}).$$

Если $k = 1$, то $\lambda_2 = 504$ нм (зеленый цвет); при $k = 3$ $\lambda_3 = 360$ нм (ультрафиолетовое свечение). Итак, шлиф в поле зрения поляризационного исследовательского прибора будет выглядеть зеленым. На практике приходится решать обратную задачу – по цвету определять толщины пластинок или находить n_x и n_y , и тем самым идентифицировать вещество.

Задача 6.

Определить, во сколько раз уменьшится интенсивность естественного света, прошедшего через два николя, плоскости поляризации которых составляют угол 45° . Каждый николю поглощает 8% света, падающего на него (рис. 4.11).

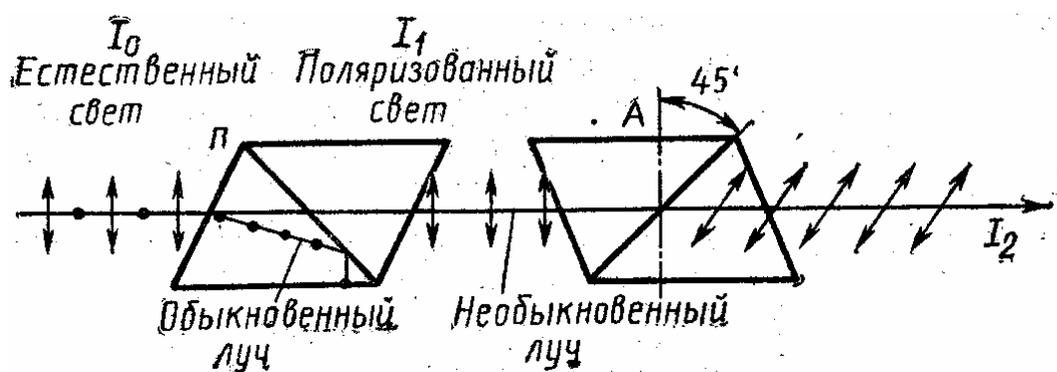


Рис. 4.11

Решение. В результате двойного лучепреломления естественный луч света, попадая в призму П – поляризатор, раздваивается на обыкновенный и необыкновенный лучи. Оба луча поляризованы, но во взаимно перпендикулярных плоскостях. Обыкновенный луч, подчиняясь закону преломления, переломится и, подойдя к слою канадского бальзама в николе, испытывает полное отражение и поглотится зачерненной боковой гранью призмы. Необыкновенный луч проходит через призму без отклонения, интенсивность его уменьшается из-за поглощения света призмой на величину kI_0 .

Интенсивность света, прошедшего через поляризатор, равна

$$I_1 = 0,5(1 - k)I_0, \quad (1)$$

где $k = 0,08$ (т.е. 8 %) – коэффициент поглощения света в призме; I_0 – интенсивность естественного света, падающего на поляризатор.

Поляризованный свет, войдя во второй николю – анализатор А, опять поглощается и интенсивность его уменьшается на величину kI_0 . Интенсивность поляризованного света из-за несовпадения плоскостей поляризации поляризатора и анализатора согласно закону Малюса

$$I_2 = I_1(1 - k)\cos^2 \alpha, \quad (2)$$

где α – угол между плоскостями поляризации поляризатора и анализатора; k – коэффициент поглощения; I_1 – интенсивность поляризованного света,

падающего на анализатор; I_2 – интенсивность поляризованного света, прошедшего через анализатор.

Подставляя выражение (1) в (2), имеем

$$I_2 = 0,5(1-k)^2 I_0 \cos^2 \alpha. \quad (3)$$

Из соотношения (3) следует

$$\frac{I_2}{I_0} = 0,5(1-k)^2 \cos^2 \alpha; \quad \frac{I_0}{I_2} = \frac{1}{0,5(1-k)^2 \cos^2 \alpha}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$\frac{I_2}{I_0} = 0,5(1-0,08)^2 \cos^2 45^\circ = 0,2; \quad \frac{I_0}{I_2} = \frac{1}{0,2} = 5.$$

Задача 7.

На пути частично поляризованного пучка света поместили николю. При повороте николя на угол $\varphi = 60^\circ$ из положения, соответствующего максимальному пропусканию света, интенсивность прошедшего света уменьшилась в $\delta = 3,0$ раза. Найти степень поляризации падающего света.

Решение. Частично поляризованный свет можно рассматривать как смесь плоско-поляризованного и естественного света. Николь всегда пропускает половину падающего на него естественного света (превращая его в плоско-поляризованный). Степень пропускания поляризованного света, падающего на николю, согласно закону Малюса, зависит от взаимной ориентации главных плоскостей поляризатора и анализатора. Поэтому полная интенсивность света, прошедшего через николю

$$I = 0,5I_n + I_p \cos^2 \varphi, \quad (1)$$

где I_n , I_p – интенсивности естественной и поляризованной составляющих света, падающего на николю. При этом

$$I_{\max} = 0,5I_n + I_p, \quad (2)$$

$$I_{\min} = 0,5I_n. \quad (3)$$

По условию $I_{\max} = \delta I$, или, согласно формулам (1) – (3),

$$I_{\max} = \delta \left[I_{\min} + (I_{\max} - I_{\min}) \cos^2 \varphi \right]. \quad (4)$$

Уравнение (4) содержит два неизвестных: I_{\max} , I_{\min} . Достаточно найти их отношение $\alpha = I_{\max} / I_{\min}$, так как степень поляризации P , можно выразить через величину α :

$$P = (1 - \alpha) / (1 + \alpha). \quad (5)$$

Разделив обе части уравнения (4) на I_{\max} , имеем

$$1 = \delta \left[\alpha + (1 - \alpha) \cos^2 \varphi \right].$$

Выразив отсюда α и подставив в (5), получим ответ

$$P = \frac{\delta - 1}{1 + \delta(1 - 2 \cos^2 \varphi)} = 0,8.$$

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Ветрова В.Т. Сборник задач по физике. – Мн.: Урожай, 1991.
2. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. – М.: Наука, 1993.
3. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики: Учебное пособие для втузов. – М.: Высшая школа, 1989.
4. Зисман Г.А., Тодес О.М. Курс общей физики. В 3-х томах. Т. 2. – М.: Наука, 1972.
5. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. – М.: Наука, 1988.
6. Курс физики. В 2-х т.Т. 1. / под ред. Лозовского В.Н. – СПб.: Лань, 2001.
7. Макаренко Г.М. Курс общей физики. – Мн.: Дизайн ПРО, 2003.
8. Наркович И.И., Волмянский Э.И., Лобко С.И. Физика для втузов. Электричество и магнетизм. Оптика. Строение вещества. – Мн.: Выш. шк., 1994.
9. Савельев И.В. Курс общей физики. В 3-х томах. Т. 2. – М.: Наука, 1973.
10. Трофимова Т.И. Курс физики. – М.: Высшая школа, 1990.
11. Трофимова Т.И. Сборник задач по курсу физики для втузов. – М.: ОНИКС 21 век, 2003.
12. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. – М.: Высшая школа, 2003.

Дополнительная

13. Астахов А.В. Курс физики. В 3-х томах. Том 1. М.: Наука, 1977.
14. Варикаш В.М., Цедрик М.С. Руководство по решению задач по общей физике. – Мн.: Выш. шк. 1995.
15. Гершензон Е.М., Малов Н.Н. Курс общей физики (электричество и магнетизм). – М.: Просвещение, 1980.
16. Иродов И.Е., Савельев И.В., Замша О.И. Сборник задач по общей физике. – М.: Наука, 1975.
17. Калашников С.Г. Электричество. – М.: Наука, 1964.
18. Ландсберг Г.С. Элементарный учебник физики. В 3-х томах. Т. 2. – М.: Наука, 1972.
19. Телеснин Р.В., Яковлев В.Ф. Курс физики: электричество. – М.: Просвещение, 1970.
20. Фирганг Е.В. Руководство к решению задач по курсу общей физики. – М.: Высшая школа, 1978.

Учебное издание

ВАБИЩЕВИЧ Сергей Ананьевич
ГРУЗДЕВ Владимир Алексеевич
ДУБЧЕНОК Геннадий Аркадьевич
ЗАЛЕССКИЙ Виталий Геннадьевич
МАКАРЕНКО Геннадий Макарович

ФИЗИКА

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

для студентов технических специальностей

В двух частях

Часть 2

Редактор Д.Н. Богачёв

Подписано в печать 26.08.05. Формат 60×84 1/16. Гарнитура Таймс. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 14,85. Уч.-изд. л. 13,7. Тираж 250. Заказ 793

Издатель и полиграфическое исполнение
Учреждение образования «Полоцкий государственный университет»

ЛИ № 02330/0133020 от 30.04.04 ЛП № 02330/0133128 от 27.05.04

211440 г. Новополоцк, ул. Блохина, 29