**УДК 528.341**

# УРАВНИВАНИЕ СПУТНИКОВОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ 1 КЛАССА

*С.К. ТОВБАС*

*Рассмотрены вопросы, связанные с достижением точности уравненных значений элементов спутниковой геодезической сети – 1 класса (СГС-1), соответствующей требованиям основных положений о государственной геодезической сети Российской Федерации и Республики Беларусь.*

В статье приведены результаты исследований, проведенных на участке сети СГС-1 из 29 пунктов со средней длиной модуля вектора взаимного положения пунктов, равной 30 км. Рассматривается только вопрос уравнивания предварительных значений векторов взаимного положения в трехмерной, декартовой, ортогональной, экваториальной системах координат и только для СГС-1.

Исследуются некоторые проблемы уравнивания в нуль – свободной сети. Связь с высокоточной геодезической сетью (ВГС) не представляет проблемы, ибо ничего не изменяет ни принципиально, ни алгоритмически.

В самой общей математической постановке метод относительных спутниковых определений предполагает перевод n-мерного неортогонального базиса, образованного измеренными разностями хода фронта волны от спутника до двух наземных пунктов (n ≥ 4), в трехмерный ортогональный базис взаимного положения этих пунктов. Непосредственным измерением является разность хода фронта сигнала несущей частоты. То есть измеряется только модуль вектора, который ориентируется по направлению «наземный пункт – спутник». Координаты спутника – из эфемеридной информации; координаты наземного пункта – из позиционных определений в геоцентрической, экваториальной, гринвичской системах. Далее, наиболее вероятно, составляются двойные или тройные разности, которые обрабатываются по методу наименьших квадратов. В результате перечисленных процедур и происходит перевод n-мерного неортогонального вектора в трехмерный ортогональный. Таким образом, приращения координат наземных пунктов, которыми при постобработке мы оперируем как измерениями, на самом деле функции, определяемые довольно сложным путем:

$$\Delta\bar{R} = f\left(d\left(\bar{r},\bar{R}\left(g\left(\Delta\varphi\right)\right)\right)\right),$$

где $\Delta\bar{R}$ – вектор взаимного положения наземных пунктов, $\bar{r}$ – эфемеридная информация, $\bar{R}$ – вектор положения наземного пункта в геоцентрической системе.

Как отмечено выше, в определении вектора взаимного положения наземных пунктов участвуют измеренные разности хода фронта волны и вычисляемые по эфемеридной информации направляющие косинусы. Выводимый при предварительной обработке фрагмент [3 × 3] ковариационной матрицы характеризует геометрию взаимного положения наземных пунктов и искусственных спутников земли (ИСЗ). Во-первых, это только фрагмент полной матрицы, соответствующий приращениям координат как аргументам. Во-вторых, он может характеризовать только проектирование ошибок измерения разности хода фронта волны на вектор $\Delta\bar{R}$. Нет какой-либо информации, характеризующей ошибки направляющих косинусов и их влияние, которое будет иметь место даже при использовании точных эфемерид. А именно это в большой степени сказывается на распределении ошибок по компонентам вектора [3]. Притом, что, с точки зрения теории метода наименьших координат (МНК), внешне все выглядит правильно, весовые матрицы, составленные на основе выводимого при предварительной обработке фрагмента ковариационной матрицы, будут искажать соотношения весов компонент как одного и того же, так и разных векторов.

В таких условиях вызывает большие сомнения корректность установления систем весов «измеренных» векторов взаимного положения.

Кроме того, с учетом физических и геометрических основ метода должны иметь место систематические ошибки определения взаимного положения пунктов.

Прежде стоит выяснить, сколь необходимо установление системы весов при уравнивании СГС-1. Исследованы результаты уравнивания векторов взаимного положения независимо от формы их представления, при сохранении положения координатных осей и плоскостей в трехмерном пространстве. Такая идея возникла потому, что измерения в сети отягощены ошибками, природу которых мы достоверно установить не можем (причины описаны выше). В различных формах представления векторов их ошибки будут по-разному влиять на результат уравнивания. Получение идентичных результатов будет свидетельствовать о том, что введение системы весов или другой согласующей системы не нужно.

Исходя из вышеупомянутого, на участке СГС-1 измерения производились в шестичасовых сеансах, синхронно на трех смежных пунктах сети. Собственно измеренными модулями являлись синхронные треугольники. После окончания работы на одном, приемники перемещались на пункты смежного треугольника.

В результате каждый вектор взаимного положения, кроме внешнего периметра, определяется дважды в различное время. Векторы внешнего периметра определялись второй раз дополнительно. Четырехугольники с диагоналями не допускались. Такая методика применена из соображения сохранения равномерной структуры, как с точки зрения геометрии, так и распределения систематических и случайных ошибок в интересах последующего уравнивания. Как минимум, она не создает условий для априорной оценки векторов как неравноточных.

При уравнивании любой из векторов был представлен в трехмерном пространстве:

1) в проекциях на оси координат (рис. 1, а);
2) в проекциях на координатные плоскости (рис. 1, б);
3) в полярных координатах (рис. 1, в, г).

Во всех случаях имеется в виду трехмерная топоцентрическая система. Главной координатной плоскостью является плоскость, параллельная экватору. Главная координатная ось $X$ лежит в главной координатной плоскости и параллельна плоскости Гринвичского меридиана. Ось $Z$ нормальна к главной координатной плоскости в топоцентре. Ось $Y$ дополняет систему до правой. Причем в полярной системе вектор представлен как $S$, $\alpha$, $\beta$ (рис. 1, в) и как S, γ, δ (рис. 1, г).

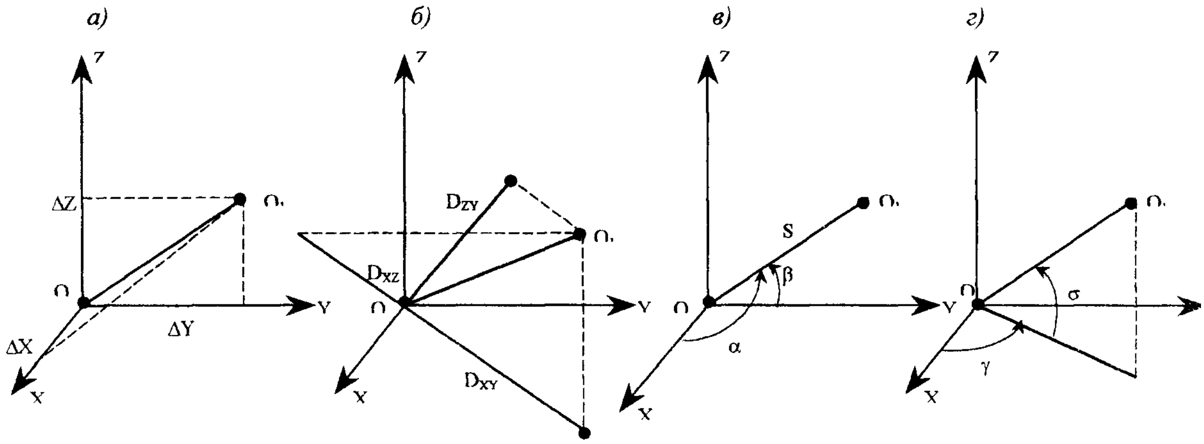


Рис. 1. Способы представления вектора взаимного положения (O, $O_1$)

Уравнивание производилось как с учетом систематических ошибок, так и без учета.

Уравнения поправок имеют вид:

1. В проекциях на оси координат [1]:

а) с учетом систематики:

$$V_{i_j} = -\Delta x \cdot m - \Delta z \cdot \omega_y + \Delta y \omega_z - \delta x_i + \delta x_j + l_x;$$
$$V_{i_j} = -\Delta y \cdot m + \Delta z \cdot \omega_x + \Delta x \omega_z - \delta y_i + \delta y_j + l_y;$$
$$V_{zi_j} = -\Delta z \cdot m - \Delta y \cdot \omega_x + \Delta x \omega_y - \delta z_i + \delta z_j + l_z;$$

б) без учета систематики:

$$V_{x_{ij}} = -\delta x_i + \delta x_j + l_x;$$
$$V_{yi_j} = -\delta y_i + \delta y_j + l_y;$$
$$V_{zi_j} = -\delta z_i + \delta z_j + l_z;$$

$$l_x = \left(x_j^0 - x_i^0\right) - \Delta x;$$
$$l_y = \left(y_j^0 - y_i^0\right) - \Delta y;$$
$$l_z = \left(z_j^0 - z_i^0\right) - \Delta z,$$

где $i, j$ – пункты сети; $V_{Xij}$, $V_{Yij}$; $V_{Zij}$ – поправки к приращениям координат; $\omega_x$, $\omega_y$, $\omega_z$ – элементы поворота вокруг осей координат; $m$ – масштабный множитель; $x^0$, $y^0$, $z^0$ – предварительные значения координат пунктов; $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ – измерянные приращения от $i$ до $j$ пункта; $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ – поправки к предварительным координатам пункта.

2. В проекциях на координатные плоскости:
а) с учетом систематики:

$$V_{xy} = -D_1 \cdot m + \frac{2\Delta z \Delta y}{D_1}\omega_x - \frac{2\Delta z \Delta x}{D_1}\omega_y - \frac{\Delta x}{D_1}\delta x_i - \frac{\Delta y}{D_1}\delta y_i + \frac{\Delta x}{D_1}\delta x_j + \frac{\Delta y}{D_1}\delta y_j + l_{xy};$$

$$V_{xz} = -D_2 \cdot m - \frac{2\Delta z \Delta y}{D_2}\omega_x + \frac{2\Delta x \Delta y}{D_2}\omega_z - \frac{\Delta x}{D_2}\delta x_i - \frac{\Delta z}{D_2}\delta z_i + \frac{\Delta x}{D_2}\delta x_j + \frac{\Delta z}{D_2}\delta z_j + l_{xz};$$

$$V_{yz} = -D_3 \cdot m + \frac{2\Delta x \Delta z}{D_3}\omega_y - \frac{2\Delta x \Delta y}{D_3}\omega_z - \frac{\Delta y}{D_3}\delta y_i - \frac{\Delta z}{D_3}\delta z_i + \frac{\Delta y}{D_3}\delta y_j + \frac{\Delta z}{D_3}\delta z_j + l_{yz};$$

б) без учета систематики:

$$V_{xy} = -\frac{\Delta x}{D_1}\delta x_i - \frac{\Delta y}{D_1}\delta y_i + \frac{\Delta x}{D_1}\delta x_j + \frac{\Delta y}{D_1}\delta y_j + l_{xy};$$

$$V_{xz} = -\frac{\Delta x}{D_2}\delta x_i - \frac{\Delta z}{D_2}\delta z_i + \frac{\Delta x}{D_2}\delta x_j + \frac{\Delta z}{D_2}\delta z_j + l_{xz};$$

$$V_{yz} = -\frac{\Delta y}{D_3}\delta y_i - \frac{\Delta z}{D_3}\delta z_i + \frac{\Delta y}{D_3}\delta y_j + \frac{\Delta z}{D_3}\delta z_j + l_{yz};$$

$$l_{xy} = \left(\left(x_j^0 - x_i^0\right)^2 + \left(y_j^0 - y_i^0\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left((\Delta x)^2 + (y)^2\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$l_{xz} = \left(\left(x_j^0 - x_i^0\right)^2 + \left(z_j^0 - z_i^0\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left((\Delta x)^2 + (y)^2\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$l_{yz} = \left(\left(y_j^0 - y_i^0\right)^2 + \left(z_j^0 - z_i^0\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left((\Delta y)^2 + (z)^2\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$D_1 = \left((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$D_2 = \left((\Delta x)^2 + (\Delta z)^2\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$D_3 = \left((\Delta y)^2 + (\Delta z)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $V_{x,y}$, $V_{x,z}$, $V_{y,z}$, – поправка к предварительным значениям проекций вектора на координатные плоскости.

3. В полярных координатах ($S$, $\alpha$, $\beta$):
а) с учетом систематики:

$$V_\alpha = \frac{\Delta Z}{D_3}\omega_y - \frac{\Delta Y}{D_3}\omega_z + \frac{D_3}{S^2}\delta x_i - \frac{\Delta x \Delta y}{D_3 S^2}\delta y_i - \frac{\Delta x \Delta z}{D_3 S^2}\delta z_i - \frac{D_3}{S^2}\delta x_j + \frac{\Delta x \Delta y}{D_3 S^2}\delta y_j + \frac{\Delta x \Delta z}{D_3 S^2}\delta z_j + l_\alpha;$$

$$V_\beta = -\frac{\Delta Z}{D_2}\omega_x + \frac{\Delta x}{D_2}\omega_z - \frac{\Delta x \Delta y}{D_2 S^2}\delta x_i + \frac{D_2}{S^2}\delta y_i - \frac{\Delta y \Delta z}{D_2 S^2}\delta z_i + \frac{\Delta x \Delta y}{D_2 S^2}\delta x_j - \frac{D_2}{S^2}\delta y_j + \frac{\Delta y \Delta z}{D_2 S^2}\delta z_j + l_\beta;$$

$$V_S = -S \cdot m - \frac{\Delta x}{S}\delta x_i - \frac{\Delta Y}{S}\delta y_i - \frac{\Delta Z}{S}\delta z_i + \frac{\Delta x}{S}\delta x_j + \frac{\Delta y}{S}\delta y_j + \frac{\Delta z}{S}\delta z_j + l_S;$$

$$l_\delta = \arcsin\frac{z_j^0 - z_i^0}{\left(\left(x_j^0 - x_i^0\right)^2 + \left(y_j^0 - y_i^0\right)^2 + \left(z_j^0 - z_i^0\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \arcsin\frac{\Delta z}{\left(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2\right)^{\frac{1}{2}}};$$

$$l_S = \left(\left(x_j^0 - x_i^0\right)^2 + \left(y_j^0 - y_i^0\right)^2 + \left(z_j^0 - z_i^0\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Уравнивание произведено обычной процедурой метода наименьших квадратов с псевдообращением матрицы нормальных уравнений. При оценке точности, для вычисления средней квадратичной ошибки (СКО) единицы веса в линейной мере поправки $V$, полученные для угловых величин, переведены в линейную меру.

$$V_\alpha^S = \Delta x V_\alpha; \quad V_\beta^S = \Delta y V_\beta;$$

$$V_\gamma^S = D_1 V_\gamma; \quad V_\delta^S = \Delta x V_\delta;$$

где $V_\alpha^S$, $V_\beta^S$, $V_\gamma^S$, $V_\delta^S$ – поправки в линейной мере; $V_\alpha$, $V_\beta$, $V_\gamma$, $V_\delta$ – поправки в радианной мере.

При уравнивании без учета систематических ошибок значение СКО единицы веса для всех форм представления векторов лежат в пределах от 10 до 12 мм. При уравнивании с учетом систематики – от 8,5 до 9,5 мм.

Максимальные и средние значения модуля относительного смещения одного и того же вектора, уравненного в различных формах представления, приведены в таблице.

Значения модулей относительного смещения векторов, уравненных в различных системах (в мм)

| Форма представления | № | Без учета систематики | | | | С учетом систематики | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Проекция на оси координат | 1 | 0 | 18* / 8 | 24 / 14 | 22 / 10 | 0 | 23 / 11 | 26 / 13 | 26 / 13 |
| Проекции на координатные плоскости | 2 | 18 / 8 | 0 | 34 / 18 | 32 / 16 | 23 / 11 | 0 | 12 / 5 | 12 / 5 |
| Полярные координаты (S, α, β) | 3 | 24 / 14 | 34 / 18 | 0 | 16 / 8 | 26 / 13 | 12 / 5 | 0 | 0 |
| Полярные координаты (S, γ, δ) | 4 | 22 / 10 | 32 / 16 | 16 / 8 | 0 | 26 / 13 | 12 / 5 | 0 | 0 |

* В числителе максимальные значения модуля относительного смещения вектора, в знаменателе – средние значения.

Для точностей, достигнутых в странах Европы в сетях, аналогичных СГС-1, и для требований первых редакций «Основных положений ...» РФ результатов, полученных при уравнивании без учета систематики, было бы достаточно. Для обеспечения требований последней редакции «Основных положений...» РФ и РБ этого недостаточно [2].

Из анализа таблицы следует, что уравнивание с учетом систематики лучше учитывает имеющиеся ошибки. Достаточно взглянуть на позиции 3 и 4 в правой и левой части таблицы. Векторы представлены в одной и той же полярной системе координат. Точное (до миллиметра) совпадение результатов в правой части и расхождение в левой являются тому подтверждением.

С использованием систематики результаты лучше, но идентичности не достигнуто. Значит необходимо вводить систему согласования, традиционную (веса) и альтернативную.

Наиболее очевидный путь устранения этого недостатка – установление системы весов, характеризующей распределение ошибок по компонентам, но при уравнивании без учета систематики необходимо найти такой подход, чтобы веса можно было установить для всех четырех вариантов, а после уравнивания получить согласованное решение. Последнее и считать критерием правильности подбора системы весов.

Установление системы весов при уравнивании с учетом систематики видится еще более проблематичным. В частности, применение весовых коэффициентов к масштабным множителям по сути дела меняет орты. Следовательно, нарушается единая метрика, а, значит, систематика перестает быть таковой. То есть теряется само понятие систематики, а точнее вместо систематики определяются общие коэффициенты деформаций растяжения (сжатия) и кручения. Но ведь и уравнивание без учета систематики с применением весов (ковариационных матриц) тоже можно трактовать как учет анизотропии координатной среды на различных участках сети.

Исходя из такой трактовки, можно искать альтернативные решения, а если это не удается, использовать уравнивание с учетом систематики и весами, равными единице.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Машимов М.М. Уравнивание геодезических сетей. – М.: Недра, 1989. – 280 с.
2. Основные положения о государственной геодезической сети России (проект) // Федеральная служба геодезии и картографии России, 2000. – 17 с.
3. Global Positioning System Theory and Practice / B. Hofmann-Wellenhof etal – Wien, Springer – Verlag, 1992.