УДК 528. 23

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ ДЛЯ МАЛЫХ ОБЛАСТЕЙ

А.И. КОЗАКЕВИЧ, С.В. МАКОВСКИЙ

Рассмотрено применение общего алгоритма геодезических проекций с целью определения основных параметров плоских прямоугольных координат для небольших территорий.

В рамках общей теории описания геодезических проекций [1 – 2] разработан общий алгоритм вычислений для широкого класса проекций, в который входят как частные случаи не только известные и наиболее применяемые в мировой геодезической практике геодезические проекции, например, поперечно-цилиндрические Гаусса – Крюгера и UTM, коническая Ламберта, квазистереографическая Руссиля и другие, но также конформные геодезические, отвечающие критерию Чебышева – Граве о наилучших проекциях. В ряде публикаций [1 – 4] рассмотрены достоинства такого рода проекций, которые наиболее приспособлены к форме границ и размерам изображаемой территории. Здесь рассмотрены случаи, когда речь идет об изображении в одной координатной зоне территории целых государств, таких как Беларусь или Украина.

Вместе с тем, по нашему мнению, имеет смысл применить указанную теорию с целью определения основных параметров самых различных условных систем плоских прямоугольных координат, широко применяемых при инженерных изысканиях на небольших территориях, и их место в классе геодезических проекций. Решение подобной задачи имеет большое практическое значение при установлении взаимосвязи различных условных систем координат, а также, при необходимости, с государственной.

Естественно, условные и местные системы координат применяются на малых площадях, когда в общем алгоритме, можно существенно упростить формулы для вычислений. Если принять размеры территории не более чем 8 × 8 км, а координаты вычислять с точностью до 0,001 м, то в общем алгоритме достаточно использовать только величины второго порядка.

Формулы для вычисления плоских прямоугольных координат с удержанием трех членов разложения представляют собой быстро убывающие степенные ряды и имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= c_1P_1 + c_2P_2 + \ldots + (c_3P_3) \\ y &= c_1Q_1 + c_2Q_2 + \ldots + (c_3Q_3) \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

где $P_1 = \Delta q; P_2 = \Delta q^2 - \Delta L^2; P_3 = \Delta q^3 - 3\Delta q\Delta L^2; Q_1 = \Delta L; Q_2 = 2\Delta qq\Delta; Q_3 = 3\Delta q^2\Delta L - \Delta L^3$,
здесь мы имеем: $\Delta q = q - q_0$ – изометрическая широта, связанная с геодезической широтой известным выражением, $\Delta L = L - L_0$ – геодезическая долгота.

Оценку точности вычислений посредством таких рядов проще всего и достаточно надежно можно оценить с помощью остаточного члена в формуле Лагранжа.

Приведем кратко рассуждения, приводящие к выводу относительно размеров малой территории. Пусть будет $c_3P_3 \approx c_3Q_3 \le 10^{-3}\,м$, тогда для условий РБ имеем ($B_0 \ge 51^0 20^i$):

$$P_3 \approx Q_3 \le \frac{10^{-3}}{c_3} \approx \frac{10^{-3}}{1{,}3 \cdot 10^5} \approx 7{,}7 \cdot 10^{-5};$$

$$P_3 \approx Q_3 \approx P_1^3 \approx Q^3 \approx \Delta q^3 \approx \Delta L^3;$$

$$\Delta L \approx \Delta q \le 1{,}975 \cdot 10^{-3}.$$

Это будет соответствовать линейным размерам, подсчитанным по формуле

$$(x \approx y)_{max} \approx c_1P_1 \approx 8 \text{ км, при } \delta x \approx \delta y \le 0{,}001\,м.$$

Тогда формулы для вычисления координат имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= c_1P_1 + c_2P_2 \\ y &= c_1Q_1 + c_2Q_2 \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Запишем выражения для величин, входящих в формулы (2):

$$P_1 = \Delta q = \frac{\Delta B}{V_0^2 CosB_0} + \frac{tgB_0}{2V_0^4 CosB_0}\left(1+3\eta_0^2\right)\Delta B^2 + \cdots$$

$$Q_1 = \Delta L$$

$$P_2 = P_1^2 - Q_1^2 = \frac{\Delta B^2}{V_0^4 Cos^2 B_0} - \Delta L^2;$$

$$Q_2 = 2P_1Q_1 = 2\frac{\Delta B \Delta L}{V_0^2 CosB_0}.$$

Формулы для вычисления плоских прямоугольных координат в функции геодезических широты и долготы имеют вид в пределах принятой точности:

$$x = m_0\frac{c}{V_0^3}\Delta B + \frac{1}{4}m_0 c\frac{Sin2B_0}{V_0}\Delta L^2; \tag{3}$$

$$y = m_0\frac{c}{V_0}CosB_0\Delta L - m_0\frac{c}{V_0^3}SinB_0\Delta B\Delta L. \tag{4}$$

Эти формулы в функции изометрических широт имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= c_1\Delta q - \frac{c_1}{2}SinB_0\Delta q^2 + \frac{c_1}{2}SinB_0\Delta L^2 \\ y &= c_1\Delta L - c_1 SinB_0\Delta L\Delta q \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

В любой геодезической проекции, кроме координат, необходимо вычислять и другие численные характеристики, например, частный масштаб длин, сближение меридианов, поправки в измеренные величины за переход на плоскость геодезической проекции. Для получения выражений этих величин с принятыми ранее ограничениями запишем для вспомогательных величин, смысл которых пояснен в [1 – 2]:

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= -c_1Q_0 - 2c_2Q_1 - 3c_3Q_2 \\ k_2 &= c_1P_0 + 2c_2P_1 + 3c_3P_2 \end{aligned}\right\}; \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= -2c_2Q_1 - 3c_3Q_2 \\ k_2 &= c_1 + 2c_2P_1 + 3c_3P_2 \end{aligned}\right\};$$

$$\left.\begin{aligned} k_1^2 &= 4c_2^2Q_1^2 \\ k_2^2 &= c_1^2 + 4c_2^2P_1^2 + 4c_1c_2P_1 + 6c_1c_3P_2 \end{aligned}\right\};$$

$$\sqrt{k_1^2 + k_2^2} = c_1\left(1 + 2\frac{c_2}{c_1}P_1 + 2\frac{c_2^2}{c_1^2}Q_1^2 + 3\frac{c_3}{c_1}P_2\right); \tag{7}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{V}{cCosB} = \frac{1}{r_0} + \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{r}\right)_0 P_1 + \frac{d^2}{dq^2}\left(\frac{1}{r}\right)_0 \frac{P_0^2}{2} + \ldots$$

$$\frac{1}{r} = \frac{m_0}{c_1}\left[1 + SinB_0P_1 + \frac{1+e'^2Cos^4B_0}{2}P_1^2\right]. \tag{8}$$

Тогда для масштаба в функции изометрических координат получаем:

$$m = m_0\left[1+\left(Cos2B_0 + e'^2 Cos^4 B_0\right)\frac{P_1^2}{2} + SinB_0\frac{Q_1^2}{2} + 3\frac{c_3}{c_1}P_2\right]. \tag{9}$$

При необходимости перехода к геодезическим широтам и долготам в полученных формулах достаточно воспользоваться приведенными выше формулами связи.

В любой проекции класса для данных размеров области масштаб будет отличаться от m_0 не более чем 5×10^{-6} (5 мм на 1 км).

Естественно, при работе на малых участках нет необходимости вести вычисления в функции геодезических или изометрических эллипсоидальных координат. Здесь работают с плоскими прямоугольными координатами, поэтому и масштаб проще вычислять в функции прямоугольных плоских координат.

Для вывода таких формул воспользуемся известной из [1 – 2] формулой:

$$m = \frac{1}{r\sqrt{k_1'^2 + k_2'^2}}. \tag{10}$$

И далее, в функции плоских прямоугольных координат, получаем:

$$m = m_0\left[1+\frac{Cos2B_0}{2c_1^2}X^2 + \frac{Sin^2B_0}{2c_1^2}Y^2 + 3\frac{c_3}{c_1^3}\left(X^2 - Y^2\right)\right]. \tag{11}$$

Заметим, что данная формула для вычисления частного масштаба длин обобщает широкий класс геодезических проекций для малых областей указанных ранее размеров.

Например, если требуется получить формулу масштаба для цилиндрических проекций, то достаточно принять из [1 – 2] выражение: $c_3 = -\frac{c_1^2}{6}Cos2B_0$

$$m = m_0\left[1+\frac{Cos^2B_0}{2c_1^2}Y^2\right]. \tag{12}$$

Для получения формулы масштаба конических проекций воспользуемся следующим выражением $c_3 = \frac{c_1}{6}Sin^2B_0$, тогда

$$m = m_0\left[1+\frac{Cos^2B_0}{2c_1^2}X^2\right]. \tag{13}$$

Если принять $c_3 = \frac{c_1}{6}\left(Sin^2B_0 - \frac{1}{2}Cos^2B_0\right)$, как это имеет место в азимутальной проекции, тогда получим формулу масштаба:

$$m = m_0\left[1+\frac{Cos^2B_0}{4c_1^2}\left(X^2 + Y^2\right)\right]. \tag{14}$$

Для сближение меридианов имеем выражение [1]:

$$tg\gamma = \frac{k_1'}{k_2'} = \left(2c_2'Q_1' + 3c_3'Q_2'\right)\left(c_1' + 2c_2'P_1' + 3c_3'P_2'\right)^{-1};$$

$$tg\gamma = \left(1-\frac{SinB_0}{2c_1}X\right)\frac{YSinB_0}{c_1} + 6c_1c_3'XY. \tag{15}$$

Все, что сказано относительно общей формулы для масштаба, можно отнести и к формуле для сближения меридианов.

Если принять в формуле коэффициенты прямого перехода, то имеем

$$c_3' = \frac{1}{c_1^5}\left(2c_2^2 - c_1 c_3\right);$$

$$tg\gamma = \left(1 + \frac{5}{2}\frac{SinB_0}{c_1}X\right)\frac{Y}{c_1}SinB_0 - \frac{6}{c_1^3}c_3 XY\ . \qquad (16)$$

Последний член выражения дает значение, не превышающее $2''$. Этим значением на практике в большинстве случаев можно пренебречь. Формулу (16) после соответствующих преобразований в этом случае можно записать в виде:

$$\gamma = \frac{Y}{c}V_0 tgB_0\left(1 + \frac{5}{2}\frac{tgB_0}{c}X\right). \qquad (17)$$

Следует помнить о том, что данная формула дает сближение меридианов в радианной мере, и для получения его в секундах необходимо воспользоваться нижеследующей формулой:

$$\gamma'' = \rho''\frac{V_0}{c}tgB_0\left(1 + \frac{5}{2}\frac{X}{c}tgB_0\right)Y\ .$$

Полезно заметить, какой максимальной величины может достичь сближение меридианов в области указанных ранее размеров. Это значение также показывает, насколько может изменяться ориентировка в пределах данной территории. Несложные расчеты показывают, что эта величина может достигать $3'$.

Приведенные результаты позволяют сделать следующие выводы:

– система плоских прямоугольных координат для участков указанных нами размеров может быть сформирована на основе любой известной геодезической проекции, при этом все они обладают свойствами наилучших проекций для изображения малых областей;

– при необходимости имеем простые редукционные формулы, удобные для практического применения;

– данные формулы могут быть положены в основу вывода дифференциальных формул для трансформирования любых систем плоских прямоугольных координат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Подшивалов В.П. Общий алгоритм вычислений в геодезических проекциях // Вести ПГУ. Прикладные науки. – 1995. – Т. 1. № 1. – С. 66 – 74.
2. Подшивалов В.П. Координатная среда для геоинформационных систем // Геодезия и картография. – 1997. – № 6. – С. 51 – 55.
3. Подшивалов В.П. Теоретические основы формирования координатной среды для геоинформационных систем. – Новополоцк: ПГУ, 1998. – 125 с.
4. Подшивалов В.П., Маковский С.В., Козакевич А.И. Системы координат для линейных объектов: В сб. тр. междунар. науч.-техн. конф., Новополоцк, 25 – 27 октября 2000 г. – Новополоцк, 2001. – С. 191 – 194.