Множеством Фиттинга группы G называется непустое множество $\mathscr{F}$ подгрупп группы G, если выполняются следующие условия: 1) если $T \trianglelefteq S \in \mathscr{F}$, то $T \in \mathscr{F}$; 2) если $S, T \in \mathscr{F}$ и $S, T \trianglelefteq ST$, то $ST \in \mathscr{F}$; 3) если $S \in \mathscr{F}$ и $x \in G$, то $S^x \in \mathscr{F}$. Понятие $\mathscr{F}$*-радикала* группы для множества Фиттинга группы G определяется аналогично как и для класса Фиттинга.

Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\mathscr{F}$ – непустое множество Фиттинга π-разрешимой группы G. Тогда $\mathscr{R}_\pi(\mathscr{F}) = \{H \leq G : H_\pi \leq H_{\mathscr{F}}\}$.

Множество Фиттинга группы G называется π*-насыщенным,* если $\mathscr{F} \circ \mathfrak{E}_{\pi'} = \mathscr{F}$, где $\mathfrak{E}_{\pi'}$ – класс всех π'-групп.

Теорема. *Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\mathscr{F}$ – множество Фиттинга π-разрешимой группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *множество $\mathscr{R}_\pi(\mathscr{F})$ является множеством Фиттинга группы G;*
2) *множество Фиттинга $\mathscr{R}_\pi(\mathscr{F})$ группы G π-насыщено.*

Заключение. В настоящей работе построено новое семейство множеств Фиттинга π-разрешимых групп, определяемых вложением холловых подгрупп в радикалы групп.

1. Doerk, K. Finite solvable groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York : Walter de Gruyter, 1992. – P.891.
2. Brison, O. A criterion for the Hall-closure of Fitting classes / O. Brison // Bull. Austral. Math. Soc. – 1981. – Vol. 3, № 3. – P. 361–365.
3. Lockett, P. On the theory of Fitting classes / P. Lockett // Math. Z. – 1973. – Vol. 131, № 3. – P. 103–115.
4. Doerk, K. Ьber den Rand einer Fittingklasse auflцsbarer Gruppen / K. Doerk // J. Algebra. – 1978. – Vol. 51, № 4. – P. 619–630.
5. Воробьев, Н. Т. Об одном признаке локальности формационных произведений / Н. Т. Воробьев // Матем. заметки. – 1983. – № 34, № 2. – С. 165–170.

КРИТЕРИЙ РАВНОМЕРНОЙ ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ СТРУКТУРОЙ

А.А. Козлов, Т.А. Александрович
Новополоцк, УО «ПГУ»

Одним из активно развивающихся разделов теории динамических систем на сегодняшний день является теория управления асимптотическими характеристиками линейных динамических (дискретных и непрерывных) систем [1]. Основными действенными инструментами, используемыми в ней и появившимися изначально в теории управления конечномерными линейными динамическими системами [2], стали матрица управляемости (матрица Калмана), а также свойство равномерной полной управляемости линейной управляемой дифференциальной системы. Полученные результаты планируется в дальнейшем использовать при решении задач управления асимптотическими характеристиками вышеуказанных дискретных систем.

Целью данной работы является введение для линейных управляемых дискретных систем с изменяющейся структурой свойства равномерной полной управляемости и получение коэффициентного критерия наличия у этих систем такого свойства, основанного на матрице управляемости.

Материал и методы. В представленной работе материалом исследования являются линейные управляемые дискретные системы с изменяющейся структурой, для которых вводится и изучается свойство их равномерной полной управляемости. При исследовании применяются методы теории матриц, теории дискретных динамических систем, а также теории управления линейными динамическими системами.

Результаты и их обсуждение. Пусть $n_0, n_1, \ldots, n_t, \ldots$ и $r_0, r_1, \ldots, r_t, \ldots$ – две последовательности положительных целых чисел. Рассмотрим дискретное уравнение

$$x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

в котором A_t – $(n_{t+1} \times n_t)$-матрицы, B_t – $(n_{t+1} \times r_t)$-матрицы, последовательность u_t в каждый момент времени принимает значения в пространстве R^{r_t} (она играет роль входного воздействия). Уравнение (1) связывает неизвестную последовательность $x_t \in \mathrm{R}^{n_t}$ в точках t и $t+1$.

Определение 1 [3]. Соотношение (1) при $u_t \equiv 0,\ t = 0, 1, 2, \ldots,$ т.е. система вида

$$x_{t+1} = A_t x_t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots,$$

называется *однородной системой с изменяющейся структурой*.

Определим $(n_t \times n_\tau)$-матрицу (матрицу Коши [3]) $X_{t,\tau}$ следующим образом:

$$X_{\tau,\tau} = I_\tau \ (I_\tau \text{ – тождественное преобразование в } \mathrm{R}^{n_\tau});$$

$$X_{t,\tau} = A_{t-1} A_{t-2} \cdot \ldots \cdot A_\tau \text{ при } t > \tau.$$

По аналогии с работой [4] введем понятие равномерной полной управляемости системы (1).

Определение 2. Система (1) называется *σ-равномерно вполне управляемой*, если существуют такие числа $\sigma \in \mathrm{N}$ и $\gamma > 0,$ что для любого начального момента времени $\tau \in \mathrm{N}$ и всякого начального состояния $x_0 \in \mathrm{R}^{n_\tau}$ найдется управление $u = u(t),$ $t = \tau, \tau+1, \ldots, \tau+\sigma-1,$ удовлетворяющее неравенству $\|u(t)\| \leq \gamma \|x_\tau\|$ при всех $t = \tau, \tau+1, \ldots, \tau+\sigma-1,$ и такое, что решение системы (1) с этим управлением и начальным условием $x_\tau = x_0$ удовлетворяет равенству $x_\sigma = 0 \in \mathrm{R}^{n_{\tau+\sigma}}$.

Рассмотрим матрицу управляемости [3]

$$W_{\tau,\tau+\sigma} = \sum_{j=\tau}^{\tau+\sigma-1} X_{\tau+\sigma,\, j+1} B_j B_j^T X_{\tau+\sigma,\, j+1}^T$$

размеров $n_{\tau+\sigma} \times n_{\tau+\sigma}$.

Теорема. *Система* (1) *равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда существуют такие числа* $\sigma \in \mathrm{N}$ *и* $\alpha > 0,$ *что для любого числа* $\tau \in \mathrm{N}$ *при всяком векторе* $\xi \in \mathrm{R}^{n_{\tau+\sigma}}$ *выполняется неравенство*

$$\xi^T W_{\tau,\tau+\sigma} \xi = \xi^T \cdot \left(\sum_{j=\tau}^{\tau+\sigma-1} X_{\tau+\sigma,\, j+1} B_j B_j^T X_{\tau+\sigma,\, j+1}^T\right) \cdot \xi \geq \alpha \|\xi\|^2 .$$

Заключение. Представленные результаты в дальнейшем позволят решать задачи управления асимптотическими характеристиками линейных дискретных систем с изменяющейся структурой.

Работа выполнялась в рамках Государственной программы научных исследований «Конвергенция – 2020» (подпрограмма 1, задание 1.2.01).

1. Макаров Е.К., Попова С.Н. Управляемость асимптотических инва-риантов нестационарных линейных систем. – Минск: Беларус. навука, 2012. – 407 с.
2. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 400 с.
3. Гайшун И.В. Линейные системы с изменяющейся структурой. Управляемость и наблюдаемость // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36, № 11. – С. 1544–1549.
4. Тонков Е. Л. Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференциальные уравнения. – 1979. – Т. 15, № 10. – С. 1804–1813.