УДК 519.6: 517.958

Метод последовательных функциональных компенсаций в задачах математической физики

Волосова Н.К., аспирант
Московский государственный технический университет МГТУ им. Н.Э. Баумана
Волосов К.А., профессор, д.ф. - м.н., Волосова А.К. , к.ф.- м.н.
МИИТ, г. Москва
Пастухов Д.Ф. к. ф.-м. н., доц., Пастухов Ю.Ф. к. ф.-м. н., доц.
Полоцкий государственный университет

Аннотация. *В работе предложен метод последовательных функциональных компенсаций для точных решений задач математической физики. Для использования алгоритма все уравнения и условия линейны или квазилинейны по одной из переменной. Первое слагаемое неизвестной в задаче функции удовлетворяет неоднородным начальным и краевым условиям. Остальные слагаемые решения однородны по начальным и краевым условиям задачи. На каждом этапе алгоритма выбирается вектор компенсации для интегрирования простейшей задачи по линейной переменной. Вектор компенсации определяет переменные, содержащиеся в следующем слагаемом в функции ответа. Найденное слагаемое подставляется в предыдущее уравнение, находится новый вектор компенсации, функционально уточняется новое слагаемое и следующее уравнение в частных производных и т.д. В алгоритме правая часть уравнения, начальные и краевые условия имеют полиномиальный вид. Итерации завершаются, если последняя функция тождественно равна нулю. Решены два примера данным алгоритмом.*

Ключевые слова: *численные методы, уравнения в частных производных, дифференциальные уравнения с частными производными, гидродинамика.*

The method of successive functional compensation in problem of mathematical physics

N.K. Volosova, K.A. Volosov, A.K. Volosova, D.F. Pastuhov, YU.F. Pastuhov

Описание алгоритма. Пусть уравнения в задаче математической физики в частных производных относительно старшей производной неизвестной функции $u(x,y,z,t)$ по одной, например, по переменной t являются линейными или квазилинейными[18],[19],[20],[15]. Отметим также, что начальные и краевые условия задач математической физики, как правило, записаны в линейном виде[1]. Во многих задачах правые части в уравнениях, в краевых и начальных условиях по переменным можно разложить ряд Тейлора с общим центром. Такие функции после локального разложения содержат слагаемые степенного вида, то есть представляют полиномы нескольких переменных. В работе предложен алгоритм функциональных итерационных компенсаций для решения подобных задач. Ранее в работах [1],[8],[9],[10],[11],[12],[26],[27],[28] для тестирования программ получены точные решения задач математической физики. Сегодня точные решения востребованы в сложных численных алгоритмах, например, в гидродинамике [2],[3],[4],[5],[6],[7],[13],[14],[23],[24],[25],[29],[30]

Рассмотрим первый пример – задачу Коши [1,стр.166]-пример 5:

$$\begin{cases} u_{tt} = 8\left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right) + t^2x^2,\ t > 0, -\infty < x,y,z < \infty \\ u(x,y,z,0) = y^2,\ -\infty < x,y,z < \infty \\ u_t(x,y,z,0) = z^2,\ -\infty < x,y,z < \infty \end{cases} \tag{1}$$

1.1. Выберем первую функцию $u_1(x,y,z,t)$, которая удовлетворяет начальным условиям задачи (1) $u_1(x,y,z,0) = y^2, u_{1t}(x,y,z,0) = z^2$. Тогда

$$u_1(x,y,z,t) = y^2 + tz^2 \tag{2}$$

1.2. Обозначим $u_2(x,y,z,t) = u(x,y,z,t) - u_1(x,y,z,t) \Leftrightarrow u_2(x,y,z,0) = 0, u_{2t}(x,y,x,0) = 0$. Подставим функцию $u(x,y,z,t) = u_1(x,y,z,t) + u_2(x,y,z,t)$ в первое уравнение системы (1)

$$(u_1 + u_2)_{tt} = 8\left((u_1 + u_2)_{xx} + (u_1 + u_2)_{yy} + (u_1 + u_2)_{zz}\right) + t^2x^2 \Leftrightarrow u_{2tt} = 8\left(u_{2xx} + 2 + u_{2yy} + 2t + u_{2zz}\right) + t^2x^2$$

$$u_{2tt} = 16t + 16 + 8\left(u_{2xx} + u_{2yy} + u_{2zz}\right) + t^2x^2 \Leftrightarrow u_{2tt} - 16t - 16 - t^2x^2 - 8u_{2xx} = 8\left(u_{2yy} + u_{2zz}\right) \tag{3}$$

1.3. В алгоритме наступил момент функциональной коррекции. Последнее уравнение(3) представляет уравнение с разделенными переменными. Оно возможно, тогда и только тогда, когда обе части уравнения (3) равны одной и той же константе. Не ограничивая общности, будем считать константу равной нулю. Отсюда же заключаем, что неизвестная функция $u_2(x,y,z,t) = u_2(x,t)$ может зависеть только от двух переменных. Тогда имеем

$$u_2(x,y,z,t) = u_2(x,t), u_{2tt} - 16t - 16 - t^2x^2 - 8u_{2xx} = 0, u_{2yy} + u_{2zz} = 0.$$

1.4.В алгоритме выполняем шаг итерационных компенсаций. Для уравнения

$$u_{2tt} = 16t + 16 + t^2x^2 + 8u_{2xx} \tag{4}$$

решаем вспомогательное уравнение, выполнив замену переменных $u_2(x,t) = \bar{u}_2(x,t) + u_3(x,t)$, для новой переменной потребуем $\bar{u}_2(x,t)$

$$\begin{cases}\overline{u_{2tt}} = 16t + 16 + t^2x^2 \\ \overline{u_2}(x,0) = 0 \\ \overline{u_{2t}}(x,0) = 0\end{cases} \tag{5}$$

Дважды интегрируем по переменной t задачу (5). Вектор правой части $16t + 16 + t^2x^2$ назовем ***вектором компенсации***. Имеем

$$\overline{u_2}(x,t) = \frac{8}{3}t^3 + 8t^2 + \frac{t^4}{12}x^2 + C_1t + C_2, \overline{u_2}(x,0) = 0, \overline{u_{2t}}(x,0) = 0 \Leftrightarrow \overline{u_2}(x,t) = \frac{8}{3}t^3 + 8t^2 + \frac{t^4}{12}x^2.$$

Тогда подставим в задачу (5) выражение $u_2(x,t) = \overline{u_2}(x,t) + u_3(x,t) = \frac{8}{3}t^3 + 8t^2 + \frac{t^4}{12}x^2 + u_3(x,t)$ для определения условий к функции $u_3(x,t)$:

$$u_{2tt} = \left(\frac{8}{3}t^3 + 8t^2 + \frac{t^4}{12}x^2 + u_3(x,t)\right)_{tt} = 16t + 16 + t^2x^2 + u_{3tt} = 16t + 16 + t^2x^2 + \frac{8t^4}{6} + 8u_{3xx} \Leftrightarrow u_{3tt} = \frac{4}{3}t^4 + 8u_{3xx} \tag{5.1}$$

2.3.Переходим к шагу алгоритма 2.3 (функциональной коррекции)

$$u_3(x,t) = \bar{u}_3(x,t) + u_4(x,t)$$

Где ***вектор компенсаций*** $\frac{4}{3}t^4$ зависит только от времени t. Тогда новая функция $u_4(x,t) = u_4(t)$ определяется только переменной нового вектора компенсаций t.

2.4.
$$\begin{cases}\overline{u_{3tt}} = \frac{4}{3}t^4 \\ \overline{u_3}(x,0) = 0 \\ \overline{u_{3t}}(x,0) = 0\end{cases} \tag{6}$$

Из задачи Коши (6) получим

$$\overline{u_3}(x,t) = \frac{2}{45}t^6 + C_3t + C_4, \overline{u_3}(x,0) = 0, \overline{u_{3t}}(x,0) = 0 \Leftrightarrow \overline{u_3}(x,t) = \frac{2}{45}t^6 \tag{7}$$

Подставим (7) в функцию последней замены в уравнение(5.1) $u_3(x,t) = \bar{u}_3(x,t) + u_4(t) = \frac{2}{45}t^6 + u_4(t)$

$$u_{3tt} = \bar{u}_{3tt}(x,t) + u_{4tt}(t) = \frac{4}{3}t^4 + u_{4tt}(t) = \frac{4}{3}t^4 + 8(\overline{u_{3xx}} + u_{4xx}(t)) = \frac{4}{3}t^4 \Leftrightarrow u_{4tt}(t) = 0$$

Дополним последнюю функцию $u_4(t)$ начальными условиями

$$\begin{cases}u_{4tt}(t) = 0 \\ u_4(0) = 0 \\ u_{4t}(0) = 0\end{cases} \Leftrightarrow u_4(t) \equiv 0 \tag{8}$$

В итоге имеем

$$u(x,y,z,t) = u_1(x,y,z,t) + u_2(x,t) = u_1(x,y,z,t) + \overline{u_2}(x,t) + u_3(x,t) =$$
$$= u_1(x,y,z,t) + \overline{u_2}(x,t) + \bar{u}_3(x,t) + u_4(t) = y^2 + tz^2 + \frac{8}{3}t^3 + 8t^2 + \frac{t^4}{12}x^2 + \frac{2}{45}t^6 \tag{9}$$

Выполним проверку ответа (9) к задаче (1) $u(x,y,z,0) = y^2, u_t(x,y,z,0) = z^2$, также

$$u_{tt} = 8(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + t^2x^2 \Leftrightarrow 16t + 16 + t^2x^2 + \frac{4}{3}t^4 = 8\left(\frac{t^4}{6} + 2 + 2t\right) + t^2x^2 = \frac{4}{3}t^4 + 16 + 16t + t^2x^2.$$

Алгоритм метода компенсаций завершается на шаге, когда последняя функция в замене переменных, в данном примере $u_4(t) \equiv 0$, тождественно равна нулю.

Для большей наглядности действия функциональной коррекции алгоритма рассмотрим пример 2 (задачу Коши).

$$\begin{cases}u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + ty^2z^3,\ t > 0, -\infty < x,y,z < \infty \\ u(x,y,x,0) = 0,\ -\infty < x,y,z < \infty \\ u_t(x,y,x,0) = 0,\ -\infty < x,y,z < \infty\end{cases} \tag{10}$$

Так как краевые условия отсутствуют, а начальные условия однородные переходим к пункту алгоритма

1.3. Вектор компенсации ty^2z^3 зависит от трех переменных t,y,z. От этих же переменных будет зависеть первое и остальные слагаемые нашей неизвестной функции $u(x,y,z,t) = \overline{u_1}(y,z,t) + u_2(y,z,t)$, где функция $\overline{u_1}(y,z,t)$ удовлетворяет элементарной задаче (11)

1.4.
$$\begin{cases}\overline{u_{1tt}} = ty^2z^3,\ t > 0,\ -\infty < y,z < \infty \\ \overline{u_1}(y,z,0) = 0,\ -\infty < y,z < \infty \\ \overline{u_{1t}}(y,z,0) = 0,\ -\infty < y,z < \infty\end{cases} \tag{11}$$

Решение (11) имеет вид

$$\overline{u_1}(y,z,t) = \frac{t^3y^2z^3}{6} + C_1t + C_2 = \frac{t^3y^2z^3}{6} \tag{12}$$

Подставим (12) в (10), $u(y,z,t) = \overline{u_1}(y,z,t) + u_2(y,z,t)$, получим

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + ty^2z^3 \Leftrightarrow \overline{u_{1tt}} + u_{2tt} = ty^2z^3 + u_{2tt} = \overline{u_{1yy}} + \overline{u_{1zz}} + u_{2yy} + u_{2zz} + ty^2z^3 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}u_{2tt} = \frac{t^3z^3}{3} + t^3y^2z + u_{2yy} + u_{2zz}, -\infty < y,z < \infty, t > 0 \\ u_2(y,z,0) = 0,\ -\infty < y,z < \infty \\ u_{2t}(y,z,0) = 0,\ -\infty < y,z < \infty\end{cases} \tag{13}$$

2.3. Вектор компенсации $\frac{t^3z^3}{3} + t^3y^2z$ зависит от трех переменных t,y,z. Упростим дальнейшее решение задачи, используя линейность исходной задачи (13). Рассмотрим параллельно 2 задачи $u_2(y,z,t) = u_3(z,t) + u_6(y,z,t)$, где

2.4.
$$\begin{cases}u_{3tt} = \frac{t^3z^3}{3} + u_{3zz}, -\infty < z < \infty, t > 0 \\ u_3(z,0) = 0,\ -\infty < z < \infty \\ u_{3t}(z,0) = 0,\ -\infty < z < \infty\end{cases} \tag{14}$$

с вектором компенсации $\frac{t^3z^3}{3}$. В результате чего функция $u_3(z,t)$ зависит от двух переменных z,t, а в задаче

(15)

$$\begin{cases} u_{6tt} = t^3y^2z + u_{6yy} + u_{6zz}, -\infty < y,z < \infty, t > 0 \\ u_6(y,z,0) = 0, \ -\infty < y,z < \infty \\ u_{6t}(y,z,0) = 0, \ -\infty < y,z < \infty \end{cases} \tag{15}$$

Вектор компенсации равен t^3y^2z. Решаем задачу(14), $u_3(z,t) = \overline{u_3}(z,t) + u_4(z,t)$

$$\begin{cases} \overline{u_{3tt}} = \frac{t^3z^3}{3}, -\infty < z < \infty, t > 0 \\ \overline{u_3}(z,0) = 0, \ -\infty < z < \infty \ \Leftrightarrow \overline{u_3}(z,t) = \frac{t^5z^3}{60} \\ \overline{u_{3t}}(z,0) = 0, \ -\infty < z < \infty \end{cases} \tag{16}$$

Подставим решение (16) в задачу (14), $u_3(z,t) = \overline{u_3}(z,t) + u_4(z,t)$, получим

$$\begin{cases} u_{3tt} = \overline{u_{3tt}}(z,t) + u_{4tt}(z,t) = \frac{t^3z^3}{3} + u_{4tt} = \frac{t^3z^3}{3} + \frac{t^5z}{10} + u_{4zz} \Leftrightarrow u_{4tt} = \frac{t^5z}{10} + u_{4zz} \\ u_4(z,0) = 0, \ -\infty < z < \infty \\ u_{4t}(z,0) = 0, \ -\infty < z < \infty \end{cases} \tag{17}$$

3.3. Вектор компенсации $\frac{t^5z}{10}$ в задаче(17) зависит от двух переменных t, z. Введем новую переменную $u_4(z,t) = \overline{u_4}(z,t) + u_5(z,t)$, где

3.4.
$$\begin{cases} \overline{u_{4tt}} = \frac{t^5z}{10}, -\infty < z < \infty, t > 0 \\ \overline{u_4}(z,0) = 0, \ -\infty < z < \infty \Leftrightarrow \overline{u_4}(z,t) = \frac{t^7z}{420} \\ \overline{u_{4t}}(z,0) = 0, \ -\infty < z < \infty \end{cases} \tag{18}$$

После подстановки(18) в (17) с учетом $u_4(z,t) = \overline{u_4}(z,t) + u_5(z,t)$ получим

$$\begin{cases} u_{4tt} = \frac{t^5z}{10} + u_{4zz} \quad \Leftrightarrow u_{5tt} + \frac{t^5z}{10} = \frac{t^5z}{10} + u_{5zz} \Leftrightarrow u_{5tt} = u_{5zz} \\ u_5(z,0) = 0, \quad -\infty < z < \infty \\ u_{5t}(z,0) = 0, \quad -\infty < z < \infty \end{cases} \tag{19}$$

4.3. Для нулевого вектора компенсации решаем задачу $u_5(z,t) = \overline{u_5}(z,t)$

4.4.
$$\begin{cases} \overline{u_{5tt}} = 0, \ -\infty < z < \infty, t > 0 \\ \overline{u_5}(z,0) = 0, \ -\infty < z < \infty \ \Leftrightarrow u_5(z,t) = \overline{u_5}(z,t) \equiv 0 \\ \overline{u_{5t}}(z,0) = 0, \ -\infty < z < \infty \end{cases} \tag{20}$$

Тогда запишем решение задачи(14)

$$u_3(z,t) = \overline{u_3}(z,t) + u_4(z,t) = \frac{t^5z^3}{60} + \overline{u_4}(z,t) + \overline{u_5}(z,t) = \frac{t^5z^3}{60} + \frac{t^7z}{420}.$$

5.3. Решаем задачу (15) с вектором компенсации t^3y^2z

5.4.
$$\begin{cases} \overline{u_{6tt}} = t^3y^2z, -\infty < y,z < \infty, t > 0 \\ \overline{u_6}(y,z,0) = 0, \ -\infty < y,z < \infty \Leftrightarrow \overline{u_6}(y,z,0) = \frac{t^5y^2z}{20} \\ \overline{u_{6t}}(y,z,0) = 0, \ -\infty < y,z < \infty \end{cases} \tag{21}$$

Подставим (21) в (15), $u_6(y,z,t) = \overline{u_6}(y,z,t) + u_7(y,z,t)$, получим

$$\begin{cases} u_{6tt} = t^3y^2z + u_{6yy} + u_{6zz} \Leftrightarrow t^3y^2z + u_{7tt} = t^3y^2z + \frac{t^5z}{10} + u_{7yy} + u_{7zz} \Leftrightarrow u_{7tt} = \frac{t^5z}{10} + u_{7zz} \\ u_6(y,z,0) = 0 \Leftrightarrow u_7(y,z,0) = 0, \ -\infty < y,z < \infty \\ u_{6t}(y,z,0) = 0 \Leftrightarrow u_{7t}(y,z,0) = 0, \ -\infty < y,z < \infty \end{cases} \tag{22}$$

Из последней системы уравнений (22) видно, что функция $u_7(y,z,t) = \ u_7(z,t)$

6.3. Решаем задачу для функции $\overline{u_7}(z,t), u_7(z,t) = \overline{u_7}(z,t) + u_8(z,t)$ с вектором компенсации $\frac{t^5z}{10}$

6.4.
$$\begin{cases} \overline{u_{7tt}} = \frac{t^5z}{10}, -\infty < z < \infty, t > 0 \\ \overline{u_7}(z,0) = 0, \ -\infty < z < \infty \Leftrightarrow \overline{u_7}(z,t) = \frac{t^7z}{420} \\ \overline{u_{7t}}(z,0) = 0, \ -\infty < z < \infty \end{cases} \tag{22.1}$$

7.3.Система уравнений (23) имеет единственное решение с нулевым вектором компенсации. Для функции $u_8(z,t)$ получим уравнения

7.4.
$$\begin{cases} u_{7tt} = \frac{t^5z}{10} + u_{8tt} = \frac{t^5z}{10} + u_{7zz} = \frac{t^5z}{10} + u_{8zz} \Leftrightarrow u_{8tt} = u_{8zz} \\ u_7(z,0) = 0 \Leftrightarrow u_8(z,0) = 0, \ -\infty < z < \infty \\ u_{7t}(z,0) = 0 \Leftrightarrow u_{8t}(z,0) = 0, \ -\infty < z < \infty \end{cases} \tag{23}$$

$u_8(z,t) \equiv 0$ с нулевым вектором компенсации. Решение задачи(15) имеет вид

$$u_6(y,z,t) = \overline{u_6}(y,z,t) + u_7(y,z,t) = \frac{t^5y^2z}{20} + \overline{u_7}(z,t) + u_8(z,t) = \frac{t^5y^2z}{20} + \frac{t^7z}{420} \tag{24}$$

В силу редукции линейной задачи (13) решение задачи (10) имеет вид

$$u(x,y,z,t) = \overline{u_1}(y,z,t) + u_2(y,z,t) = \frac{t^3y^2z^3}{6} + u_3(z,t) + u_6(y,z,t) = \frac{t^3y^2z^3}{6} + \frac{t^5z^3}{60} + \frac{t^7z}{420} + \frac{t^5y^2z}{20} + \frac{t^7z}{420} =$$
$$= \frac{t^3y^2z^3}{6} + \frac{t^5z^3}{60} + \frac{t^5y^2z}{20} + \frac{t^7z}{210}. \tag{25}$$

Сделаем проверку ответа(25) $u(x,y,z,0) = u_t(x,y,z,0) = 0$. Далее проверим первое уравнение (10)
$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + ty^2z^3 \Leftrightarrow ty^2z^3 + \frac{t^3z^3}{3} + t^3y^2z + \frac{t^5z}{5} = \frac{t^3z^3}{3} + \frac{t^5z}{10} + t^3y^2z + \frac{t^5z}{10} + ty^2z^3 = ty^2z^3 + \frac{t^3z^3}{3} + t^3y^2z + \frac{t^5z}{5}.$
Проверка завершена. Ответ (25) для задачи математической физики (10) точный, с конечным числом слагаемых.

Литература:

1. Пикулин В.П. Практический курс по уравнениям математической физики/ В.П. Пикулин, С.И. Похожаев. – Москва: МЦНМО, 2004. – 208 с. – ISSBN 5-94057-148-4.
2. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Простейшая математическая модель образования фибрина в аневризмах кровеносных капилляров// Евразийское Научное Объединение. – 2021. № 10-1 (80). С. 17-23.
3. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Обобщенная модель открытой каверны для аневризмы кровеносных сосудов// Евразийское Научное Объединение. – 2021. № 8-1 (78). С. 34-38.
4. Волосова Н.К. Нестационарная гидродинамическая задача в открытой прямоугольной каверне// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 3-1 (73). С. 16-21.
5. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. О роли профиля скорости на верхнем отрезке в гидродинамической задаче для прямоугольной каверны// Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 5-1 (63). С. 11-17.
6. Волосова Н.К. Возможные виды течения в закрытой каверне и противоречия в задаче с подвижной крышкой// Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 12-1 (70). С. 4-14.
7. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Вычисление поля давления по полю скорости в гидродинамической задаче для прямоугольной каверны// Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 9-1 (67). С. 1-8.
8. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Модифицированное разностное уравнение К.Н. Волкова для уравнения Пуассона на прямоугольнике с четвертым порядком погрешности// Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 6-1 (52). С. 4-11.
9. Волосова Н.К. О нестационарном уравнении диффузии с полной производной по времени на прямоугольнике// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 1-1 (71). С. 9-14.
10. Волосова Н.К. О решении уравнения Пуассона на прямоугольнике с шестым порядком погрешности за конечное число элементарных операций// Евразийское Научное Объединение. –2020. № 3-1 (61). С. 20-27.
11. Волосова Н.К. О решении уравнения Пуассона на прямоугольнике с четвертым порядком погрешности за конечное число элементарных операций// Евразийское Научное Объединение. –2020. № 2-1 (60). С. 11-17.
12. Волосова Н.К. Конечные методы решения уравнения Пуассона на произвольном прямоугольнике с краевым условием Дирихле// Евразийское Научное Объединение. –2020. № 5-1 (63). С. 17-28.
13. Волосова Н.К. Мягкие краевые условия в гидродинамической задаче для профиля скорости в открытой прямоугольной каверне// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 5-1 (75). С. 9-14.
14. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосова А.К., Зайцев В.Ф. Волосов К.А., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Этап конструирования математической модели аневризмы. Течения в каверне и противоречия в задаче в “закрытой” кювете// В сборнике: Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Материалы 74-й научной конференции “Герценовские чтения 2021”. Санкт-Петербург, 2021. С. 208-213.
15. Волосова Н.К., Пастухов Д.Ф., Волосов К.А. Методы расширения области применения методов математической физики//Международная конференция “Квазилинейные уравнения и обратные задачи”. QIPA conference handbook and proceedings. – М.: МФТИ, 2018. – С 20.
16. Волосов К.А. Одевание решений для некоторых неинтегрируемых задач и некоторые инвариантные свойства анзаца метода Хироты//Дифференциальные уравнения. 2005. Т 41.№ 11.С. 1572-1575.
17. Волосов К.А. О собственных функциях структур, описываемых моделью “мелкой воды” на плоскости// Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12.№ 6. С. 17-32.
18. Волосов К.А. Построение решений квазилинейных параболических уравнений в параметрическом виде// Дифференциальные уравнения, 2007, Т.43, №.4., С.492-497.
19. Волосов К.А. Новый метод построения решений уравнений с частными производными в параметрической форме// Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. 2007. Т.7. № 26. С. 13-20.
20. Волосов К.А. Конструкция решений квазилинейных уравнений с частными производными// Сибирский журнал индустриальной математики 2008, т.11, н.2(34), С. 29-39
21. Вакуленко С.П., Волосова Н.К., Пастухов Д.Ф. Способы передачи QR-кода в стеганографии/ С.П. Вакуленко, Н.К. Волосова, Д.Ф. Пастухов //Мир транспорта. – 2018. Т.16. № 5(78). С. 14-25.
22. Пастухов Д.Ф., Волосова Н.К., Волосова А.К. Некоторые методы передачи QR-кода в стеганографии/ Д.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова, А.К. Волосова //Мир транспорта. – 2019. Т.17. № 3(82). С. 16-39.
23. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Модифицированная формула Ньютона – касательных парабол на комплексной плоскости// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 6-1 (76). С. 21-27.
24. Пастухов Ю.Ф., Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов А.Ю. Теорема о связи чисел Кармайкла с функцией Кармайкла// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 6-1 (76). С. 50-53.

25. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Сперанская О.А. Геометрический подход для качественного поиска конвективных ячеек по температурному полю// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 6-1 (76). С. 21-27.

26. Волосова Н.К. Вычисление производных дробного порядка с высокой степенью точности // Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 11-1 (69). С. 1-9.

27. Волосова Н.К. Вычисление производных дробного порядка, принимающего значения на интервале(0,1), с высокой степенью точности// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 2-1 (72). С. 30-37.

28. Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Волосова Н.К., Волосова К.А., Волосова А.К. Численные методы. Лекции. Численный практикум. Учебное пособие к лекционным и практическим занятиям для студентов специальности 1- 40 01 01 Программное обеспечение информационных технологий 1-98 01 01 Компьютерная безопасность/ Новополоцк. Москва, 2021. (3-е изд., дополненное).

29. Волосова Н.К. Математическая модель динамики образования фибрина в аневризмах кровеносных капилляров// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 12-1 (63). С. 11-17.

30. Пастухов Ю.Ф. Вывод критерия Корсельта чисел Кармайкла из критерия связи чисел Кармайкла с функцией Кармайкла// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 12-1 (63). С. 31-34.