Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Российский университет транспорта

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

Полоцкий государственный университет

Н.К. Волосова, К.А. Волосов, А.К. Волосова,
Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КОМПЕНСАЦИЙ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие для практических занятий по курсу

Уравнения математической физики для студентов специальности

1-98 01 01 Компьютерная безопасность

Москва, Новополоцк
ПГУ,МГТУ,МИИТ

2022

УДК 517.958
ББК 22.193

Рецензенты:
А.А. Козлов, кандидат физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой высшей математики и дифференциальных
уравнений Полоцкого государственного университета

Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.
Метод последовательных функциональных компенсаций в задачах
математической физики// Н.К. Волосова, К.А. Волосов, А.К. Волосова,
Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов/Учебное пособие,- Москва, Новополоцк,
МГТУ, МИИТ, ПГУ. 2022. 10 С.

Материал учебного пособия соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта по математике. В учебном пособии описан алгоритм последовательных функциональных компенсаций для решения некоторого класса задач математической физики. Предназначен студентам программистам (специальность 1-98 01 01 – Компьютерная безопасность).

Для студентов университетов, педагогических вузов, студентов технических вузов, преподавателей, инженеров, программистов использующих в практической деятельности точные методы решения задач математической физики.

УДК 517.958
ББК 22.193

Одобрено и рекомендовано к изданию
методической комиссией факультета информационных технологий
В качестве учебного пособия

Кафедра технологий программирования

Введение

Задачи в курсе Уравнения математической физики можно разделить на группы по методам их решения. Так известны методы функций Грина, метод интегрального преобразования Фурье, метод интегрального преобразования Лапласа, метод подбора частных решений, метод бегущих волн, метод интегрального преобразования Ханкеля[1]. Данное учебное пособие рассматривает новый метод, который авторы назвали методом последовательных функциональных компенсаций. Метод применим для линейных и квазилинейных уравнений в частных производных. В задачах с неоднородными краевыми и начальными условиями необходимо произвольную функцию, которая им удовлетворяет, но не обязательно превращает основное уравнение в тождество (является решением основного уравнения). Данная функция, выполняющая начальное условие и краевые условия задачи является первым слагаемым в ответе. Каждое из последующих слагаемых в функции ответа по отдельности удовлетворяет однородным начальным и краевым условиям задачи. В левую часть уравнения в частных производных записывается старшая производная, относительно которой уравнение линейно (квазилинейно) по одной переменных, например, относительно по t, все остальные слагаемые в правую часть уравнения. Свободные слагаемые в правой части, как правило, полиномиального вида от свободных переменных, не зависящие от неизвестной функции, мы назвали вектором компенсации. Очередное неизвестное-функция ответа с некоторым индексом разбивается на две части – на штрихованную с прежним индексом и функцию с индексом больше на единицу. Оба слагаемых являются однородными по начальным и краевым условиям. Штрихованная функция легко находится простым интегрированием по переменной t необходимое число раз ,например, дважды для волнового уравнения. Переменные вектора компенсации определяют переменные, от которой зависит вторая функция суммы с большим индексом. С увеличением числа итераций алгоритма функции со старшими индексами уменьшают число своих независимых аргументов. На каждой итерации алгоритма уточняется (упрощается) также уравнение в частных производных. Алгоритм завершается на итерации когда очередное слагаемое в функции ответа равно тождественно нулю. Для иллюстрации метода решены два примера с проверкой условий задачи для функций ответа.

Авторы: Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К.,
Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.

УДК 519.6: 517.958

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КОМПЕНСАЦИЙ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Н.К. Волосова (аспирант Московского государственного технического университета МГТУ им. Н.Э. Баумана);

К.А. Волосов, профессор, д.ф. - м.н., А.К. Волосова, к.ф.- м.н. (МИИТ) г. Москва;

к. ф.-м. н., доц. Д.Ф. Пастухов, к. ф.-м. н., доц. Ю.Ф. Пастухов (Полоцкий государственный университет)

Аннотация: *В работе предложен метод последовательных функциональных компенсаций для точных решений задач математической физики. Для использования алгоритма все уравнения и условия линейны или квазилинейны по одной из переменной. Первое слагаемое неизвестной в задаче функции удовлетворяет неоднородным начальным и краевым условиям. Остальные слагаемые решения однородны по начальным и краевым условиям задачи. На каждом этапе алгоритма выбирается вектор компенсации для интегрирования простейшей задачи по линейной переменной. Вектор компенсации определяет переменные, содержащиеся в следующем слагаемом в функции ответа. Найденное слагаемое подставляется в предыдущее уравнение, находится новый вектор компенсации, функционально уточняется новое слагаемое и следующее уравнение в частных производных и т.д. В алгоритме правая часть уравнения, начальные и краевые условия имеют полиномиальный вид. Итерации завершаются, если последняя функция тождественно равна нулю. Решены два примера данным алгоритмом.*

Ключевые слова: *численные методы, уравнения в частных производных, дифференциальные уравнения с частными производными, гидродинамика*

THE METHOD OF SUCCESSIVE FUNCTIONAL COMPENSATION IN PROBLEM OF MATHEMATICAL PHYSICS

N.K. Volosova, K.A. Volosov, A.K. Volosova, D.F. Pastuhov, YU.F. Pastuhov

Описание алгоритма. Пусть уравнения в частных производных являются линейными или квазилинейными относительно старшей производной от неизвестной функции $u(x,y,z,t)$ по одной переменной, например, по t [18],[19],[20],[15]. Отметим также, что начальные и краевые условия задач математической физики, как правило, записаны в линейном виде[1]. Во многих задачах правые части в уравнениях, в краевых и начальных условиях по переменным можно разложить ряд Тейлора с общим центром. Такие функции после локального разложения содержат слагаемые степенного вида, то есть представляют полиномы нескольких переменных. В работе предложен алгоритм функциональных итерационных компенсаций для решения подобных задач. Ранее в работах [1],[8],[9],[10],[11],[12],[26],[27],[28] для тестирования программ получены точные решения задач математической физики. Сегодня точные решения востребованы в сложных численных алгоритмах, например, в гидродинамике [2],[3],[4],[5],[6],[7],[13],[14],[23],[24],[25],[29],[30].

Рассмотрим первый пример – задачу Коши [стр.166,1]-пример 5:

$$\begin{cases} u_{tt} = 8\left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right) + t^2 x^2, \quad t > 0, \quad -\infty < x, y, z < \infty \\ u(x, y, z, 0) = y^2, \qquad -\infty < x, y, z < \infty \\ u_t(x, y, z, 0) = z^2, \qquad -\infty < x, y, z < \infty \end{cases} \tag{1}$$

1.1. Выберем первую функцию $u_1(x, y, z, t)$, которая удовлетворяет начальным условиям задачи (1) $u_1(x, y, z, 0) = y^2, u_{1t}(x, y, z, 0) = z^2$. Тогда

$$u_1(x, y, z, t) = y^2 + tz^2 \tag{2}$$

1.2. Обозначим $u_2(x, y, z, t) = u(x, y, z, t) - u_1(x, y, z, t) \Leftrightarrow u_2(x, y, z, 0) = 0, u_{2t}(x, y, x, 0) = 0.$

Подставим функцию $u(x, y, z, t) = u_1(x, y, z, t) + u_2(x, y, z, t)$ в первое уравнение системы (1)

$$\left(u_1 + u_2\right)_{tt} = 8\left(\left(u_1 + u_2\right)_{xx} + \left(u_1 + u_2\right)_{yy} + \left(u_1 + u_2\right)_{zz}\right) + t^2 x^2 \Leftrightarrow u_{2tt} = 8\left(u_{2xx} + 2 + u_{2yy} + 2t + u_{2zz}\right) + t^2 x^2$$

$$u_{2tt} = 16t + 16 + 8\left(u_{2xx} + u_{2yy} + u_{2zz}\right) + t^2 x^2 \Leftrightarrow u_{2tt} - 16t - 16 - t^2 x^2 - 8u_{2xx} = 8\left(u_{2yy} + u_{2zz}\right) \tag{3}$$

1.3. В алгоритме наступил момент функциональной коррекции. Последнее уравнение(3) представляет уравнение с разделенными переменными. Оно возможно, тогда и только тогда, когда обе части уравнения (3) равны одной и той же константе. Не ограничивая общности, будем считать константу равной нулю. Отсюда же заключаем, что неизвестная функция $u_2(x, y, z, t) = u_2(x, t)$ может зависеть только от двух переменных. Тогда имеем

$$u_2(x, y, z, t) = u_2(x, t), u_{2tt} - 16t - 16 - t^2 x^2 - 8u_{2xx} = 0, u_{2yy} + u_{2zz} = 0.$$

1.4. В алгоритме выполняем шаг итерационных компенсаций. Для уравнения

$$u_{2tt} = 16t + 16 + t^2 x^2 + 8u_{2xx} \tag{4}$$

решаем вспомогательное уравнение, выполнив замену переменных $u_2(x, t) = \overline{u_2}(x, t) + u_3(x, t)$, для новой переменной $\overline{u_2}(x, t)$ потребуем

$$\begin{cases} \overline{u_{2tt}} = 16t + 16 + t^2 x^2 \\ \overline{u_2}(x, 0) = 0 \\ \overline{u_{2t}}(x, 0) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Дважды интегрируем по переменной t задачу(5). Вектор правой части $16t + 16 + t^2 x^2$ назовем ***вектором компенсации***. Имеем

$$\overline{u_2}(x, t) = \frac{8}{3}t^3 + 8t^2 + \frac{t^4}{12}x^2 + C_1 t + C_2, \overline{u_2}(x, 0) = 0, \overline{u_{2t}}(x, 0) = 0 \Leftrightarrow \overline{u_2}(x, t) = \frac{8}{3}t^3 + 8t^2 + \frac{t^4}{12}x^2.$$

Тогда подставим в задачу (4) выражение $u_2(x, t) = \overline{u_2}(x, t) + u_3(x, t) = \frac{8}{3}t^3 + 8t^2 + \frac{t^4}{12}x^2 + u_3(x, t)$ для определения условий к функции $u_3(x, t)$:

$$u_{2tt}=\left(\frac{8}{3}t^3+8t^2+\frac{t^4}{12}x^2+u_3(x,t)\right)_{tt}=16t+16+t^2x^2+u_{3tt}=16t+16+t^2x^2+\frac{8t^4}{6}+8u_{3xx}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_{3tt}=\frac{4}{3}t^4+8u_{3xx} \qquad (6)$$

2.3.Переходим к шагу алгоритма 2.3(функциональной коррекции)

$$u_3(x,t)=\overline{u}_3(x,t)+u_4(x,t)$$

Где ***вектор компенсаций*** $\frac{4}{3}t^4$ зависит только от времени t. Тогда новая функция $u_4(x,t)=u_4(t)$ определяется только переменной нового вектора компенсаций t.

2.4. $$\begin{cases}\overline{u_{3tt}}=\frac{4}{3}t^4\\ \overline{u_3}(x,0)=0\\ \overline{u_{3t}}(x,0)=0\end{cases} \qquad (7)$$

Из задачи Коши (7) получим

$$\overline{u_3}(x,t)=\frac{2}{45}t^6+C_3t+C_4\,,\overline{u_3}(x,0)=0,\overline{u_{3t}}(x,0)=0\Leftrightarrow\overline{u_3}(x,t)=\frac{2}{45}t^6 \qquad (8)$$

Подставим решение (8) в функцию последней замены и в уравнение(6)

$$u_3(x,t)=\overline{u}_3(x,t)+u_4(t)=\frac{2}{45}t^6+u_4(t)$$

$$u_{3tt}=\overline{u}_{3tt}(x,t)+u_{4tt}(t)=\frac{4}{3}t^4+u_{4tt}(t)=\frac{4}{3}t^4+8\left(\overline{u_{3xx}}+u_{4xx}(t)\right)=\frac{4}{3}t^4\Leftrightarrow u_{4tt}(t)=0$$

Дополним последнюю функцию $u_4(t)$ начальными условиями

$$\begin{cases}u_{4tt}(t)=0\\ u_4(0)=0\\ u_{4t}(0)=0\end{cases}\Leftrightarrow u_4(t)\equiv 0 \qquad (9)$$

В итоге имеем $u(x,y,z,t)=u_1(x,y,z,t)+u_2(x,t)=u_1(x,y,z,t)+\overline{u_2}(x,t)+u_3(x,t)=$

$$=u_1(x,y,z,t)+\overline{u_2}(x,t)+\overline{u}_3(x,t)+u_4(t)=y^2+tz^2+\frac{8}{3}t^3+8t^2+\frac{t^4}{12}x^2+\frac{2}{45}t^6 \qquad (10)$$

Выполним проверку ответа (10) к задаче (1) $u(x,y,z,0)=y^2, u_t(x,y,z,0)=z^2$, также

$$u_{tt}=8\left(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}\right)+t^2x^2\Leftrightarrow 16t+16+t^2x^2+\frac{4}{3}t^4=8\left(\frac{t^4}{6}+2+2t\right)+t^2x^2=\frac{4}{3}t^4+16+16t+t^2x^2.$$

Алгоритм метода компенсаций завершается на шаге, когда последняя функция в замене переменных, в данном примере $u_4(t)\equiv 0$, тождественно равна нулю.

Для большей наглядности действия функциональной коррекции алгоритма рассмотрим пример 2 (задачу Коши).

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + ty^2z^3, \quad t > 0, \ -\infty < x, y, z < \infty \\ u(x, y, x, 0) = 0, \qquad -\infty < x, y, z < \infty \\ u_t(x, y, x, 0) = 0, \qquad -\infty < x, y, z < \infty \end{cases} \tag{11}$$

Так как краевые условия отсутствуют, а начальные условия однородные переходим к пункту алгоритма

1.3. Вектор компенсации ty^2z^3 зависит от трех переменных t,y,z. От этих же переменных будет зависеть первое и остальные слагаемые нашей неизвестной функции $u(x, y, z, t) = \overline{u_1}(y, z, t) + u_2(y, z, t)$, где функция $\overline{u_1}(y, z, t)$ удовлетворяет элементарной задаче (12)

1.4. $$\begin{cases} \overline{u_{1tt}} = ty^2z^3, \quad t > 0, \ -\infty < y, z < \infty \\ \overline{u_1}(y, z, 0) = 0, \qquad -\infty < y, z < \infty \\ \overline{u_{1t}}(y, z, 0) = 0, \qquad -\infty < y, z < \infty \end{cases} \tag{12}$$

Решение(12) имеет вид $\overline{u_1}(y, z, t) = \dfrac{t^3y^2z^3}{6} + C_1t + C_2 = \dfrac{t^3y^2z^3}{6}$ (13)

Подставим (13) в (11), $u(y, z, t) = \overline{u_1}(y, z, t) + u_2(y, z, t)$, получим

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + ty^2z^3 \Leftrightarrow \overline{u_{1tt}} + u_{2tt} = ty^2z^3 + u_{2tt} = \overline{u_{1yy}} + \overline{u_{1zz}} + u_{2yy} + u_{2zz} + ty^2z^3 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u_{2tt} = \dfrac{t^3z^3}{3} + t^3y^2z + u_{2yy} + u_{2zz}, \ -\infty < y, z < \infty, t > 0 \\ u_2(y, z, 0) = 0, \qquad -\infty < y, z < \infty \\ u_{2t}(y, z, 0) = 0, \qquad -\infty < y, z < \infty \end{cases} \tag{14}$$

2.3. Вектор компенсации $\dfrac{t^3z^3}{3} + t^3y^2z$ зависит от трех переменных t,y,z. Упростим дальнейшее решение задачи, используя линейность исходной задачи(14). Рассмотрим параллельно 2 задачи $u_2(y, z, t) = u_3(z, t) + u_6(y, z, t)$, где

2.4. $$\begin{cases} u_{3tt} = \dfrac{t^3z^3}{3} + u_{3zz}, \ -\infty < z < \infty, t > 0 \\ u_3(z, 0) = 0, \qquad -\infty < z < \infty \\ u_{3t}(z, 0) = 0, \qquad -\infty < z < \infty \end{cases} \tag{15}$$

с вектором компенсации $\dfrac{t^3z^3}{3}$. В результате чего функция $u_3(z, t)$ зависит от двух переменных z,t, а в задаче(16)

$$\begin{cases} u_{6tt} = t^3y^2z + u_{6yy} + u_{6zz}, \ -\infty < y, z < \infty, t > 0 \\ u_6(y, z, 0) = 0, \qquad -\infty < y, z < \infty \\ u_{6t}(y, z, 0) = 0, \qquad -\infty < y, z < \infty \end{cases} \tag{16}$$

Вектор компенсации равен t^3y^2z. Решаем задачу(15), $u_3(z, t) = \overline{u_3}(z, t) + u_4(z, t)$

$$\begin{cases} \overline{u_{3tt}} = \dfrac{t^3 z^3}{3}, -\infty < z < \infty,\ t > 0 \\ \overline{u_3}(z,0) = 0, \qquad -\infty < z < \infty \quad \Leftrightarrow \overline{u_3}(z,t) = \dfrac{t^5 z^3}{60} \\ \overline{u_{3t}}(z,0) = 0, \qquad -\infty < z < \infty \end{cases} \tag{17}$$

Подставим решение (17) в задачу (15), $u_3(z,t) = \overline{u_3}(z,t) + u_4(z,t)$, получим

$$\begin{cases} u_{3tt} = \overline{u_{3tt}}(z,t) + u_{4tt}(z,t) = \dfrac{t^3 z^3}{3} + u_{4tt} = \dfrac{t^3 z^3}{3} + \dfrac{t^5 z}{10} + u_{4zz} \Leftrightarrow u_{4tt} = \dfrac{t^5 z}{10} + u_{4zz} \\ u_4(z,0) = 0, \qquad -\infty < z < \infty \\ u_{4t}(z,0) = 0, \qquad -\infty < z < \infty \end{cases} \tag{18}$$

3.3. Вектор компенсации $\dfrac{t^5 z}{10}$ в задаче(18) зависит от двух переменных t, z. Введем новую переменную $u_4(z,t) = \overline{u_4}(z,t) + u_5(z,t)$, где

3.4. $$\begin{cases} \overline{u_{4tt}} = \dfrac{t^5 z}{10}, -\infty < z < \infty, t > 0 \\ \overline{u_4}(z,0) = 0, \qquad -\infty < z < \infty \Leftrightarrow \overline{u_4}(z,t) = \dfrac{t^7 z}{420} \\ \overline{u_{4t}}(z,0) = 0, \qquad -\infty < z < \infty \end{cases} \tag{19}$$

После подстановки(19) в (18) с учетом $u_4(z,t) = \overline{u_4}(z,t) + u_5(z,t)$ получим

$$\begin{cases} u_{4tt} = \dfrac{t^5 z}{10} + u_{4zz} \Leftrightarrow u_{5tt} + \dfrac{t^5 z}{10} = \dfrac{t^5 z}{10} + u_{5zz} \Leftrightarrow u_{5tt} = u_{5zz} \\ u_5(z,0) = 0, \qquad -\infty < z < \infty \\ u_{5t}(z,0) = 0, \qquad -\infty < z < \infty \end{cases} \tag{20}$$

4.3. Для нулевого вектора компенсации решаем задачу $u_5(z,t) = \overline{u_5}(z,t)$

4.4. $$\begin{cases} \overline{u_{5tt}} = 0, \qquad -\infty < z < \infty, t > 0 \\ \overline{u_5}(z,0) = 0, \qquad -\infty < z < \infty \quad \Leftrightarrow u_5(z,t) = \overline{u_5}(z,t) \equiv 0 \\ \overline{u_{5t}}(z,0) = 0, \qquad -\infty < z < \infty \end{cases}$$

(21) Тогда запишем решение задачи(14)

$$u_3(z,t) = \overline{u_3}(z,t) + u_4(z,t) = \frac{t^5 z^3}{60} + \overline{u_4}(z,t) + \overline{u_5}(z,t) = \frac{t^5 z^3}{60} + \frac{t^7 z}{420}.$$

5.3. Решаем задачу(16) с вектором компенсации $t^3 y^2 z$

5.4. $$\begin{cases} \overline{u_{6tt}} = t^3 y^2 z, -\infty < y, z < \infty, t > 0 \\ \overline{u_6}(y,z,0) = 0, \qquad -\infty < y, z < \infty \Leftrightarrow \overline{u_6}(y,z,0) = \dfrac{t^5 y^2 z}{20} \\ \overline{u_{6t}}(y,z,0) = 0, \qquad -\infty < y, z < \infty \end{cases} \tag{22}$$

Подставим (21) в (15), $u_6(y,z,t) = \overline{u_6}(y,z,t) + u_7(y,z,t)$, получим

$$\begin{cases} u_{6tt}=t^3y^2z+u_{6yy}+u_{6zz}\Leftrightarrow t^3y^2z+u_{7tt}=t^3y^2z+\dfrac{t^5z}{10}+u_{7yy}+u_{7zz}\Leftrightarrow u_{7tt}=\dfrac{t^5z}{10}+u_{7zz} \\ u_6(y,z,0)=0\Leftrightarrow u_7(y,z,0)=0, \quad -\infty<y,z<\infty \\ u_{6t}(y,z,0)=0\Leftrightarrow u_{7t}(y,z,0)=0, \quad -\infty<y,z<\infty \end{cases} \tag{23}$$

Из последней системы уравнений(23) видно, что функция $u_7(y,z,t)=u_7(z,t)$

6.3. Решаем задачу для функции $\overline{u_7}(z,t)$, $u_7(z,t)=\overline{u_7}(z,t)+u_8(z,t)$ с вектором компенсации $\dfrac{t^5z}{10}$

6.4. $$\begin{cases} \overline{u_{7tt}}=\dfrac{t^5z}{10}, -\infty<z<\infty, t>0 \\ \overline{u_7}(z,0)=0, \quad -\infty<z<\infty \Leftrightarrow \overline{u_7}(z,t)=\dfrac{t^7z}{420} \\ \overline{u_{7t}}(z,0)=0, \quad -\infty<z<\infty \end{cases} \tag{24}$$

7.3.Система уравнений (24) имеет единственное решение с нулевым вектором компенсации. Для функции $u_8(z,t)$ получим уравнения

7.4. $$\begin{cases} u_{7tt}=\dfrac{t^5z}{10}+u_{8tt}=\dfrac{t^5z}{10}+u_{7zz}=\dfrac{t^5z}{10}+u_{8zz}\Leftrightarrow u_{8tt}=u_{8zz} \\ u_7(z,0)=0\Leftrightarrow u_8(z,0)=0, \quad -\infty<z<\infty \\ u_{7t}(z,0)=0\Leftrightarrow u_{8t}(z,0)=0, \quad -\infty<z<\infty \end{cases} \tag{25}$$

$u_8(z,t)\equiv 0$ с нулевым вектором компенсации. Решение задачи(16) имеет вид

$$u_6(y,z,t)=\overline{u_6}(y,z,t)+u_7(y,z,t)=\frac{t^5y^2z}{20}+\overline{u_7}(z,t)+u_8(z,t)=\frac{t^5y^2z}{20}+\frac{t^7z}{420} \tag{26}$$

В силу редукции линейной задачи(14) решение задачи(11) имеет вид

$$u(x,y,z,t)=\overline{u_1}(y,z,t)+u_2(y,z,t)=\frac{t^3y^2z^3}{6}+u_3(z,t)+u_6(y,z,t)=\frac{t^3y^2z^3}{6}+\frac{t^5z^3}{60}+\frac{t^7z}{420}+\frac{t^5y^2z}{20}+\frac{t^7z}{420}=$$

$$=\frac{t^3y^2z^3}{6}+\frac{t^5z^3}{60}+\frac{t^5y^2z}{20}+\frac{t^7z}{210}. \tag{27}$$

Сделаем проверку ответа(27) $u(x,y,z,0)=u_t(x,y,z,0)=0$. Далее проверим первое уравнение(11)

$$u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+ty^2z^3\Leftrightarrow ty^2z^3+\frac{t^3z^3}{3}+t^3y^2z+\frac{t^5z}{5}=\frac{t^3z^3}{3}+\frac{t^5z}{10}+t^3y^2z+\frac{t^5z}{10}+ty^2z^3=$$

$=ty^2z^3+\dfrac{t^3z^3}{3}+t^3y^2z+\dfrac{t^5z}{5}$. Проверка завершена. Ответ (27) для задачи математической физики (11) точный, с конечным числом слагаемых.

Литература

1. Пикулин В.П. Практический курс по уравнениям математической физики/ В.П. Пикулин, С.И. Похожаев. – Москва: МЦНМО, 2004. – 208 с. – ISSBN 5-94057-148-4.
2. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Простейшая математическая модель образования

фибрина в аневризмах кровеносных капилляров// Евразийское Научное Объединение. – 2021. № 10-1 (80). С. 17-23.
3. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Обобщенная модель открытой каверны для аневризмы кровеносных сосудов// Евразийское Научное Объединение. – 2021. № 8-1 (78). С. 34-38.
4. Волосова Н.К. Нестационарная гидродинамическая задача в открытой прямоугольной каверне// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 3-1 (73). С. 16-21.
5. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. О роли профиля скорости на верхнем отрезке в гидродинамической задаче для прямоугольной каверны// Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 5-1 (63). С. 11-17.
6. Волосова Н.К. Возможные виды течения в закрытой каверне и противоречия в задаче с подвижной крышкой// Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 12-1 (70). С. 4-14.
7. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Вычисление поля давления по полю скорости в гидродинамической задаче для прямоугольной каверны// Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 9-1 (67). С. 1-8.
8. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Модифицированное разностное уравнение К.Н. Волкова для уравнения Пуассона на прямоугольнике с четвертым порядком погрешности// Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 6-1 (52). С. 4-11.
9. Волосова Н.К. О нестационарном уравнении диффузии с полной производной по времени на прямоугольнике// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 1-1 (71). С. 9-14.
10. Волосова Н.К. О решении уравнения Пуассона на прямоугольнике с шестым порядком погрешности за конечное число элементарных операций// Евразийское Научное Объединение. –2020. № 3-1 (61). С. 20-27.
11. Волосова Н.К. О решении уравнения Пуассона на прямоугольнике с четвертым порядком погрешности за конечное число элементарных операций// Евразийское Научное Объединение. –2020. № 2-1 (60). С. 11-17.
12. Волосова Н.К. Конечные методы решения уравнения Пуассона на произвольном прямоугольнике с краевым условием Дирихле// Евразийское Научное Объединение. –2020. № 5-1 (63). С. 17-28.

13. Волосова Н.К. Мягкие краевые условия в гидродинамической задаче для профиля скорости в открытой прямоугольной каверне// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 5-1 (75). С. 9-14.

14. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосова А.К., Зайцев В.Ф. Волосов К.А., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Этап конструирования математической модели аневризмы. Течения в каверне и противоречия в задаче в “закрытой” кювете// В сборнике: Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Материалы 74-й научной конференции “Герценовские чтения 2021”. Санкт-Петербург, 2021. С. 208-213.

15. Волосова Н.К., Пастухов Д.Ф., Волосов К.А. Методы расширения области применения методов математической физики//Международная конференция “Квазилинейные уравнения и обратные задачи”. QIPA conference handbook and proceedings. – М.: МФТИ, 2018. – С 20.
16. Волосов К.А. Одевание решений для некоторых неинтегрируемых задач и некоторые инвариантные свойства анзаца метода Хироты//Дифференциальные уравнения. 2005. Т 41.№ 11.С. 1572-1575.
17. Волосов К.А. О собственных функциях структур, описываемых моделью “мелкой воды” на плоскости// Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12.№ 6. С. 17-32.
18. Волосов К.А. Построение решений квазилинейных параболических уравнений в параметрическом виде// Дифференциальные уравнения, 2007, Т.43, №.4., С.492-497.
19. Волосов К.А. Новый метод построения решений уравнений с частными производными в параметрической форме// Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. 2007. Т.7. № 26. С. 13-20.
20. Волосов К.А. Конструкция решений квазилинейных уравнений с частными производными// Сибирский журнал индустриальной математики 2008, т.11, н.2(34), С. 29-39
21. Вакуленко С.П., Волосова Н.К., Пастухов Д.Ф. Способы передачи QR-кода в стеганографии/ С.П. Вакуленко, Н.К. Волосова, Д.Ф. Пастухов //Мир транспорта. – 2018. Т.16. № 5(78). С. 14-25.
22. Пастухов Д.Ф., Волосова Н.К., Волосова А.К. Некоторые методы передачи QR-кода в стеганографии/ Д.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова, А.К. Волосова //Мир транспорта. – 2019. Т.17. № 3(82). С. 16-39.
23. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Модифицированная формула Ньютона – касательных парабол на комплексной плоскости// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 6-1 (76). С. 21-27.

24. Пастухов Ю.Ф., Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов А.Ю. Теорема о связи чисел Кармайкла с функцией Кармайкла// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 6-1 (76). С. 50-53.

25. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Сперанская О.А. Геометрический подход для качественного поиска конвективных ячеек по температурному полю// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 6-1 (76). С. 21-27.

26. Волосова Н.К. Вычисление производных дробного порядка с высокой степенью точности // Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 11-1 (69). С. 1-9.

27. Волосова Н.К. Вычисление производных дробного порядка, принимающего значения на интервале(0,1), с высокой степенью точности// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 2-1 (72). С. 30-37.

28. Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Волосова Н.К., Волосова К.А., Волосова А.К. Численные методы. Лекции. Численный практикум. Учебное пособие к лекционным и практическим занятиям для студентов специальности 1- 40 01 01 Программное обеспечение информационных технологий 1-98 01 01 Компьютерная безопасность/ Новополоцк. Москва, 2021. (3-е изд., дополненное).

29. Волосова Н.К. Математическая модель динамики образования фибрина в аневризмах кровеносных капилляров// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 12-1 (63). С. 11-17.

30. Пастухов Ю.Ф. Вывод критерия Корсельта чисел Кармайкла из критерия связи чисел Кармайкла с функцией Кармайкла// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 12-1 (63). С. 31-34.