Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Материалы Всероссийской конференции
с международным участием
«Теория управления и математическое моделирование»,
посвященной памяти
профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова

Ижевск, Россия
15–19 июня 2020 г.

Ижевск
2020

УДК 517.9 (О63)
ББК 22.161.6я431, 22.161.8я431, 22.19я431, 22.181я431
Т338

Т338 Теория управления и математическое моделирование: Материалы Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова (Ижевск, Россия, 15–19 июня 2020 г.). — Ижевск: Издательский центр «Удмуртский университет», 2020. — 370 с.

ISBN 978–5–4312–0790–7

В сборнике анонсируются результаты исследований по теории дифференциальных уравнений, математической теории управления, математическому моделированию, общей топологии. Представлены следующие научные направления: теория устойчивости, теория управления, функционально-дифференциальные уравнения, управление динамическими системами в условиях конфликта и неопределенности, задачи оценивания и идентификации в динамических системах, обратные задачи, краевые задачи, численные алгоритмы решения задач оптимального управления, краевых задач, математическое моделирование в механике сплошной среды, математическое моделирование в механике жидкости и газа, математическое моделирование в экономике, общая топология.

УДК 517.9
ББК 22.161.6, 22.161.8, 22.19

ISBN 978–5–4312–0790–7

О равномерной глобальной достижимости линейных управляемых периодических систем с дискретным временем

А. А. Козлов, **К. Д. Калита**

Новополоцк, Полоцкий государственный университет

e-mail: kozlovaa@tut.by, KalitaKD@yandex.ru

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово векторное пространство с нормой $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ (здесь символ T означает операцию транспонирования матрицы или вектора); M_{mn} — пространство вещественных матриц размерности $m \times n$ со спектральной (операторной) нормой $\|H\| = \max_{\|x\|=1} \|Hx\|$, т.е. нормой, индуцируемой на M_{mn} евклидовой нормой в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$; $\mathrm{M}_n = \mathrm{M}_{nn}$. Обозначим через $E \in \mathrm{M}_n$ единичную матрицу. Под отрезком $[t_0, t_1]$, где $t_0, t_1 \in \mathbb{Z}, t_0 < t_1$, будем понимать множество целочисленных точек $t_0, t_0 + 1, \ldots, t_1$.

Для линейной однородной дискретной системы

$$x(t+1) = A(t)x(t), \quad t \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

обозначим через $X(t, \tau), t \geqslant \tau$, ее матрицу Коши [1]:

$$X(t,\tau) = \begin{cases} A(t-1) \cdot \ldots \cdot A(\tau), & t > \tau, \\ E, & t = \tau. \end{cases}$$

Если $\det A(t) \neq 0$ для всех $t \in \mathbb{Z}$, то матрица Коши $X(t, \tau)$ обратима при всех $t \geqslant \tau$. В таком случае, положим $X(\tau, t) := X^{-1}(t, \tau), t > \tau$.

Рассмотрим линейную управляемую дискретную систему с ω-периодическими коэффициентами

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in \mathbb{Z},\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ \omega \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Для $t > \tau$ построим матрицу

$$W_1(t,\tau) = \sum_{s=\tau}^{t-1} X(t, s+1)B(s)B^T(s)X^T(t, s+1).$$

Определение 1 [2]. Система (2) называется *ϑ-равномерно вполне управляемой* ($\vartheta \in \mathbb{N}$), если существуют такие числа $\alpha_i = \alpha_i(\vartheta) > 0, i = \overline{1,4}$, что для каждого $\tau \in \mathbb{Z}$ и для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливы следующие неравенства:

$$\xi^T W_1(\tau+\vartheta,\tau)\xi > 0,$$
$$\alpha_1\|\xi\|^2 \leqslant {W_1}^{-1}(\tau+\vartheta,\tau) \leqslant \alpha_2\|\xi\|^2,$$
$$\alpha_3\|\xi\|^2 \leqslant X^T(\tau+\vartheta,\tau)W_1^{-1}(\tau+\vartheta,\tau)X(\tau+\vartheta,\tau) \leqslant \alpha_4\|\xi\|^2.$$

Система (2) называется *равномерно вполне управляемой*, если существует такое $\vartheta \in \mathbb{N}$, что система (2) ϑ-равномерно вполне управляема.

Замыкая систему (2) линейной обратной связью $u = U(t)x$, где U — ограниченная $m \times n$-матрица, получаем однородную систему

$$x(t+1) = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Пусть $X_U(t,\tau)$ — матрица Коши системы (3) с управлением $U(\cdot)$.

Определение 2. Система (3) обладает свойством *равномерной глобальной достижимости*, если найдется число $T \in \mathbb{N}$, для которого при любых $r > 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$ существует такая величина $\theta = \theta(r,\rho) > 0$, что для произвольной матрицы $H \in \mathrm{M}_n, \|H - E\| \leqslant r, \det H \geqslant \rho$ и любого $t_0 \in \mathbb{Z}$ существует ограниченное управление $U\colon [t_0, t_0+T] \to \mathrm{M}_n$, удовлетворяющее при каждом $t \in [t_0, t_0+T]$ условию $\|U(t)\| \leqslant \theta(r,\rho)$, при котором для матрицы Коши $X_U(t,s)$ системы (3) выполняется равенство $X_U(t_0+T, t_0) = H$.

Теорема. *Периодическая дискретная система (2) равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда соответствующая ей замкнутая система (3) обладает свойством равномерной глобальной достижимости.*

Аналогичный результат для систем с непрерывным временем опубликован в [3].

1. *Гайшун И.В.* Системы с дискретным временем. Минск: Институт Математики НАН Беларуси, 2001.

2. *Зайцев В.А., Попова С.Н., Тонков Е.Л.* О свойстве равномерной полной управляемости линейной управляемой системы с дискретным временем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 4. С. 53–63.

3. *Козлов А.А.* Критерий равномерной глобальной достижимости периодических систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. № 2 (в печати).