

Министерство науки и образования Российской Федерации
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
Российский университет транспорта

Министерство образования Республики Беларусь
Полоцкий государственный университет

ВОЛОСОВА Н.К. (Московский государственный технический
университет им. Н.Э. Баумана – Национальный исследовательский
университет)
ВОЛОСОВ К.А., ВОЛОСОВА А.К. (Российский университет транспорта)
ПАСТУХОВ Д.Ф., ПАСТУХОВ Ю.Ф. (Полоцкий университет)

НЕКОТОРЫЕ КОНЕЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ
ПУАССОНА НА ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ С ШЕСТЫМ ПОРЯДКОМ
ПОГРЕШНОСТИ

Учебное пособие к лекционным и практическим занятиям
для студентов специальности

1-98 01 01 Компьютерная безопасность
1-40 01 01 Программное обеспечение информационных технологий

Москва

2022

УДК 519.6:517.958

Рецензенты:

А.А. Козлов, кандидат физико-математических наук, доцент,
Заведующий кафедрой высшей математики и
дифференциальных уравнений Полоцкого государственного
университета

**Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К.,
Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.**

**Некоторые конечные методы решения уравнения Пуассона
на прямоугольнике с шестым порядком погрешности:**

Учебное пособие: Москва. 2022.-33с.

Рассмотрены два алгоритма решения уравнения Пуассона на прямоугольнике с шестым порядком погрешности за конечное число элементарных операций, то есть методом прогонки в блочной форме [1, стр. 585]. В литературе известен конечный алгоритм решения уравнения Пуассона методом блочной прогонки по строкам [1]. В данной работе впервые рассмотрен конечный алгоритм блочной прогонки по столбцам для решения уравнения Пуассона. Разностное уравнение Пуассона с постоянными элементами матриц прогонки можно обобщить на случай переменных элементов, которые зависят от координат или скоростей точек среды в уравнениях гидродинамики. Программы к каждому алгоритму написаны на языке FORTRAN, их можно использовать как ядро в других программах.

Для студентов университетов, педагогических вузов, студентов технических вузов, преподавателей, инженеров, программистов, использующих в своей практической деятельности численные методы решения уравнений в частных производных.

УДК 519.6:517.958

© Оформление УО «Полоцкий государственный университет», 2022

Оглавление

Введение	4
1. Алгоритм решения уравнения Пуассона методом блочной прогонки для столбцов неизвестной матрицы решения.	5
2. Алгоритм решения уравнения Пуассона методом блочной прогонки для строк неизвестной матрицы решения.	17
3. Литература	28

ВВЕДЕНИЕ

Первый алгоритм в данном учебном пособии получен впервые в научной литературе. Алгоритм численного уравнения Пуассона на прямоугольнике с краевым условием Дирихле методом прогонки столбцов матрицы решения за конечное число элементарных операций с шестым порядком погрешности. Алгоритм обобщен на случай трех различных трехдиагональных матриц прогонки в разностном уравнении. В литературе известен алгоритм решения задачи с помощью прогонки строк неизвестной матрицы. Иногда в задачах механики и гидродинамики в методе прогонки необходимо использовать квадратные матрицы минимального порядка по строкам и столбцам прямоугольной матрицы решения по двум причинам. Во-первых, минимальные матрицы уменьшают время решения задачи методом прогонки. Во-вторых, элементы матриц могут зависеть от скорости и координат частиц среды, в этом случае использование квадратных матриц максимального порядка невозможно. Численно подтвержден шестой порядок погрешности алгоритма, написана программа.

Второй алгоритм прогонки по строкам матрицы решения более известен. Алгоритм решения общей неоднородной краевой задачи Дирихле для уравнения Пуассона на прямоугольнике рассмотрен с шестым порядком погрешности и с минимальным 9 точечным шаблоном на равномерной сетке. Получен метод прогонки в матричной форме за конечное число арифметических действий для достаточно гладкой аналитической правой части. Аналитическое решение сравнено с численным решением, подтверждающим шестой алгебраический порядок погрешности формул полученного алгоритма.

Авторы использовали материал из данного пособия для проведения лекционных и практических занятий по курсу Численные методы для студентов специальности 1-40 01 01 Программное обеспечение информационных технологий, по курсу Уравнения математической физики для студентов специальности 1-98 01 01 Компьютерная безопасность. Все программы к алгоритмам в пособии написаны на языке FORTRAN[3,4,5]. То есть на языке, предназначенном исключительно для математических расчетов. Нумерация формул в каждом из полученных алгоритмов ведется независимо.

Отметим, что в работах [7], [8], [9], [10], [11], [12], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [28], [29], [34] был использован второй алгоритм блочной прогонки строк неизвестной матрицы для решения уравнения Пуассона, а также учитывались полученные результаты авторов в работах [12], [13], [14], [24], [26], [27], [31], [32], [33], [35].

Литература

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы/Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – 7-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011.- 636 с.: ил. – (Классический университетский учебник).
2. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях: учебное пособие. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 240 с.
3. Бартенев О.В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL: Ч.1. – М.: ДИАЛОГ – МИФИ, 2001. – 448 с.
4. Бартенев О.В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL: Ч.2. – М.: ДИАЛОГ – МИФИ, 2001. – 319 с.
5. Бартенев О.В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL: Ч.3. – М.: ДИАЛОГ – МИФИ, 2001. – 368 с.
6. Волосова Н.К. О решении уравнения Пуассона на прямоугольнике с шестым порядком погрешности за конечное число элементарных операций// Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 3-1 (61). С. 20-27.
7. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Модифицированное разностное уравнение К.Н. Волкова для уравнения Пуассона на прямоугольнике с четвертым порядком погрешности// Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 6-1 (52). С. 4-11.
8. Волосова Н.К. О решении уравнения Пуассона на прямоугольнике с четвертым порядком погрешности за конечное число элементарных операций// Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 2-1 (60). С. 11-17.
9. Волосова Н.К., Пастухов Д.Ф., Волосов К.А. Методы расширения области применения методов математической физики// Международная конференция “Квазилинейные уравнения и обратные задачи”. QIPR conference handbook and proceedings. – М.: МФТИ, 2018. – С 20.
10. Волосова Н.К. Конечные методы решения уравнения Пуассона на произвольном прямоугольнике с краевым условием Дирихле// Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 5-1 (63). С. 17-28.

11. Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Волосова Н.К., Волосова К.А., Волосова А.К. Численные методы. Лекции. Численный практикум/ Учебное пособие. Новополюцк. Москва, 2021. (3-е издание, дополненное). 237 С.
12. Некоторые методы уравнения теплопроводности в параллелепипеде, полученные методом быстрых разложений/А.Д. Чернышев, В.В. Горяинов, С.В. Кузнецов, О.Ю. Никифорова// Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 07-09 декабря 2020 года/ФБГОУ ВО “Воронежский государственный университет”. – Воронеж: Научно-исследовательские публикации, 2021. – С. 1461-1473.
13. Применение быстрых разложений для построения точных решений задачи о прогибе прямоугольной мембраны под действием переменной нагрузки/ А.Д. Чернышев, В.В. Горяинов, С.В. Кузнецов, О.Ю. Никифорова//Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2021. №70. – С. 127-142. DOI 10.17223/19988621/70/11.
14. Пикулин В.П. Практический курс по уравнениям математической физики/ В.П. Пикулин, С.И. Похожаев. – Москва: МЦНМО, 2004. – 208 с. – ISSN 5-94057-148-4.
15. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Простейшая математическая модель образования фибрина в аневризмах кровеносных капилляров// Евразийское Научное Объединение. – 2021. № 10-1 (80). С. 17-23.
16. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Обобщенная модель открытой каверны для аневризмы кровеносных сосудов// Евразийское Научное Объединение. – 2021. № 8-1 (78). С. 34-38.
17. Волосова Н.К. Нестационарная гидродинамическая задача в открытой прямоугольной каверне// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 3-1 (73). С. 16-21.
18. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. О роли профиля скорости на верхнем отрезке в гидродинамической задаче для прямоугольной каверны// Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 5-1 (63). С. 11-17.
19. Волосова Н.К. Возможные виды течения в закрытой каверне и противоречия в задаче с подвижной крышкой// Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 12-1 (70). С. 4-14.
20. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Вычисление поля давления по полю скорости в гидродинамической задаче для прямоугольной каверны// Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 9-1 (67). С. 1-8.

21. Волосова Н.К. О нестационарном уравнении диффузии с полной производной по времени на прямоугольнике// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 1-1 (71). С. 9-14.
22. Волосова Н.К. Мягкие краевые условия в гидродинамической задаче для профиля скорости в открытой прямоугольной каверне// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 5-1 (75). С. 9-14.
23. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосова А.К., Зайцев В.Ф. Волосов К.А., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Этап конструирования математической модели аневризмы. Течения в каверне и противоречия в задаче в “закрытой” кювете// В сборнике: Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Материалы 74-й научной конференции “Герценовские чтения 2021”. Санкт-Петербург, 2021. С. 208-213.
24. Волосов К.А. Одевание решений для некоторых неинтегрируемых задач и некоторые инвариантные свойства анзаца метода Хироты//Дифференциальные уравнения. 2005. Т 41.№ 11.С. 1572-1575.
25. Волосов К.А. Одевание решений для некоторых неинтегрируемых задач и некоторые инвариантные свойства анзаца метода Хироты//Дифференциальные уравнения. 2005. Т 41.№ 11.С. 1572-1575.
26. Волосов К.А. Построение решений квазилинейных параболических уравнений в параметрическом виде// Дифференциальные уравнения, 2007, Т.43, №.4., С.492-497.
27. Волосов К.А. Новый метод построения решений уравнений с частными производными в параметрической форме// Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. 2007. Т.7. № 26. С. 13-20.
28. Волосов К.А. Конструкция решений квазилинейных уравнений с частными производными// Сибирский журнал индустриальной математики 2008, т.11, н.2(34), С. 29-39
29. Вакуленко С.П., Волосова Н.К., Пастухов Д.Ф. Способы передачи QR-кода в стеганографии/ С.П. Вакуленко, Н.К. Волосова, Д.Ф. Пастухов //Мир транспорта. – 2018. Т.16. № 5(78). С. 14-25.
30. Пастухов Д.Ф., Волосова Н.К., Волосова А.К. Некоторые методы передачи QR-кода в стеганографии/ Д.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова, А.К. Волосова //Мир транспорта. – 2019. Т.17. № 3(82). С. 16-39.
31. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Модифицированная формула Ньютона – касательных парабол на комплексной плоскости// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 6-1 (76). С. 21-27.

32. Пастухов Ю.Ф., Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов А.Ю. Теорема о связи чисел Кармайкла с функцией Кармайкла// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 6-1 (76). С. 50-53.
33. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Сперанская О.А. Геометрический подход для качественного поиска конвективных ячеек по температурному полю// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 6-1 (76). С. 21-27.
34. Волосова Н.К. Вычисление производных дробного порядка с высокой степенью точности // Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 11-1 (69). С. 1-9.
1. Волосова Н.К. Вычисление производных дробного порядка, принимающего значения на интервале(0,1), с высокой степенью точности// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 2-1 (72). С. 30-37.
 2. Волосова Н.К. Математическая модель динамики образования фибрина в аневризмах кровеносных капилляров// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 12-1 (63). С. 11-17.
 3. Метод последовательных функциональных компенсаций в задачах математической физики: Учебное пособие для практических занятий по курсу Уравнения математической физики/ Волосова Н.К., Волосова К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. – Москва: Полоцкий государственный университет, 2022. – 32 С.

УДК 519.6:517.958

Наталья Константиновна Волосова
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Волосов Константин Александрович, Волосова Александра Константиновна
(Российский университет транспорта)

Дмитрий Феликсович Пастухов, Юрий Феликсович Пастухов
(Полоцкий университет)

НЕКОТОРЫЕ КОНЕЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ
ПУАССОНА НА ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ С ШЕСТЫМ ПОРЯДКОМ
ПОГРЕШНОСТИ

2022