

## РАЦИОНАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

*Е.Р. БИБИЛО, И.П. МАРТЫНОВ*

This article is devoted to the irrational solutions of the nonlinear differential equations and systems construction. The constructed two-parameter rational solutions meet the negative (different from -1) resonances of the equation

Ключевые слова: резонансы, рациональное решение

В работе [1] авторы говорят о том, что отрицательные резонансы до сих пор все еще полностью не поняты и на современном этапе представляют большой интерес, однако в работе [2] приведена формула, которая позволяет построить рациональные решения дифференциальных уравнений по отрицательным резонансам.

Рассмотрим применение формулы для нахождения рациональных решений нелинейных дифференциальных уравнений и систем на примере дифференциального уравнения

$$w'w''' = \frac{2}{3}w''^2 + \frac{1}{3}ww'w'' + 3w'^3 - \frac{1}{3}w^2w'^2 \quad (1)$$

и системы дифференциальных уравнений

$$x' = -x^2 - 3xy - 3xz, \quad y' = xy + 3y^2 + 2yz, \quad z' = xz + z^2. \quad (2)$$

Дифференциальному уравнению (1) соответствуют наборы  $(1; -10; -1, -5, 6)$ ,  $(1; -1; -1, 1, 3)$ . [3] По отрицательному резонансу  $r = -5$  построим его двухпараметрическое рациональное решение

$$w = \frac{-5(t-t_0)^4(2(t-t_0)^5 + h)}{(t-t_0)^{10} + h(t-t_0)^5 + \frac{1}{54}h^2}. \quad (3)$$

Решениям системы (2) отвечает набор  $\left(1; -3, -\frac{2}{3}, 2; -1, -2, 6\right)$ , где  $s = 1$  означает наличие решений с полюсом первого порядка,  $-3, -\frac{2}{3}, 2$  – вычеты у компонент  $x, y, z$ ,  $-1, -2, 6$  – резонансы. По отрицательному резонансу  $r = -2$  строим двухпараметрическое рациональное решение

$$x = \frac{-3(t-t_0)^2 + c}{(t-t_0)((t-t_0)^2 - c)}, \quad y = \frac{-2(t-t_0)}{3(t-t_0)^2 + c}, \quad z = \frac{2(t-t_0)}{(t-t_0)^2 - c}. \quad (4)$$

Таким образом, верна

**Теорема.** Уравнение (1), система (2) имеют двухпараметрические рациональные решения (3), (4) соответственно.

### Литература

1. Peter A. Clarkson. Symmetry and the Chazy equation / Peter A. Clarkson, Peter J. Olver // Journal of Differential Equations. – 1996. – № 124. – pp. 225 – 246.
2. Здунек, А.Г. О рациональных решениях дифференциальных уравнений / А.Г. Здунек, И.П. Мартынов, В.А. Пронько // Вест. ГрГУ. Сер.2. – 2000. – №3. – с.33 – 39.
3. Ванькова, Т.Н. О некоторых аналитических свойствах решений алгебраических дифференциальных уравнений / Т.Н. Ванькова, И.П. Мартынов, О.Н. Парманчук, В.А. Пронько // Весн. ГрДУ. Сер. 2. – 2008. – № 1 (64). – С. 8 – 16.

©ПГУ

## О ГЛОБАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНЫХ БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ СИСТЕМ

*А.Д. БУРАК, А.А. КОЗЛОВ*

We give sufficient conditions for the global controllability of Lyapunov exponents of four-dimensional linear systems with locally integrable and integrally bounded coefficient

Ключевые слова: глобальное управление характеристическими показателями Ляпунова

Рассмотрим линейную нестационарную управляемую систему обыкновенных дифференциальных уравнений  $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $t \geq 0$ , (1) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами. Замкнем систему (1) при помощи линейной обратной связи  $u = U(t)x$ ,

где  $U$  – некоторая ограниченная и измеримая  $(m \times n)$ -матрица, получим однородную систему  $\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \geq 0$ , (2) матрица коэффициентов которой также локально интегрируема и интегрально ограничена. Известно, что в этом случае система (2) имеет конечные показатели Ляпунова [1, с. 245]  $\lambda_1(A + BU) \leq \dots \leq \lambda_n(A + BU)$ . Задача о построении для системы (1) обратной связи  $u = U(t)x$ , обеспечивающей выполнение равенств  $\lambda_i(A + BU) = \mu_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , для произвольных заранее заданных вещественных чисел  $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$ , называется *задачей глобального управления характеристическими показателями Ляпунова* [2, с. 184]. Е.Л. Тонков [3] предложил решать данную задачу при следующем предположении. Система (1) называется *равномерно вполне управляемой*, если существуют такие числа  $\sigma > 0$  и  $\gamma > 0$ , что при любых  $t_0 \geq 0$  и  $x \in \mathbb{R}^n$  на отрезке  $[t_0; t_0 + \sigma]$  найдется измеримое и ограниченное управление  $u$ , при всех  $t \in [t_0; t_0 + \sigma]$  удовлетворяющее неравенству  $\|u(t)\| \leq \gamma \|x_0\|$  и переводящее вектор начального состояния  $x(t_0) = x_0$  системы (1) в ноль на этом отрезке.

В рамках такого подхода целым рядом авторов были получены различные условия управляемости характеристических показателей Ляпунова линейных нестационарных систем, большую часть из которых содержит монография [2]. Однако метод, предложенный ее авторами, ввиду своей специфичности, не мог быть распространен уже на системы (2) с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами. В связи с этим возникла задача обобщения результатов, содержащихся в [2], на более широкий класс систем (2), например, систем с разрывными и быстро осциллирующими коэффициентами. А.А. Козловым в статье [4] на основании иного, чем у Е.К. Макарова и С.Н. Поповой, подхода была доказана глобальная управляемость показателей Ляпунова двумерных систем вида (2) с такими коэффициентами в случае равномерной полной управляемости соответствующей системы (1), а позднее, в цикле работ [5,6], им, совместно с А.Д. Бураком, эти результаты были распространены и на трехмерный случай систем (2). Обобщая этот подход, авторам данной работы удалось установить следующее утверждение:

**Теорема.** Пусть  $n = 4$ ,  $m \in \{1, \dots, 4\}$ . Если система (1) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами равномерно вполне управляема, то показатели Ляпунова соответствующей замкнутой системы (2) глобально управляемы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования (студенческий грант №20130402).

#### Литература

1. Былов Б.Ф. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам. М.: Наука. 1966. 576 с.
2. Макаров Е.К., Попова С.Н. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск: Беларус. навука. 2012. 407 с.
3. Тонков Е.Л. // Дифференц. уравнения. 1979. Т.15. №10. С. 1804–1813.
4. Козлов А.А. // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 10. С. 1319–1335.
5. Козлов А.А., Бурак А.Д. // Веснік ВДУ. 2013. № 3(75). С. 29–45.
6. Козлов А.А., Бурак А.Д. // Веснік ВДУ. 2013. № 5(77). С. 11–31.

ГТУ им. Ф Скорины

## ОБОБЩЕННО МОДУЛЯРНЫЕ И ПЕРМУТИРУЕМЫЕ ПОДГРУППЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

В.А. ВАСИЛЬЕВ, А.Н. СКИБА

A subgroup  $H$  of a group  $G$  is called  $m$ -supplemented in  $G$  if there exists a subgroup  $K$  of  $G$  such that  $G=HK$  and  $H \cap K \leq H_m G$ . A subgroup  $H$  of a group  $G$  is called permuteral (strong permuteral) in  $G$  if  $P_G(H)=G$  ( $P_U(H)=U$  when  $H \leq U \leq G$ ). Based on these concepts groups with  $m$ -supplemented and permuteral (strong permuteral) subgroups were studied

Ключевые слова: конечная группа,  $m$ -добавляемая подгруппа, пермутируемая подгруппа, сильно пермутируемая подгруппа,  $p$ -нильпотентная группа

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны. Отметим, что модулярная подгруппа является модулярным элементом (в смысле Куроша) решетки всех подгрупп группы. Каждая подгруппа  $H$  группы  $G$  обладает наибольшей содержащейся в ней модулярной подгруппой  $HmG$  группы  $G$ . В работе [1] нами было введено следующее обобщение понятия модулярной подгруппы.

**Определение 1.** Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  $m$ -добавляемой в  $G$ , если в  $G$  существует такая подгруппа  $K$ , что  $G=HK$  и  $H \cap K \leq HmG$ .

На основе данного понятия нами был получен следующий результат.

**Теорема 1 [2].** Пусть  $G$  – группа и  $P$  – силовская  $p$ -подгруппа группы  $G$ , где  $p$  – простой делитель  $|G|$ . Предположим, что по крайней мере одно из следующих утверждений выполняется: