МАТЕМАТИКА

УДК 512.643+517.977

ИНВАРИАНТНОСТЬ СВОЙСТВА ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ОТДЕЛЕННОСТИ ГЛАВНЫХ ВЕДУЩИХ МИНОРОВ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ ПРИ ЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ПОДОБИЯ

А.А. Козлов, К.Д. Калита

Полоцкий государственный университет

THE INVARIANCE OF PROPERTY OF PRINCIPAL LEADING MINORS' OF THE SQUARE MATRIX POSITIVITY IN THE SIMILARITY TRANSFORMATION

A.A. Kozlov, K.D. Kalita

Polotsk State University

Рассматривается множество квадратных матриц с положительными главными ведущими минорами, над которыми осуществляется преобразование подобия с помощью нижнетреугольных матриц с положительными диагональными элементами. Устанавливается критерий сохранения положительности главных ведущих миноров при вышеуказанном преобразовании подобия. Кроме того, получено достаточное условие сохранения свойства положительной отделенности от нуля для квадратных матриц, обладающих таким свойством, при рассматриваемом преобразовании. Полученные в работе результаты в дальнейшем планируется использовать при решении задач управления асимптотическими характеристиками линейных дифференциальных систем.

Ключевые слова: *инвариантность*, *преобразование подобия*, *главные ведущие* (*угловые*) *миноры матрицы*, *положительная отделенность*, *законопослушность пары матриц*.

The set of square matrices with positive principal leading minors and the similarity transformation of them using lower triangular matrices with positive diagonal elements are discussed. The criterion of the preservation of the principal corner minors' of a matrix positivity in the similarity transformation using the above-stated transformation is established. Moreover a sufficient condition of the preservation of the positive separation property for square above mentioned matrices in the similarity transformation is obtained. The received results are planned to be further used in the theory of controllability of asymptotic invariants of linear systems of ordinary differential equations.

Keywords: *invariance*, *similarity transformation*, *principal leading* (*corner*) *minors of a matrix*, *positive separation*, *law-obedience of two matrices*.

Введение

Одной из задач линейной алгебры является изучение связанных с матрицами свойств и величин, сохраняющихся при различных матричных преобразованиях (ортогональном, подобия, конгруэнции и др.). Так, уже давно известна [1, с. 471] инвариантность свойства положительности главных ведущих миноров положительно определенной матрицы при ортогональном преобразовании, при этом, очевидно, что несимметрические матрицы таким свойством не обладают. Матрицы и связанные с ними свойства широко используются также и при решении прикладных задач, в частности, задач управления асимптотическими характеристиками линейной динамической системы [2]. Здесь важную роль играют, прежде всего, квадратные матрицы с отделенными от нуля, положительными главными ведущими минорами и их преобразования подобия, сохраняющие такую отделенность. Это связано с тем, что мультипликативное возмущение (см., напр., теорему 27.3 работы [2, с. 289]) матрицы Коши управляемой динамической системы, используемое для решения задачи управления ее асимптотическими инвариантами, может быть описано в терминах именно таких матриц и их преобразований.

Основным результатом данной работы является теорема о сохранении положительной отделенности главных ведущих миноров квадратных матриц при их преобразовании подобия с помощью нижнетреугольных матриц с положительными диагональными элементами.

1 Критерий сохранения положительности главных ведущих миноров матрицы

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово векторное пространство с нормой $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ (здесь символ T означает операцию транспонирования вектора или матрицы); $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – векторы (столбцы) канонического ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^n$; M_{mn} – пространство вещественных матриц размерности $m \times n$ со спектральной (операторной) нормой $\|H\| = \max_{\|x\|=1} \|Hx\|$, т. е. нормой, индуцируемой на M_{mn} евклидовой нормой в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ [1, с. 357]; $\mathrm{M}_n := \mathrm{M}_{nn}$. Обозначим через $E = [e_1, ..., e_n] \in \mathrm{M}_n$ единичную матрицу. Для произвольного числа $l \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{R}_l \subset \mathrm{M}_l$ множество нижнетреугольных матриц порядка l с положительными диагональными элементами.

***Определение* 1.1.** Для любого фиксированного числа $k \in \{1, ..., n\}$ и всякой матрицы $H = (h_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathrm{M}_n$ через $(H)_k \in \mathrm{M}_k$ обозначим ее *ведущую главную подматрицу* порядка k [1, с. 30], т. е.

$$(H)_1 = (h_{11}) \in \mathrm{M}_1,$$

$$(H)_2 = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2, ..., (H)_n = H \in \mathrm{M}_n.$$

Главными ведущими (*угловыми) минорами* матрицы $H \in \mathrm{M}_n$ будем называть [1, с. 30] определители ее ведущих главных подматриц.

***Определение* 1.2.** При каждом $j = \overline{1, n}$ через $S_j \in \mathrm{M}_n$ обозначим матрицу, полученную из матрицы $R \in \mathrm{M}_n$ заменой первых j строк соответствующими строками матрицы H, т. е. матрицу

$$S_j := R + \sum_{i=1}^{j} e_i e_i^T (H - R), \;\; j \in \{1, ..., n\}.$$

В дальнейшем будем говорить [2, с. 283], что матрицы $S_j \in \mathrm{M}_n$, $j = \overline{1, n}$, являются *промежуточными шагами на пути от R к H*.

***Определение* 1.3.** Упорядоченную пару матриц (R, H) из множества $\mathrm{M}_n \times \mathrm{M}_n$ назовем *законопослушной* [2, с. 283], если справедливо соотношение $\det R > 0$ и при всех $j \in \{1, ..., n\}$ для матриц S_j, являющихся промежуточными шагами на пути от R к H, выполнены неравенства $\det S_j > 0$.

***Пример* 1.1.** Рассмотрим следующие матрицы третьего порядка

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } H = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \qquad (1.1)$$

Тогда матрицы S_j, являющиеся промежуточными шагами на пути от R к H, равны

$$S_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \; S_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = H,$$

и для них, как нетрудно заметить, справедливы соотношения

$$\det S_1 = 13 > 0, \det S_2 = 3 > 0, \det S_3 = 8 > 0.$$

Отсюда и из очевидного равенства $\det R = 4 > 0$ следует, что пара матриц (R, H) законопослушна.

***Определение* 1.4.** Квадратные матрицы M и N n-го порядка называются *подобными* [1, с. 61], если существует такая невырожденная матрица $S \in \mathrm{M}_n$, при которой выполняется соотношение

$$M := S^{-1} N S, \qquad (1.2)$$

само же преобразование матрицы N с помощью матрицы S называется *преобразованием подобия.*

Для любого $n \in \mathbb{N}$ введем в рассмотрение множество $\mathcal{H}_n$ матриц n-го порядка с положительными главными ведущими (угловыми) минорами, т. е. совокупность матриц

$$\mathcal{H}_n := \{H \in \mathrm{M}_n : \det(H)_k > 0, \, k = \overline{1, n}\}.$$

***Замечание* 1.1.** Легко показать, что при преобразовании подобия матриц, принадлежащих множеству $\mathcal{H}_n$, положительность их главных ведущих миноров, вообще говоря, не сохраняется, т. е. если имеет место включение $N \in \mathcal{H}_n$, то при некоторой невырожденной матрице $S \in \mathrm{M}_n$ выполняется соотношение $S^{-1} N S \notin \mathcal{H}_n$.

Действительно, возьмем, например, матрицы второго порядка

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \text{ и } S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда, очевидно, верны оценки $\det(N)_i > 0$, $i = \overline{1, 2}$, устанавливающие включение $N \in \mathcal{H}_2$. Кроме того, имеет место равенство $\det S = 1$, означающее, что матрица S обратима, причем для обратной к ней матрицы выполняется легко проверяемое соотношение

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся преобразованием подобия матрицы N при помощи матрицы $S \in \mathrm{M}_2$:

$$M = S^{-1} N S = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & 33 \\ -17 & 28 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\det(M)_1 = -20 < 0$, то, очевидно, что при преобразовании подобия свойство положительности главных ведущих миноров произвольных матриц из $\mathcal{H}_n$ в общем случае не сохраняется.

***Замечание* 1.2.** Легко видеть, что если правая часть соотношения (1.2) есть преобразование подобия матрицы N, то и соотношение TNT^{-1} также является преобразованием подобия этой матрицы при $T = S^{-1}$. Поэтому в дальнейшем будем считать преобразованием подобия именно выражение TNT^{-1}.

***Замечание* 1.3.** Зафиксируем любое число $k \in \{1, ..., n-1\}$. Возьмем произвольные матрицы $A \in \mathrm{M}_k$, $B \in \mathrm{M}_{kn-k}$, $C \in \mathrm{M}_{n-kk}$, $D \in \mathrm{M}_{n-k}$, при этом будем предполагать, что справедливо неравенство $\det D \neq 0$. Тогда для матрицы $F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n$ имеет место [3, с. 159] соотношение

$$\det F = \det(A - BD^{-1}C) \cdot \det D. \qquad (1.3)$$

В данном пункте получен критерий инвариантности свойства положительности главных ведущих миноров матриц из множества $\mathcal{H}_n$ при преобразовании подобия с помощью матриц из совокупности $\mathcal{R}_n$ нижнетреугольных матриц с положительными диагональными элементами, т. е. установлена следующая

***Теорема* 1.1.** *Пусть* $R \in \mathcal{R}_n, H \in \mathcal{H}_n$. *Включение* $RHR^{-1} \in \mathcal{H}_n$ *выполняется тогда и только тогда, когда пара матриц* (R, H) *законопослушна.*

***Замечание* 1.4.** Теорема 1.1 утверждает, что для сохранения положительности всех главных ведущих миноров матрицы $H \in \mathcal{H}_n$ при ее преобразовании подобия, осуществляемом с помощью некоторой матрицы $R \in \mathcal{R}_n$, необходимо и достаточно, чтобы пара матриц (R, H) была законопослушной.

Доказательство. Возьмем произвольные матрицы $H \in \mathcal{H}_n$ и $R \in \mathcal{R}_n$. Из определения множества $\mathcal{R}_n$ очевидным образом следует, что существует матрица R^{-1}. Пусть $M \in \mathrm{M}_n$ – матрица, полученная из H преобразованием подобия с помощью матрицы R, т. е. $M := RHR^{-1}$. Зафиксируем любое число $k \in \{1, ..., n\}$. Заметим, что при $k = n$ главный ведущий минор n-го порядка матрицы M (совпадающий, очевидно, с определителем этой матрицы) положителен, так как справедлива цепочка равенств

$$\det(M)_n = \det M = \det(RHR^{-1}) =$$
$$= \det R \cdot \det H \cdot (\det R)^{-1} = \det H > 0.$$

Матрица S_n, являющаяся n-ым промежуточным шагом на пути от R к H, также имеет положительный определитель, поскольку верно равенство $S_n = H$, и значит, включение $S_n \in \mathcal{H}_n$. Отсюда следует, что случай $k = n$ не налагает никаких условий на связь между законопослушностью пары матриц (R, H) и положительностью главных ведущих миноров матрицы M. Поэтому в дальнейших рассуждениях, при изучении вышеуказанной связи, будем считать, что $k \in \{1, ..., n-1\}$.

Представим матрицу H в блочном виде

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}, \qquad (1.4)$$

где $H_{11} \in H_k$, $H_{12} \in \mathrm{M}_{kn-k}$, $H_{21} \in \mathrm{M}_{n-kk}$, $H_{22} \in \mathrm{M}_{n-k}$. Легко заметить, что матрица H_{11} является ведущей главной подматрицей k-го порядка матрицы H, т. е. $H_{11} = (H)_k$. Так как выполняется включение $R \in \mathcal{R}_n$, то матрица $R = (r_{ij})_{i,j=1}^n$ является нижнетреугольной, поэтому она представляется в виде блочной нижнетреугольной матрицы

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & \mathrm{O} \\ \mathrm{R}_{21} & \mathrm{R}_{22} \end{pmatrix}, \qquad (1.5)$$

где R_{11} – нижнетреугольная матрица k-го порядка, О – нулевая матрица размерности $k \times (n-k)$, R_{21} – вещественная матрица размерности $(n-k) \times k$, а R_{22} – нижнетреугольная матрица $(n-k)$-го порядка. Очевидно, что множество диагональных элементов нижнетреугольных матриц R_{11} и R_{22} совпадает с совокупностью диагональных элементов матрицы R, являющихся положительными числами, ввиду включения $R \in \mathcal{R}_n$. Поэтому справедливы соотношения

$$\det R_{11} = \prod\nolimits_{i=1}^{k} r_{ii} > 0 \text{ и } \det R_{22} = \prod\nolimits_{i=k+1}^{n} r_{ii} > 0, \quad (1.6)$$

т. е. матрицы R_{11} и R_{22} обратимы. Тогда для матрицы $R^{-1} \in \mathrm{M}_n$, существующей в силу очевидных соотношений $\det R = \prod\nolimits_{i=1}^{n} r_{ii} > 0$, вытекающих из определения матрицы R, выполняется легко проверяемое равенство

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} R_{11}^{-1} & \mathrm{O} \\ -R_{22}^{-1} R_{21} R_{11}^{-1} & R_{22}^{-1} \end{pmatrix}. \qquad (1.7)$$

На основании определения матрицы M, формул (1.5), (1.4) и (1.7), используя произведение блочных матриц, имеем равенства

$$M = RHR^{-1} =$$
$$= \begin{pmatrix} R_{11} & \mathrm{O} \\ \mathrm{R}_{21} & \mathrm{R}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11}^{-1} & O \\ -R_{22}^{-1} R_{21} R_{11}^{-1} & R_{22}^{-1} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} R_{11} H_{11} & R_{11} H_{12} \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11}^{-1} & O \\ -R_{22}^{-1} R_{21} R_{11}^{-1} & R_{22}^{-1} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} R_{11} H_{11} R_{11}^{-1} - R_{11} H_{12} R_{22}^{-1} R_{21} R_{11}^{-1} & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

(в представленных равенствах блоки-матрицы, не влияющие на ход дальнейших рассуждений, заменены символом ∗).

Легко заметить, что ведущая главная подматрица k-го порядка матрицы M равна

$$(M)_k = R_{11} H_{11} R_{11}^{-1} - R_{11} H_{12} R_{22}^{-1} R_{21} R_{11}^{-1}.$$

Тогда, отсюда, для главного ведущего (углового) минора k-го порядка этой матрицы на основании элементарных свойств определителя [3, с. 112] имеем цепочку равенств

$$\det(M)_k = \det(R_{11} H_{11} R_{11}^{-1} - R_{11} H_{12} R_{22}^{-1} R_{21} R_{11}^{-1}) =$$

$$= \det R_{11} \cdot \det(H_{11} - H_{12}R_{22}^{-1}R_{21}) \cdot \det R_{11}^{-1} =$$
$$= \det R_{11} \cdot (\det R_{11})^{-1} \cdot \det(H_{11} - H_{12}R_{22}^{-1}R_{21}) = \tag{1.8}$$
$$= \det(H_{11} - H_{12}R_{22}^{-1}R_{21}).$$

Для ранее зафиксированного $k \in \{1,...,n-1\}$ рассмотрим матрицу S_k, представляющую собой k-ый промежуточный шаг на пути от R к H, т. е. матрицу

$$S_k = R + \sum\nolimits_{i=1}^{k} e_i e_i^T (H - R) \in \mathrm{M}_n.$$

Очевидно, что для нее справедливо следующее блочное представление

$$S_k = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Из второго неравенства в формуле (1.6) вытекает, что блоки матрицы S_k удовлетворяют условиям замечания 1.3. На основании формулы (1.3) этого замечания найдем определитель вышеуказанной матрицы:

$$\det S_k = \det(H_{11} - H_{12}R_{22}^{-1}R_{21}) \cdot \det R_{22}.$$

Тогда отсюда и из равенств (1.8) вытекает соотношение

$$\det(M)_k = \det S_k / \det R_{22}. \tag{1.10}$$

Ввиду $\det R_{22} > 0,$ из формулы (1.10) следует, что положительность главного ведущего минора k-го порядка матрицы $M = RHR^{-1}$ эквивалентна положительности определителя $\det S_k$. В силу произвольности выбора $k \in \{1,...,n-1\},$ а также, ввиду замечания, сделанного вначале доказательства этой теоремы для случая $k = n,$ такая эквивалентность справедлива при каждом $k \in \{1,...,n\}.$ Следовательно, положительность всех главных ведущих (угловых) миноров матрицы M эквивалентна положительности определителей каждой из матриц, являющихся промежуточными шагами на пути от R к $H,$ что, в свою очередь, равнозначно законопослушности упорядоченной пары матриц $(R, H).$ □

***Пример* 1.1** (продолжение). Рассмотрим пару (R, H) матриц, представленных в формуле (1.1), которая, как ранее было установлено, является законопослушной, и убедимся, что все угловые миноры матрицы $M = RHR^{-1}$ положительны, тем самым подтвердив справедливость теоремы 1.1.

Нетрудно установить, что для матрицы M выполняется равенство

$$M = \begin{pmatrix} 13/4 & -3/4 & 1/2 \\ 21/4 & -3/4 & 5/2 \\ 41/4 & -11/4 & 11/2 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что главные ведущие (угловые) миноры матрицы M удовлетворяют соотношениям

$$\det(M)_1 = 13/4 > 0,$$
$$\det(M)_2 = 3/2 > 0, \ \det(M)_3 = 8 > 0.$$

***Замечание* 1.5.** Ввиду очевидного включения $\mathcal{R}_n \subset \mathcal{H}_n,$ возникает вопрос о возможности ослабления условий теоремы 1.1 рассмотрением преобразующих матриц не из множества $\mathcal{R}_n,$ а из более широкого – $\mathcal{H}_n.$ Заметим, что для справедливости последней теоремы нижнетреугольный вид у преобразующей матрицы R играет существенную роль. При отказе от нижнетреугольности матрицы $R \in \mathrm{M}_n$ (с сохранением положительности всех ее угловых миноров) в общем случае утверждения теоремы 1.1 (как необходимое, так и достаточное условие) становятся неверными. Покажем вначале, что при таких предположениях из законопослушности пары $(R, H),$ где $H \in \mathcal{H}_n,$ в общем случае не следует включение $RHR^{-1} \in \mathcal{H}_n.$ Рассмотрим, например, следующие 2×2 -матрицы

$$\widehat{R} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ и } \widehat{H} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

$$\det(\widehat{R})_1 = 2, \ \det(\widehat{R})_2 = \det \widehat{R} = 6 > 0$$
$$\text{и } \det(\widehat{H})_1 = 3, \det(\widehat{H})_2 = \det \widehat{H} = 22,$$

т. е. для рассматриваемых матриц выполняются включения $\widehat{R}, \widehat{H} \in \mathcal{H}_2.$ Так как для матриц $\widehat{S}_i,$ $i = 1, 2,$ – промежуточных шагов на пути от $\widehat{R}$ к $\widehat{H}$ – имеют место соотношения

$$\det \widehat{S_1} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 7 > 0 \text{ и } \det \widehat{S_2} = \det \widehat{H} = 22 > 0,$$

то с учетом неравенства $\det \widehat{R} > 0$ в силу определения 1.3 пара матриц $(\widehat{R}, \widehat{H}) \in \mathrm{M}_2 \times \mathrm{M}_2$ законопослушна. Используя преобразование подобия матрицы $\widehat{H}$ при помощи невырожденной матрицы $\widehat{R},$ имеем легко проверяемые равенства

$$\widehat{R}\widehat{H}\widehat{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5/6 & -1/6 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -12 & 14 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\det(\widehat{R}\widehat{H}\widehat{R}^{-1})_1 = -1 < 0,$ то, очевидно, что $\widehat{R}\widehat{H}\widehat{R}^{-1} \notin \mathcal{H}_2,$ т. е. свойство положительности главных ведущих миноров рассматриваемой матрицы $\widehat{H}$ при преобразовании подобия не сохраняется.

Покажем теперь, что при отказе от нижнетреугольности матрицы R и достаточное условие теоремы 1.1 в общем случае оказывается неверным, т. е. из включений $R, H, RHR^{-1} \in \mathcal{H}_n$ не всегда следует законопослушность пары (R, H). Для этого рассмотрим следующие квадратные матрицы

$$\widetilde{R} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \widetilde{H} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что

$$\det(\widetilde{R})_1 = 1,\ \det(\widetilde{R})_2 = \det \widetilde{R} = 2 > 0$$

$$\text{и } \det(\widetilde{H})_1 = 1,\ \det(\widetilde{H})_2 = \det \widetilde{H} = 1,$$

т. е. выполняются включения $\widetilde{R}, \widetilde{H} \in \mathcal{H}_2$. Кроме того, имеют место легко проверяемые равенства

$$\widetilde{R}\widetilde{H}\widetilde{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -3/2 & 7/2 \end{pmatrix},$$

из которых вытекают соотношения

$$\det(\widetilde{R}\widetilde{H}\widetilde{R}^{-1})_1 = 1/2 \text{ и } \det(\widetilde{R}\widetilde{H}\widetilde{R}^{-1}) = \det \widetilde{H} = 1,$$

устанавливающие для преобразованной матрицы $\widetilde{R}\widetilde{H}\widetilde{R}^{-1} \in \mathrm{M}_2$ справедливость включения

$$\widetilde{R}\widetilde{H}\widetilde{R}^{-1} \in \mathcal{H}_2.$$

Таким образом, для рассматриваемых нами матриц выполняются соотношения

$$\widetilde{R}, \widetilde{H}, \widetilde{R}\widetilde{H}\widetilde{R}^{-1} \in \mathcal{H}_2.$$

Легко видеть, что матрица $\widetilde{S_1} \in \mathrm{M}_2$ – промежуточный шаг на пути от $\widetilde{R}$ к $\widetilde{H}$ – имеет вид $\widetilde{S_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, и поэтому для нее справедливо соотношение $\det \widetilde{S_1} = -1 < 0$, означающее, ввиду определения 1.3, что пара матриц $(\widetilde{R}, \widetilde{H})$ не является законопослушной. Таким образом, для взятых нами матриц из включений

$$\widetilde{R}, \widetilde{H}, \widetilde{R}\widetilde{H}\widetilde{R}^{-1} \in \mathcal{H}_2$$

не следует законопослушность пары матриц $(\widetilde{R}, \widetilde{H})$.

Теорема 1.1 устанавливает критерий инвариантности свойства положительности главных ведущих (угловых) миноров матрицы $H \in \mathcal{H}_n$ при преобразовании подобия с помощью матрицы $R \in \mathcal{R}_n$. Оказывается, что справедливо более сильное утверждение (достаточное условие) сохранения положительной отделенности от нуля главных ведущих (угловых) миноров матрицы $H \in \mathcal{H}_n$ при преобразовании подобия с помощью нижнетреугольной матрицы $R \in \mathcal{R}_n$ с отделенным от нуля определителем, однако при более жестком, чем законопослушность, условии ρ-законопослушности пары матриц (R, H). Об этом речь пойдет во втором пункте настоящей статьи.

2 Достаточное условие инвариантности свойства положительной отделенности от нуля главных ведущих миноров матрицы при преобразовании подобия

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения. Для любых вещественных чисел $r \ge 1$ и $\rho \in (0,1]$ рассмотрим множество $\mathcal{R}_n(r,\rho) \subset \mathcal{R}_n$ нижнетреугольных $n \times n$-матриц R с положительными диагональными элементами, удовлетворяющих неравенствам $\|R - E\| \le r$ и $\det R \ge \rho$, т. е. множество матриц

$$R_n(r,\rho) := \{R \in R_n : \|R - E\| \le r, \det R \ge \rho\},$$

а также совокупность матриц $\mathcal{H}_n(r,\rho) \subset \mathcal{H}_n \subset \mathrm{M}_n$, для которых справедлива оценка $\|H - E\| \le r$ и все главные ведущие главные миноры которых не меньше ρ, т. е. совокупность матриц

$$\mathcal{H}_n(r,\rho) := \{H \in \mathrm{M}_n : \|H - E\| \le r,$$

$$\det(H)_k \ge \rho,\ k = \overline{1,n}\}.$$

***Определение* 2.1.** Зафиксируем произвольное число $\rho \in (0,1]$. Пользуясь определением, введенным в работе [2, с. 283], упорядоченную пару матриц (R, H) из множества $\mathrm{M}_n \times \mathrm{M}_n$ будем называть ρ-*законопослушной*, если справедливо соотношение $\det R \ge \rho$ и при всех $j \in \{1,\dots,n\}$ для матриц S_j, являющихся промежуточными шагами на пути от R к H, выполнены неравенства $\det S_j \ge \rho$.

***Теорема* 2.1.** *Пусть $r \ge 1$ и $\rho \in (0,1]$. Если пара (R, H) матриц, удовлетворяющих включениям $R \in \mathcal{R}_n(r,\rho)$ и $H \in \mathcal{H}_n(r,\rho)$, является ρ-законопослушной, тогда при $r_1 := r(r+1)^n/\rho$ и $\rho_1 := \rho/(r+1)^n$ справедливо соотношение*

$$RHR^{-1} \in \mathcal{H}_n(r_1, \rho_1).$$

Доказательство. Зафиксируем любые числа $r \ge 1$ и $\rho \in (0,1]$. Возьмем произвольные матрицы $H \in \mathcal{H}_n(r,\rho)$ и $R = (r_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{R}_n(r,\rho)$ такие, что упорядоченная пара (R, H) является ρ-законопослушной, и рассмотрим матрицу $M := RHR^{-1} \in \mathrm{M}_n$, полученную из матрицы H преобразованием подобия, осуществляемым с помощью матрицы R. Покажем, что найдутся такие числа $\rho_1 = \rho_1(r,\rho) \in (0,1]$ и $r_1 = r_1(r,\rho) \ge 1$, при которых для матрицы M выполняется включение $\mathrm{M} \in \mathcal{H}_n(r_1, \rho_1)$. Для этого вначале установим справедливость оценки $\|RHR^{-1} - E\| \le r_1$ при некотором $r_1 = r_1(r,\rho) \ge 1$. Поскольку выполняется включение $R \in \mathcal{R}_n(r,\rho)$, то имеем неравенства

$$\|R - E\| \le r,\ \det R \ge \rho. \qquad (2.1)$$

Тогда на основании элементарных свойств нормы для величины $\|R\|$ справедлива оценка

$$\|R\| = \|R - E + E\| \le \|R - E\| + \|E\| \le r + 1. \quad (2.2)$$

Так как для любой невырожденной матрицы $D \in \mathrm{M}_n$ выполняется (см., напр., замечание 1 работы [4]) неравенство $\|D^{-1}\| \le \|D\|^{n-1} / \det D,$ то для матрицы $R \in \mathcal{R}(r,\rho) \subset \mathrm{M}_n$, с учетом формул (2.1) и (2.2), установим соотношения

$$\|R^{-1}\| \le \|R\|^{n-1} / \det R \le (r+1)^{n-1} / \rho. \quad (2.3)$$

Из включения $H \in \mathcal{H}_n(r,\rho)$ следует оценка $\|H - E\| \le r,$ используя которую, а также формулы (2.2) и (2.3), на основании элементарных свойств нормы для матрицы M получим цепочку соотношений

$$\|M - E\| = \|RHR^{-1} - E\| \le \|R\| \cdot \|H - E\| \cdot \|R^{-1}\| \le$$
$$\le (r+1) \cdot r \cdot (r+1)^{n-1} / \rho = r(r+1)^n / \rho =: r_1. \quad (2.4)$$

При этом, ввиду включений $\rho \in (0,1]$ и $r \in [1,+\infty),$ для величины r_1 выполняется оценка $r_1 \ge 1.$

Теперь рассмотрим главные ведущие (угловые) миноры $\det(M)_k$, $k = \overline{1,n},$ матрицы M и установим справедливость неравенств $\det(M)_k \ge \rho_1$ при некотором числе $\rho_1 = \rho_1(r,\rho) \in (0,1].$ Пусть $k = n,$ тогда с учетом включения $H \in \mathcal{H}(r,\rho),$ очевидно, справедливы соотношения $\det(M)_k = \det(M)_n = \det M = \det(RHR^{-1}) = \det H \ge \rho,$ т. е.

$$\det(M)_n \ge \rho. \quad (2.5)$$

Возьмем теперь произвольное число $k \in \{1,\dots,n-1\}$ и рассмотрим матрицу $S_k \in \mathrm{M}_n$, являющуюся k-ым промежуточным шагом на пути от R к H. Ввиду ρ-законопослушности матриц R и $H,$ для матрицы S_k справедливы оценка $\det S_k \ge \rho$ и, как легко заметить, блочное представление в виде (1.9), где матрица R_{22} – нижнетреугольная, диагональные элементы которой совпадают с элементами r_{ii}, $i = \overline{k+1,n}.$ Тогда на основании верных включений $H \in \mathcal{H}_n(r,\rho) \subset \mathcal{H}_n$ и $R \in \mathcal{R}_n(r,\rho) \subset \mathcal{R}_n$, используя рассуждения, аналогичные приведенным в доказательстве теоремы 1.1 при выводе формулы (1.10), для главного ведущего (углового) минора k-го порядка матрицы M получим оценку $\det(M)_k = \det S_k / \det R_{22} \ge \rho / \det R_{22}$. Поскольку матрица R_{22} – нижнетреугольная с диагональными элементами r_{ii}, $i = \overline{k+1,n},$ то ее определитель равен $\det R_{22} = \prod_{i=k+1}^{n} r_{ii}$, и, поэтому для $\det(M)_k$ справедливо неравенство

$$\det(M)_k \ge \rho / \prod_{i=k+1}^{n} r_{ii}, \quad (2.6)$$

В силу включения $R \in \mathcal{R}(r,\rho),$ матрица R имеет положительные диагональные элементы. Тогда на основании элементарных свойств нормы и формулы (2.2) имеют место неравенства $r_{ii} = |r_{ii}| \le \|R\| \le (r+1).$ Отсюда и из формулы (2.6) следует оценка

$$\det(M)_k \ge \rho / (r+1)^{n-k-1} \ge \rho / (r+1)^n.$$

Ввиду произвольности выбора $k \in \{1,\dots,n-1\},$ такое неравенство выполняется при всех $k = \overline{1,n-1}.$ Тогда, полагая

$$\rho_1 := \min\{\rho, \rho / (r+1)^n\} = \rho / (r+1)^n,$$

из последней оценки и формулы (2.5) получим справедливое при каждом $k = \overline{1,n}$ соотношение

$$\det(M)_k \ge \rho_1, \quad (2.7)$$

в котором $\rho_1 = \rho_1(r,\rho) \in (0,1],$ ввиду верных оценок $r \ge 1$ и $0 < \rho \le 1.$ Таким образом, в силу формулы (2.7), а также неравенств (2.4) для матрицы $M = RHR^{-1} \in \mathrm{M}_n$, выполняется требуемое включение $M \in \mathcal{H}_n(r_1,\rho_1)$ с числами

$$r_1 = r(r+1)^n / \rho \ge 1 \text{ и } \rho_1 = \rho / (r+1)^n \in (0,1]. \quad \square$$

***Пример* 2.1.** Положим $n = 3,$ $r = 4$ и $\rho = 1/2$ и рассмотрим матрицы

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно установить, что спектральные нормы этих матриц равны $\|R\| = 3$ и $\|H\| = 3,$ т. е. выполняются оценки

$$\|R - E\| \le 4 \text{ и } \|H - E\| \le 4.$$

Кроме того, для ведущих главных ведущих миноров матрицы H имеют место соотношения

$$\det(H)_1 = 2,\ \det(H)_2 = 2,\ \det(H)_3 = \det H = 3,$$

а для определителя нижнетреугольный матрицы R с положительными диагональными элементами справедливо равенство $\det R = 12.$ Таким образом, выполняются включения

$$H \in \mathcal{H}_3(4, 1/2) \text{ и } R \in \mathcal{R}_3(4, 1/2).$$

При $k = \overline{1,3}$ рассмотрим матрицы S_k, являющиеся k-ыми промежуточными шагами на пути от R к H:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для их определителей, ввиду выбранной величины ρ, справедливы соотношения

$$\det S_1 = 12 \geq \rho,$$

$$\det S_2 = 6 \geq \rho,$$

$$\det S_3 = \det H = 3 \geq \rho,$$

устанавливающие, что пара (R, H) является ρ-законопослушной.

Для чисел $n = 3$, $r = 4$ и $\rho = 1/2$ найдем величины

$$r_1 = r(r+1)^n / \rho = 4 \cdot 5^3 / (1/2) = 1000 \geq 1$$

и $\rho_1 = \rho / (r+1)^n = (1/2)/5^3 = 1/250 \in (0,1]$.

Нетрудно показать, что матрица M, полученная при преобразовании подобия матрицы H с помощью R, имеет вид

$$M = RHR^{-1} = \begin{pmatrix} 5/2 & 0 & 1/2 \\ 1+\sqrt{2} & 1 & 1/6-\sqrt{2} \\ 3/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Тогда для нее, в силу определения числа ρ_1, как легко видеть, справедливы соотношения

$$\det(M)_1 = 5/2 \geq \rho_1,$$

$$\det(M)_2 = 5/2 \geq \rho_1, \qquad (2.8)$$

$$\det(M)_3 = \det H = 3 \geq \rho_1.$$

Оценим сверху спектральную норму матрицы $(M - E) \in \mathrm{M}_3$, используя неравенство [1, с. 378] между максимальной строчной и спектральной нормами матрицы. Имеем цепочку соотношений

$$\|M - E\| \leq \sqrt{3}\max\{2, 2\sqrt{2}+5/6, 2\} =$$

$$= \sqrt{3}(2\sqrt{2}+5/6) \leq (2 \cdot 3 + 2) = 8 \leq 1000,$$

т. е. $\|M - E\| \leq r_1$ в силу определения r_1. Из последней оценки и неравенств (2.8) следует включение

$$RHR^{-1} \in \mathcal{H}_3(r_1, \rho_1) = \mathcal{H}_3(1000, 1/250),$$

подтверждающее справедливость теоремы 2.1 настоящей работы.

Заключение

В работе установлена инвариантность свойства положительной отделенности от нуля главных ведущих миноров квадратной матрицы при ее преобразовании подобия с помощью нижнетреугольной матрицы с положительными диагональными элементами. Все результаты являются новыми, ранее неизвестными. Предложенные в работе результаты (теоремы 1.1 и 2.1) могут быть полезны не только специалистам по линейной алгебре и теории матриц. Они также, в дальнейшем, могут найти свое применение в математической теории управления и теории устойчивости динамических объектов при решении задач управления асимптотическими характеристиками линейных дифференциальных систем [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хорн*, *Р.* Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 655 с.

2. *Макаров*, *Е.К.* Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем / Е.К. Макаров, С.Н. Попова. – Минск: Беларуская навука, 2012. – 407 с.

3. *Бортаковский*, *А.С.* Линейная алгебра в примерах и задачах / А.С. Бортаковский, А.В. Пантелеев. – М.: Высш. шк., 2005. – 591 с.

4. *Макаров*, *Е.К.* О глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов двумерных линейных систем / Е.К. Макаров, С.Н. Попова // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35, № 1. – С. 97–106.

Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «*Конвергенция*-2020» (*подпрограмма* 1, *задание* 1.2.01).

Поступила в редакцию 16.01.19.