УДК 517.983

МНОГОМЕРНОЕ ОБЩЕЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ В ЯДРЕ

С.М. Ситник*, О.В. Скоромник, С.А. Шлапаков*****
**Белгородский государственный национальный исследовательский университет (Россия)*
***Учреждение образования «Полоцкий государственный университет»*
****Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»*

Настоящая работа посвящена изучению свойств многомерного общего интегрального преобразования в весовых пространствах измеримых комплекснозначных функций.

Цель – построение теории рассматриваемого интегрального преобразования в весовых пространствах суммируемых функций.

***Материал и методы.** Исследуется многомерное общее интегральное преобразование в весовых пространствах суммируемых функций в области $R_+^n = R_+^1 \times R_+^1 \times \ldots \times R_+^1$. При этом используются методы функционального анализа и интегральных уравнений.*

***Результаты и их обсуждение.** В работе исследовано многомерное общее интегральное преобразование и построена его $L_{\overline{\nu},\overline{2}}$ - теория. Приведены условия ограниченности и взаимной однозначности оператора такого преобразования из одних весовых пространств $L_{\overline{\nu},\overline{2}}$ в другие, доказан аналог формулы интегрирования по частям, получены различные интегральные представления для рассматриваемого преобразования.*

***Заключение.** Результаты исследований обобщают полученные ранее для соответствующего одномерного преобразования.*

***Ключевые слова:** многомерное общее интегральное преобразование со специальными функциями в ядрах, многомерное преобразование Меллина, пространство интегрируемых функций, дробные интегралы и производные.*

MULTIDIMENSIONAL GENERAL INTEGRAL TRANSFORMATION WITH SPECIAL FUNCTIONS IN THE KERNEL

S.M. Sitnik*, O.V. Skoromnik, C.A. Shlapakov*****
**Belgorod State National Research University (Russia)*
***Educational Establishment «Polotsk State University»*
****Educational Establishment «Vitebsk State P.M. Masherov University»*

The paper dwells upon the study of the properties of the multidimensional general integral transformation in weight spaces of summable functions.

The research purpose is building up a theory of the considered integral transformation in weight spaces of summable functions.

***Material and methods.** A multidimensional general integral transform on the space of summable functions on a domain $R_{+\ldots+}^n = R_+^1 \times R_+^1 \times \ldots \times R_+^1$ is considered. In the research the methods of functional analysis and integral equations are used.*

***Findings and their discussion.** $L_{\overline{\nu},\overline{2}}$ - theory of a multidimensional general integral transformation was studied and constructed. Conditions for the boundedness and one-to-one operator of such a transformation from one $L_{\overline{\nu},\overline{2}}$ - space to another were given, an analogue of the integration formula in parts was proved, various integral representations for the transformation under consideration were established.*

***Conclusion.** The research findings generalize the well know findings for corresponding one-dimensional integral transformation.*

***Key words:** multidimensional general integral transformation with special functions in the kernel, multidimensional Mellin transforms, the space of integrable functions, fractional integrals and derivatives.*

В настоящей работе исследовано многомерное общее интегральное преобразование. Схема изучения аналогична процессу построения теории *H*-преобразования, центральное место в которой отведено вопросам ограниченного и взаимно однозначного действия соответствующего интегрального оператора в пространствах интегрируемых функций с весом, сосредоточенным в нуле и на бесконечности.

Цель – построение теории рассматриваемого интегрального преобразования в весовых пространствах суммируемых функций.

Материал и методы. В статье рассматривается многомерное общее интегральное преобразование. Исследуются функциональные и композиционные свойства интегрального преобразования в пространствах суммируемых функций. При решении поставленных задач используются в основном методы функционального анализа. Важная роль отводится также теории интегральных преобразований и специальных функций, включающей теорию дробных интегралов и производных.

Результаты и их обсуждение. Построена $L_{\bar{\nu},\bar{2}}$ - теория многомерного общего интегрального преобразования, даны условия ограниченности и взаимной однозначности оператора такого преобразования из одних пространств $L_{\bar{\nu},\bar{2}}$ в другие, доказан аналог формулы интегрирования по частям, установлены различные интегральные представления для рассматриваемого преобразования.

1. Введение. Используется многомерное интегральное преобразование:

$$\left(\mathrm{K} f\right)(\mathrm{x}) = \bar{h}\,\mathrm{x}^{1-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d\,x}} \mathrm{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \int_{\mathbf{0}}^{\infty} \mathrm{k}\left(\mathrm{x\,t}\right) f(\mathrm{t})\,\mathrm{d\,t} \quad (\mathrm{x} > 0), \tag{1.1}$$

где $\mathrm{x} = (x_1,...,x_n) \in R^n$; $\mathrm{t} = (t_1,...,t_n) \in R^n$ – векторы; R^n – Евклидово n-мерное пространство; $\mathrm{x}\cdot\mathrm{t} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k t_k$ – их скалярное произведение, в частности $\mathrm{x}\cdot 1 = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ для $1 = (1,...,1)$; $\mathrm{x} > \mathrm{t}$ означает $x_1 > t_1,..., x_n > t_n$ и аналогично для знаков $\geq$, $<$, $\leq$ [1, §28.4]; ядро $\mathrm{k}\left(\mathrm{x\,t}\right) = \mathrm{k}(x_1 t_1)\cdot \mathrm{k}(x_2 t_2)\cdots k(x_n t_n)$ есть произведение некоторых специальных функций; $\bar{\lambda} = (\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n) \in C^n$; $\bar{h} = (h_1,h_2,...,h_n)$, $h_1 \in R\setminus\{0\}, h_2 \in R\setminus\{0\}, ..., h_n \in R\setminus\{0\}$; $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d\,x}} = \frac{d}{dx_1 dx_2 \cdots dx_n}$; $\int\limits_{\mathbf{0}}^{\infty} := \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}...\int\limits_0^{\infty}$; $N = \{1,2,...\}$ – множество натуральных чисел, $N_0 = N \cup \{0\}$, $N_0^n = N_0 \times N_0 \times ... \times N_0$, $R_+^n = \{\mathrm{x} \in R^n, \mathrm{x} > 0\}$;

$k = \left(k_1,...,k_n\right) \in N_0^n = N_0 \times .... \times N_0$, где $k_i \in N_0\left(i = 1,2,...,n\right)$ – мультииндекс с $k! = k_1!...k_n!$ и $\left|k\right| = k_1 + k_2 + ... + k_n$;

$D^k = \frac{\partial^{|k|}}{(\partial x_1)^{k_1}(\partial x_2)^{k_2}...(\partial x_n)^{k_n}}$; $d\,\mathrm{t} = d\,t_1 \cdot d\,t_2 ... d\,t_n$; $f(\mathbf{t}) = (t_1, t_2,...,t_n)$.

Настоящая работа посвящена изучению преобразования (1.1) в весовых пространствах $L_{\bar{\nu},\bar{2}}$, $\bar{\nu} = (\nu_1,...,\nu_n) \in R^n$ $(\nu_1 = \nu_2 = ... = \nu_n)$, $\bar{2} = (2,...,2)$, интегрируемых функций $f(\mathrm{x}) = f(x_1,...,x_n)$ на $R^n_{+\cdots+}$, для которых $\|f\|_{\bar{\nu},\bar{2}} < \infty$, где

$$\|f\|_{\bar{\nu},\bar{2}} = \left\{ \int_{R_+^1} x_n^{\nu_n\cdot 2-1} \left\{ ... \left\{ \int_{R_+^1} x_2^{\nu_2\cdot 2-1} \left\{ \int_{R_+^1} x_1^{\nu_1\cdot 2-1} \left|f(x_1,...,x_n)\right|^2 dx_1 \right\} dx_2 \right\} ... \right\} dx_n \right\}^{1/2} < \infty . \tag{1.2}$$

В исследованиях преобразований типа (1.1) используется технология многомерного преобразования Меллина

$$(\mathrm{M} f)(\mathbf{s}) = f^*(\mathbf{s}) = \int_{R^n_{+\cdots+}} f(\mathrm{t})\,\mathrm{t}^{\mathbf{s}-1}\, d\,\mathrm{t} .$$

Для преобразований (1.1) имеет место аналог многомерного равенства Парсеваля в виде

$$\int\limits_0^{\infty} k(\mathrm{x\,t}) f(\mathrm{t}) d\,\mathrm{t} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} \int\limits_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty} \ldots \int\limits_{c_n-i\infty}^{c_n+i\infty} (\mathrm{M}\,k)(\mathbf{s})(\mathrm{M}f)(1-\mathbf{s})\,\mathrm{x}^{-\mathbf{s}}\, d\mathbf{s}\,, \tag{1.3}$$

где бесконечные контуры интегрирования $(c_k - i\infty, c_k + i\infty)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) начинаются в точках $c_k - i\infty$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и заканчиваются в точках $c_k + i\infty$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, где $c_k \in R$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ – некоторые вещественные постоянные. Преобразование Меллина ядер гипергеометрического типа представляет собой отношение произведений гамма-функций Эйлера Г(*z*), асимптотика которых в соответствии с формулой Стирлинга имеет степенно-экспоненциальный характер. Это в свою очередь позволяет изучать в совокупности данный класс интегральных преобразований в весовых пространствах суммируемых функций и получать формулы обращения непосредственно, исходя из равенства (1.3) и сверточной структуры класса преобразований (1.1) [2; 3].

Результаты исследований обобщают полученные ранее для соответствующего одномерного преобразования [4, гл. 3].

2. Предварительные сведения. Обозначим через $[X,Y]$ множество ограниченных линейных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y.

Через $\mathrm{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$, $\overline{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in R^n$, $\overline{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in R^n$, $1 < \overline{r} < \infty$, обозначим весовое пространство интегрируемых функций $f(\mathrm{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ на множестве $R^n_{+\ldots+}$, для которых $\|f\|_{\overline{\nu},\overline{r}} < \infty$, где

$$\|f\|_{\overline{\nu},\overline{r}} = \left\{ \int\limits_{R^1_+} x_n^{\nu_n \cdot r_n - 1} \left\{ \ldots \left\{ \int\limits_{R^1_+} x_2^{\nu_2 \cdot r_2 - 1} \left\{ \int\limits_{R^1_+} x_1^{\nu_1 \cdot r_1 - 1} \left| f(x_1, \ldots, x_n) \right|^{r_1} dx_1 \right\}^{r_2/r_1} dx_2 \right\}^{r_3/r_2} \ldots \right\} dx_n \right\}^{1/r_n} < \infty\,. \tag{2.1}$$

Для функции $f(\mathrm{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$ $(\overline{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in R^n, \nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_n,\ 1 \le \overline{r} \le 2)$ многомерное преобразование Меллина $(\mathrm{M}\ f)(\mathbf{s})$ определяется равенством

$$(\mathrm{M}f)(\mathbf{s}) = f^*(\mathbf{s}) = \int\limits_{R^n} f(\mathrm{e}^{\boldsymbol{\tau}})\mathrm{e}^{\mathbf{s}\boldsymbol{\tau}}\, d\boldsymbol{\tau}\,, \tag{2.2}$$

$\mathbf{s} = \boldsymbol{\nu} + i\,\mathrm{t};\ \boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n),\ \mathrm{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in R^n$.

Если $f \in \mathrm{L}_{\overline{\nu},\overline{r}} \bigcap \mathrm{L}_{\overline{\nu},1}$, то (2.1) совпадает с классическим многомерным преобразованием Меллина функции $f(\mathrm{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n_{+\cdots+})$, определяемым формулой [5, формула 1.4.42]:

$$(\mathrm{M}f)(\mathbf{s}) = f^*(\mathbf{s}) = \int\limits_{R^n_{+\cdots+}} f(\mathrm{t})\,\mathrm{t}^{\mathbf{s}-1}\, d\,\mathrm{t}\,,\ \mathrm{Re}(\mathbf{s}) = \boldsymbol{\nu}\,, \tag{2.3}$$

$R^n_{+\cdots+} = \left\{ \mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in R^n : t_j > 0\,(j = 1, 2, \ldots, n) \right\}$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n),\ s_j \in C\ (j = 1, 2, \ldots, n)$.

Обратное преобразование Меллина для $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n_{+\ldots+}$ дается формулой [5, формула (1.4.43)]; 6]:

$$(\mathrm{M}^{-1}g)(\mathrm{x}) = \mathrm{M}^{-1}\left[g(\mathbf{s})\right](\mathrm{x}) \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\gamma_1-i\infty}^{\gamma_1+i\infty} \cdots \int\limits_{\gamma_n-i\infty}^{\gamma_n+i\infty} \mathrm{x}^{-\mathbf{s}}\, g(\mathbf{s}) d\mathbf{s},\ \gamma_j = \mathrm{Re}(s_j)\,(j = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{2.4}$$

Нам понадобятся следующие пространства.

Через $L_{\overline{p}}(R^n)$, как обычно, обозначим пространство функций $f(\mathrm{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$, для которых

$$\|f\|_{\overline{p}}=\left\{\int\limits_{R^n}|f(\mathrm{x})|^{\overline{p}}\,d\,\mathrm{x}\right\}^{1/\overline{p}}<\infty,\ \overline{p}=(p_1,p_2,...,p_n),1\le\overline{p}<\infty. \qquad (2.5)$$

При $\overline{p}=\infty$ пространство $L_\infty(R^n)$ вводится как совокупность всех измеримых функций с конечной нормой

$$\|f\|_{L_\infty(R^n)}=ess\sup|f(\mathrm{x})|, \qquad (2.6)$$

где $ess\sup|f(\mathrm{x})|$ – это так называемый существенный супремум функции $|f(\mathrm{x})|$ [7].

На основании утверждения 3.1 [4] непосредственно проверяется справедливость следующих свойств преобразования Меллина (2.2).

Лемма 2.1. *Справедливы следующие свойства преобразования Меллина (2.2):*

(a) преобразование (2.2) *есть унитарное отображение пространства* $\mathcal{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$, $\overline{\nu}=(\nu_1,...,\nu_n)\in R^n$ $(\nu_1=\nu_2=...=\nu_n)$, *на пространство* $L_2(R^2)$;

(b) для $f\in\mathcal{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$, $\overline{\nu}=(\nu_1,...,\nu_n)\in R^n$ $(\nu_1=\nu_2=...=\nu_n)$,

$$f(\mathrm{x})=\frac{1}{(2\pi i)^n}\lim_{\substack{R_1\to\infty\\ R_2\to\infty\\ \cdots\\ R_n\to\infty}}\int\limits_{\nu_1-iR_1}^{\nu_1+iR_1}\int\limits_{\nu_2-iR_2}^{\nu_2+iR_2}\cdots\int\limits_{\nu_n-iR_n}^{\nu_n+iR_n}(\mathcal{M}f)(\mathbf{s})\,\mathrm{x}^{-\mathbf{s}}\,d\mathbf{s}, \qquad (2.7)$$

где предел берется в топологии пространства $\mathcal{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ $(\overline{\nu}=(\nu_1,...,\nu_n)\in R^n)$, *и если* $F(\overline{\nu}+i\,\mathrm{t})=F_1(\nu_1+it_1)F_2(\nu_2+it_2)\cdots F_n(\nu_n+it_n)$, $F_k(\nu_k+it_k)\in L_1(-R,R)$, $k=1,2,...,n$, *то*

$$\int\limits_{\nu_1-iR_1}^{\nu_1+iR_1}\int\limits_{\nu_2-iR_2}^{\nu_2+iR_2}\cdots\int\limits_{\nu_n-iR_n}^{\nu_n+iR_n}F(\mathbf{s})d\mathbf{s}=i^n\int\limits_{-R_1}^{R_1}\int\limits_{-R_2}^{R_2}\cdots\int\limits_{-R_n}^{R_n}F(\overline{\nu}+i\,\mathrm{t})d\,\mathrm{t}. \qquad (2.8)$$

(c) Для функции $f\in\mathcal{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *и функции* $g\in\mathcal{L}_{1-\overline{\nu},\overline{2}}$ *справедливо равенство*

$$\int\limits_0^\infty f(\mathrm{x})g(\mathrm{x})d\,\mathrm{x}=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\overline{\nu}-i\infty}^{\overline{\nu}+i\infty}(\mathcal{M}f)(\mathbf{s})(\mathcal{M}g)(1-\mathbf{s})d\mathbf{s}. \qquad (2.9)$$

Для функции f определим почти всюду в $R^n_{+\cdots+}$ элементарные операторы $\mathbf{M}_\xi$, $\mathbf{W}_\delta$, $\mathbf{R}$ [5, формулы (1.4.52), (1.4.53), (1.3.6)] и оператор $\mathbf{C}_\nu$ [4, формула (3.2.4)]:

$$\left(\mathbf{M}_\xi f\right)(\mathrm{x})=\mathrm{x}^\xi f(\mathrm{x})\quad(\mathrm{x}\in R^n,\ \xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)\in C^n), \qquad (2.10)$$

$$(\mathbf{R}f)(\mathrm{x})=\frac{1}{\mathrm{x}}f\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right)\ (\mathrm{x}\in R^2), \qquad (2.11)$$

$$(\mathbf{W}_\delta f)(\mathrm{x})=f\left(\frac{\mathrm{x}}{\delta}\right)\quad(\mathrm{x}\in R^n,\ \delta=(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n)\in R^n_{+\ldots+}), \qquad (2.12)$$

$$(\mathbf{C}_\nu f)(\mathrm{x})=\mathbf{e}^{\nu\,\mathrm{x}}f\left(\mathbf{e}^{\mathrm{x}}\right)=e^{\nu_1x_1}\cdot e^{\nu_2x_2}\cdots e^{\nu_nx_n}f\left(e^{x_1},e^{x_2},...,e^{x_n}\right). \qquad (2.13)$$

Известно, что преобразование Меллина (2.2) от преобразований $\mathbf{M}_\xi f$ и $\mathbf{R}f$ равно соответственно [5, формулы (1.4.44), (1.4.46)]:

$$(\mathcal{M}\,\mathbf{M}_\xi f)(\mathbf{s})=(\mathcal{M}\,f)(\mathbf{s}+\xi)\quad((\mathrm{Re}(\mathbf{s})=\overline{\nu}-\mathrm{Re}(\xi)):\mathrm{Re}(s_1)=\nu_1-\mathrm{Re}(\xi_1),\mathrm{Re}(s_2)=\nu_2-\mathrm{Re}(\xi_2)), \qquad (2.14)$$

$$(\mathcal{M}\,\mathbf{R}f)(\mathbf{s})=(\mathcal{M}\,f)(1-\mathbf{s})\quad(\mathrm{Re}(\mathbf{s})=\mathbf{v}:\mathrm{Re}(s_1)=\nu_1,\ \mathrm{Re}(s_2)=\nu_2). \qquad (2.15)$$

С учетом леммы 3.1 [4], равенства (2.14), (2.15) [5, глава 1], а также леммы 2.1 [8–10] непосредственно проверяется, что операторы $\mathbf{M}_\xi$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{W}_\delta$, $\mathbf{C}_\nu$ обладают следующими свойствами.

Лемма 2.2. *Для* $\overline{\nu}=(\nu_1,\nu_2,...,\nu_n)\in R^n_{+\ldots+}$, $\nu_1=\nu_2=...=\nu_n$, *и* $1\le\overline{r}<\infty$ *верны следующие утверждения:*

(a) $\mathbf{M}_\xi$ *является изометрическим изоморфизмом* $\mathcal{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$ *на* $\mathcal{L}_{\overline{\nu}-\mathrm{Re}(\xi),\overline{r}}$; *если* $f\in\mathcal{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$ $(1\le\overline{r}\le2)$, *то*

$$(\mathcal{M}\,\mathbf{M}_\xi f)(\mathbf{s})=(\mathcal{M}\,f)(\mathbf{s}+\xi)\quad(\mathrm{Re}(\mathbf{s})=\overline{\nu}-\mathrm{Re}(\xi)); \qquad (2.16)$$

(b) $\mathbf{R}$ *является изометрическим изоморфизмом* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$ *на* $\mathfrak{L}_{1-\overline{\nu},\overline{r}}$*; если* $f\in\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$ $(1\le\overline{r}\le 2)$*, то*

$$(\mathfrak{M}\,\mathbf{R}f)(\mathbf{s})=(\mathfrak{M}\,f)(1-\mathbf{s})\quad(\mathrm{Re}(\mathbf{s})=\overline{\nu});\tag{2.17}$$

(c) $\mathbf{W}_\delta$ *является ограниченным изоморфизмом* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$ *на себя и если* $f\in\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$ $(1\le\overline{r}\le 2)$*, то*

$$(\mathfrak{M}\,\mathbf{W}_\delta f)(\mathbf{s})=\delta^{\mathbf{s}}(\mathfrak{M}\,f)(\mathbf{s})\quad(\mathrm{Re}(\mathbf{s})=\overline{\nu});\tag{2.18}$$

(d) $\mathbf{C}_\nu$ *является изометрическим изоморфизмом* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$ *на* $L_{\overline{r}}(R^n)$.

3. $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ **- теория многомерного** $\mathrm{K}f$ **- преобразования.** Рассмотрим преобразование (1.1):

$$\left(\mathrm{K}f\right)(\mathrm{x})=\overline{h}\,\mathrm{x}^{1-(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d\,x}}\mathrm{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}}\int\limits_0^\infty \mathrm{k}\left(\mathrm{x\,t}\right)f(\mathrm{t})\,\mathrm{d\,t}\quad(\mathrm{x}>0),$$

где ядро $\mathrm{k}\in\mathfrak{L}_{1-\overline{\nu},\overline{2}}$; $\overline{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)\in C^n$; $\overline{h}=(h_1,h_2,...,h_n)\in C^n$ и $h_1\in R\setminus\{0\}$, $h_2\in R\setminus\{0\}$, ..., $h_n\in R\setminus\{0\}$.

Теорема *(а) Пусть оператор преобразования (1.1) удовлетворяет условию* $\mathrm{K}\in[\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}},\mathfrak{L}_{1-\overline{\nu},\overline{2}}]$*, тогда ядро* $\mathrm{k}\in\mathfrak{L}_{1-\overline{\nu},\overline{2}}$ *в правой части (1.1). Если для* $\nu_1\ne 1-(\mathrm{Re}(\lambda_1)+1)/h_1$, $\nu_2\ne 1-(\mathrm{Re}(\lambda_2)+1)/h_2$,..., $\nu_n\ne 1-(\mathrm{Re}(\lambda_n)+1)/h_n$ $(\nu_1=\nu_2=...=\nu_n)$ *выполняется*

$$(\mathfrak{M}\,\mathrm{k})(1-\overline{\nu}+i\,\mathrm{t})=\frac{\boldsymbol{\omega}(\mathrm{t})}{\overline{\lambda}+1-(1-\overline{\nu}+i\,\mathrm{t})\overline{h}},\tag{3.1}$$

тогда $\boldsymbol{\omega}\in L_\infty(R^n)$*, и для функции* $f\in\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *имеет место формула*

$$(\mathfrak{M}\,\mathrm{K}f)(1-\overline{\nu}+i\,\mathrm{t})=\omega(\mathrm{t})(\mathfrak{M}\,f)(\overline{\nu}-i\,\mathrm{t}).\tag{3.2}$$

(б) Обратно, для функции $\boldsymbol{\omega}\in L_\infty(R^n)$, $\overline{\nu}=(\nu_1,\nu_2,...,\nu_n)\in R^n$ $(\nu_1=\nu_2=...=\nu_n)$ *и* $\overline{h}=(h_1,h_2,...,h_n)\in R^n_{+....+}$ *существует преобразование* $\mathrm{K}\in[\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}},\mathfrak{L}_{1-\overline{\nu},\overline{2}}]$ *такое, что* (3.2) *выполняется для* $f\in\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$*. Более того, если* $\nu_1\ne 1-(\mathrm{Re}(\lambda_1)+1)/h_1$, $\nu_2\ne 1-(\mathrm{Re}(\lambda_2)+1)/h_2$,..., $\nu_n\ne 1-(\mathrm{Re}(\lambda_n)+1)/h_n$ $(\nu_1=\nu_2=...=\nu_n)$*, то преобразование* $\mathrm{K}f$ *дается* (1.1) *с ядром* k*, определяемым соотношением* (3.1).

(в) При выполнении условий (а) или (б) с $\boldsymbol{\omega}\ne 0$ *преобразование* K *взаимно однозначно действует из пространства* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *в пространство* $\mathfrak{L}_{1-\overline{\nu},\overline{2}}$*, если к тому же* $1/\boldsymbol{\omega}\in L_\infty(R^n)$*, то* K *отображает* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *на* $\mathfrak{L}_{1-\overline{\nu},\overline{2}}$ *и для функций* $f\in\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *и* $g\in\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *выполняется равенство:*

$$\int\limits_0^\infty f(\mathrm{x})\left(\mathrm{K}g\right)(\mathrm{x})\,\mathrm{d\,x}=\int\limits_0^\infty\left(\mathrm{K}f\right)(\mathrm{x})g(\mathrm{x})\,\mathrm{d\,x}.\tag{3.3}$$

Доказательство. (а) Пусть $\mathrm{K}\in[\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}},\mathfrak{L}_{1-\overline{\nu},\overline{2}}]$, где $\nu_1\ne 1-(\mathrm{Re}(\lambda_1)+1)/h_1$, $\nu_2\ne 1-(\mathrm{Re}(\lambda_2)+1)/h_2$,..., $\nu_n\ne 1-(\mathrm{Re}(\lambda_n)+1)/h_n$ $(\nu_1=\nu_2=...=\nu_n)$. Рассмотрим случай $\nu_1>1-(\mathrm{Re}(\lambda_1)+1)/h_1$, $\nu_2>1-(\mathrm{Re}(\lambda_2)+1)/h_2$,..., $\nu_n>1-(\mathrm{Re}(\lambda_n)+1)/h_n$. Для действительных чисел $a_1>0$, $a_2>0$,..., $a_n>0$ определим функцию

$$g_{\mathrm{a}}(\mathrm{t})=\begin{cases}\mathrm{t}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}-1}, & 0<\mathrm{t}<\mathrm{a};\\ 0, & \mathrm{t}>\mathrm{a};\end{cases}=\tag{3.4}$$

$$=\begin{cases}t_1^{(\lambda_1+1)/h_1-1}t_2^{(\lambda_2+1)/h_2-1}\cdots t_n^{(\lambda_n+1)/hn-1}, & 0<t_1<a_1,0<t_2<a_2,...,0<t_n<a_n;\\ 0, & t_1>a_1,t_2>a_2,...,t_n>a_n.\end{cases}$$

Тогда

$$\left\|g_{\mathrm{a}}\right\|_{\overline{\nu},\overline{2}}=\left\{\int\limits_0^{a_n}t_n^{\nu_n\cdot 2-1}...\left[\int\limits_0^{a_2}t_2^{\nu_2\cdot 2-1}\left[\int\limits_0^{a_1}t_1^{\nu_1\cdot 2-1}\left|t_1^{(\lambda_1+1)/h_1-1}t_2^{(\lambda_2+1)/h_2-1}\cdots t_n^{(\lambda_n+1)/h_n-1}\right|^2dt_1\right]dt_2\right]...dt_n\right\}^{1/2}=$$

$$=\left\{\int_0^{a_n} t_n^{2((\lambda_2+1)/h_2+\nu_2-1)-1}dt_n \cdots \int_0^{a_1} t_1^{2((\lambda_1+1)/h_1+\nu_1-1)-1}dt_1\right\}^{1/2}=\left\{\int_0^{a} \mathrm{t}^{2((\overline{\lambda}+1)/\overline{h}+\overline{\nu}-1)-1}\,\mathrm{d\,t}\right\}^{1/2}<\infty ,$$

что означает $g_{\mathrm{a}}(\mathrm{t})\in \mathsf{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$. Следовательно,

$$\left(\mathrm{K}\,g_1\right)(\mathrm{x})=\overline{h}\,\mathrm{x}^{1-(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d\,x}}\mathrm{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}...\int_0^{\infty}\mathrm{k}\left(\mathrm{x\,t}\right)\mathrm{t}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}-1}\mathrm{d\,t}=$$

$$=\overline{h}\,\mathrm{x}^{1-(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d\,x}}\mathrm{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}}\int_0^{1}\int_0^{1}...\int_0^{1}\mathrm{k}\left(\mathrm{x\,t}\right)\mathrm{t}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}-1}\mathrm{d\,t}=$$

$$=h_1h_2\cdots h_n x_1^{1-(\lambda_1+1)/h_1}x_2^{1-(\lambda_2+1)/h_1}\cdots x_n^{1-(\lambda_n+1)/h_n}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d\,x}}x_1^{(\lambda_1+1)/h_1}x_2^{(\lambda_2+1)/h_2}\cdots x_n^{(\lambda_n+1)/h_n}\times$$

$$\times\int_0^{1}\int_0^{1}\cdots\int_0^{1}\mathrm{k}\left(x_1t_1\right)\cdot\mathrm{k}(x_2t_2)\cdots\mathrm{k}(x_nt_n)\,t_1^{(\lambda_1+1)/h_1-1}t_2^{(\lambda_2+1)/h_2-1}\cdots t_n^{(\lambda_n+1)/h_n-1}dt_1\,dt_2\cdots dt_n=$$

$$=\left[x_it_i=\tau_i\,,\ i=1,2,...,n\right]=$$

$$=h_1h_2\cdots h_n x_1^{1-(\lambda_1+1)/h_1}x_2^{1-(\lambda_2+1)/h_1}\cdots x_n^{1-(\lambda_n+1)/h_n}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d\,x}}\int_0^{x_n}\int_0^{x_{n-1}}...\int_0^{x_1}\mathrm{k}\left(\tau_1,\tau_2,...,\tau_n\right)\tau^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}-1}\,\mathrm{d}\,\tau=\overline{h}\,\mathrm{k}(\mathrm{x})\,.$$

Таким образом, $\mathrm{K}\,g_1=\overline{h}\,\mathrm{k}$. Отсюда, так как $\mathrm{K}\in[\mathsf{L}_{\overline{\nu},\overline{2}},\mathsf{L}_{1-\overline{\nu},\overline{2}}]$, то $\mathrm{k}\in\mathsf{L}_{1-\overline{\nu},\overline{2}}$.

Учитывая, что $f\in\mathsf{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ и $\mathrm{k}\in\mathsf{L}_{1-\overline{\nu},\overline{2}}$, с использованием неравенства Коши–Буняковского [11]:

$$\left|\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}f(\mathrm{x})g(\mathrm{x})\,\mathrm{d\,x}\right|\le\left(\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}\left|f(\mathrm{x})\right|^2\mathrm{d\,x}\right)^{1/2}\left(\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}\left|g(\mathrm{x})\right|^2\mathrm{d\,x}\right)^{1/2}\quad(-\infty\le\mathrm{a}<\mathrm{b}\le\infty)\,, \tag{3.5}$$

будем иметь

$$\left|\mathrm{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}}\int_0^{\infty}\mathrm{k}\left(\mathrm{x\,t}\right)f(\mathrm{t})\,\mathrm{d\,t}\right|=\left|\mathrm{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}}\int_0^{\infty}\left\{\mathrm{t}^{1/2-\overline{\nu}}\,\mathrm{k}\left(\mathrm{x\,t}\right)\right\}\left\{\mathrm{t}^{-1/2+\overline{\nu}}\,f(\mathrm{t})\right\}\mathrm{d\,t}\right|\le$$

$$\le\mathrm{x}^{(\mathrm{Re}(\overline{\lambda})+1)/\overline{h}}\left\{\int_0^{\infty}\left|\mathrm{t}^{1-\overline{\nu}}\,\mathrm{k}\left(\mathrm{x\,t}\right)\right|^2\frac{\mathrm{d\,t}}{\mathrm{t}}\right\}^{1/2}\left\|f\right\|_{\overline{\nu},\overline{2}}=\mathrm{x}^{\overline{\nu}-1+(\mathrm{Re}(\overline{\lambda})+1)/\overline{h}}\left\|\mathrm{k}\right\|_{1-\overline{\nu},\overline{2}}\left\|f\right\|_{\overline{\nu},\overline{2}}=o(1)$$

при $x_1\to+0,x_2\to+0,...,x_n\to+0$. Интегрируя обе части соотношения (1.1), получаем:

$$\int_0^{\mathrm{x}}\mathrm{t}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}-1}\left(\mathrm{K}\,f\right)(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}=\overline{h}\,\mathrm{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}}\int_0^{\infty}\mathrm{k}\left(\mathrm{x\,t}\right)f(\mathrm{t})\,\mathrm{d\,t}\quad(\mathrm{x}>0)\,. \tag{3.6}$$

Для действительного $\mathrm{x}>0$ и $\mathrm{Re}(\mathbf{s})+\left[\mathrm{Re}(\overline{\lambda})+1\right]/\,\overline{h}>1$ получаем формулу преобразования Меллина (2.3) функции $g_{\mathrm{x}}(\mathrm{t})$:

$$(\mathsf{M}\,g_{\mathrm{x}})(\mathbf{s})=\frac{\overline{h}\,\mathrm{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}+\mathbf{s}-1}}{\overline{\lambda}+1-\overline{h}(1-\mathbf{s})}\ . \tag{3.7}$$

Поскольку $f\in\mathsf{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ и $g_{\mathrm{x}}\in\mathsf{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$, учитывая (2.9), получаем

$$\int_0^{\mathrm{x}}\mathrm{t}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}-1}\left(\mathrm{K}\,f\right)(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}=\int_0^{\infty}g_{\mathrm{x}}(\mathrm{t})\left(\mathrm{K}\,f\right)(\mathrm{t})\,\mathrm{d\,t}=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\overline{\nu}-i\infty}^{\overline{\nu}+i\infty}(\mathsf{M}\,g_{\mathrm{x}})(\mathbf{s})(\mathsf{M}\ \mathrm{K}\,f)(1-\mathbf{s})d\mathbf{s}=$$

$$=\frac{\overline{h}\,\mathrm{x}^{\overline{\nu}-1+(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}}}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{x}^{-i\,\mathrm{t}}\,\frac{(\mathsf{M}\ \mathrm{K}\,f)(1-\overline{\nu}+i\,\mathrm{t})}{\overline{\lambda}+1-(1-\overline{\nu}+i\,\mathrm{t})\overline{h}}\mathrm{d\,t}\,. \tag{3.8}$$

Аналогично из (2.9) и (2.18) находим

$$\bar{h}\,x^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}}\int_0^\infty k(x\,t)f(t)\,dt=\bar{h}\,x^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}}\int_0^\infty \left(W_{1/x}\,k\right)(t)f(t)\,dt=$$

$$=\frac{\bar{h}\,x^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}}}{(2\pi i)^n}\int_{1-\bar{\nu}-i\infty}^{1-\bar{\nu}+i\infty} x^{-\mathbf{s}}(\mathrm{M}\ k)(s)(\mathrm{M}f)(1-\mathbf{s})\,d\mathbf{s}=$$

$$=\frac{\bar{h}\,x^{\nu-1+(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}}}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{-i\,t}(\mathrm{M}\ k)(1-\bar{\nu}+i\,t)(\mathrm{M}f)(\bar{\nu}-i\,t)\,dt\,. \tag{3.9}$$

Подставляем (3.8) и (3.9) в (3.6), вводим обозначение:

$$F(t)=\frac{(\mathrm{M}\ \mathrm{K}\,f)(1-\bar{\nu}+i\,t)}{\bar{\lambda}+1-(1-\bar{\nu}+i\,t)\bar{h}}-(\mathrm{M}\ k)(1-\bar{\nu}+i\,t)(\mathrm{M}f)(\bar{\nu}-i\,t)\,, \tag{3.10}$$

полагаем $x=e^{-y}$, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\,yt}\,F(t)\,dt=0,\quad y\in R^n\,. \tag{3.11}$$

Согласно свойству (а) леммы 2.1 преобразования Меллина (2.3) $\mathrm{M}\ \in\left[f\in \mathrm{L}_{\sigma,\bar{2}},L_{\bar{2}}(R^n)\right]$ для любого $\sigma\in R^n$. Таким образом,

$$(\mathrm{M}\ \mathrm{K}\,f)(1-\bar{\nu}+i\,t)\,,\ (\mathrm{M}\,g_1)(\bar{\nu}-i\,t)=\frac{\bar{h}}{\bar{\lambda}+1-(1-\bar{\nu}+i\,t)\bar{h}}\,,\ (\mathrm{M}\ k)(1-\bar{\nu}+i\,t)\,,\ (\mathrm{M}f)(\bar{\nu}-i\,t)$$

принадлежат пространству $L_{\bar{2}}(R^n)$. Значит, выражение в левой части (3.10) также принадлежит пространству $L_{\bar{2}}(R^n)$. Далее равенство (3.11) означает, что $F(t)=0$. Определяя $\boldsymbol{\omega}$ через (3.1), с учетом (3.10), получаем (3.2).

Осталось показать, что $\boldsymbol{\omega}\in L_\infty(R^n)$. Из (3.2) следует, что если $f\in \mathrm{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$, тогда $\omega(t)(\mathrm{M}f)(\bar{\nu}-i\,t)\ \in L_{\bar{2}}(R^n)$. Согласно свойству (а) леммы 2.1 преобразование Меллина (2.2) отображает пространство $\mathrm{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ $(\nu_1=\nu_2=\ldots=\nu_n)$ на пространство $L_{\bar{2}}(R^n)$ и, таким образом, $\boldsymbol{\omega}(t)\phi(t)\in L_{\bar{2}}(R^n)$ для любой функции $\phi(t)\in L_{\bar{2}}(R^n)$.

Таким образом, $\boldsymbol{\omega}\in L_\infty(R^n)$. Это завершает доказательство (а) для случая $\nu_1>1-(\mathrm{Re}(\lambda_1)+1)/h_1$, $\nu_2>1-(\mathrm{Re}(\lambda_2)+1)/h_2,\ldots,\ \nu_n>1-(\mathrm{Re}(\lambda_n)+1)/h_n$.

Случай $\nu_1<1-(\mathrm{Re}(\lambda_1)+1)/h_1$, $\nu_2<1-(\mathrm{Re}(\lambda_2)+1)/h_2,\ldots,\ \nu_n<1-(\mathrm{Re}(\lambda_n)+1)/h_n$ доказывается аналогично после замены функции $g_a(t)$ в (3.4) функцией $h_a(t)$, определяемой для $a>0$, формулой

$$h_a(t)=\begin{cases}0, & 0<t<a;\\ t^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}-1}, & t>a\,.\end{cases} \tag{3.12}$$

Докажем случай (b). Полагаем, что $\omega \in L_\infty(R^n)$ и $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$. Из леммы 2.1 преобразование Меллина унитарно отображает пространство $\mathfrak{L}_{1-\bar{\nu},\bar{2}}$ на пространство $L_2(R^n)$, поэтому существует единственная функция $g \in \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu},\bar{2}}$, такая, что

$$(\mathfrak{M} g)(1-\bar{\nu}+i\,t) = \omega(t)(\mathfrak{M} f)(\bar{\nu}-i\,t)\,.$$

Мы определяем K как $\mathrm{K} f = g$. Тогда (3.2) выполняется. K является также линейным оператором, а именно, если $f_1 \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$, $f_2 \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ $(\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_n)$ и $\mathbf{c}_1 \in R^n$, $\mathbf{c}_2 \in R^n$, тогда

$$(\mathfrak{M}\ \mathrm{K}(\mathbf{c}_1 f_1 + \mathbf{c}_2 f_2))(1-\bar{\nu}+i\,t) = \omega(t)(\mathfrak{M}\ (\mathbf{c}_1 f_1 + \mathbf{c}_2 f_2))(\bar{\nu}-i\,t) =$$

$$= c_1\omega(t)\,(\mathfrak{M}f_1)(\bar{\nu}-i\,t) + c_2\omega(t)\,(\mathfrak{M}f_2)(\bar{\nu}-i\,t) = \mathbf{c}_1(\mathfrak{M}\ f_1)(1-\bar{\nu}+i\,t) + \mathbf{c}_2(\mathfrak{M}\ f_2)(1-\bar{\nu}+i\,t) =$$

$$= (\mathfrak{M}(c_1\,Kf_1 + c_2\,Kf_2))(1-\bar{\nu}+i\,t),$$

что означает выполнение равенства: $\mathrm{K}(\mathbf{c}_1 f_1 + \mathbf{c}_2 f_2) = \mathbf{c}_1\,\mathrm{K}\,f_1 + \mathbf{c}_2\,\mathrm{K}\,f_2$.

Далее из леммы 2.1 следует, что взяв в качестве $\omega^* = \omega(-t)$, получаем

$$\|\mathrm{K} f\|_{1-\bar{\nu},\bar{2}} = \|\mathfrak{M}\ \mathrm{K} f\|_{\bar{2}} = \left\|\omega^*\mathfrak{M}\ f\right\|_{\bar{2}} \le \left\|\omega^*\right\|_\infty \|\mathfrak{M}\ f\|_{\bar{2}} = \left\|\omega^*\right\|_\infty \|f\|_{\bar{\nu},\bar{2}},$$

где $\|\omega\|_\infty$ есть норма ω в пространстве $L_\infty(R^n)$ (2.6). Это означает, что $\mathrm{K} \in [\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}, \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu},\bar{2}}]$.

Пусть $\nu_1 \ne 1-(\mathrm{Re}(\lambda_1)+1)/h_1$, $\nu_2 \ne 1-(\mathrm{Re}(\lambda_2)+1)/h_2$, ..., $\nu_n \ne 1-(\mathrm{Re}(\lambda_n)+1)/h_n$ $(\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_n)$; пусть $\mathrm{k}(t)$ определена в (3.1). Тогда $\mathrm{k} \in \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu},\bar{2}}$ на основании (c) леммы 2.1, поскольку $\frac{1}{(\mathrm{p}+i\,t)} \in L_{\bar{2}}(R^n)$ для постоянного вектора $\mathrm{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $p_1 \ne 0, p_2 \ne 0, \ldots, p_n \ne 0$. Если $\nu_1 < 1-(\mathrm{Re}(\lambda_1)+1)/h_1$, $\nu_2 < 1-(\mathrm{Re}(\lambda_2)+1)/h_2$, ..., $\nu_n < 1-(\mathrm{Re}(\lambda_n)+1)/h_n$ $(\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_n)$ и функция $h_{\mathrm{a}}(t)$ дается (3.12), тогда

$$(\mathfrak{M}\ h_{\mathrm{x}})(\mathbf{s}) = \frac{-\bar{h}\,\mathrm{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}+\mathbf{s}-1}}{\bar{\lambda}+1-\bar{h}(1-\mathbf{s})}\,. \qquad (3.13)$$

Из (3.12), (2.9), (3.13), (3.2), (3.1) и (2.12), если $\mathrm{x} > 0$, аналогично (3.8), получаем

$$\int_{\mathrm{x}}^{\infty} t^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}-1}\left(\mathrm{K} f\right)(t)\,dt = \int_0^{\infty} h_{\mathrm{x}}(t)\left(\mathrm{K} f\right)(t)\,d\,t = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\bar{\nu}-i\infty}^{\bar{\nu}+i\infty}(\mathfrak{M}\,h_{\mathrm{x}})(\mathbf{s})(\mathfrak{M}\ \mathrm{K} f)(1-\mathbf{s})d\mathbf{s} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-\bar{h}\,\mathrm{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}+\bar{\nu}+i\,t-1}}{\bar{\lambda}+1-\bar{h}(1-\bar{\nu}-i\,t)}(\mathfrak{M}\ \mathrm{K} f)(1-\bar{\nu}-i\,t)\,d\,t =$$

$$= \frac{-\bar{h}}{(2\pi)^n}\,\mathrm{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}+\bar{\nu}-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{x}^{i\,t}}{\bar{\lambda}+1-\bar{h}(1-\bar{\nu}-i\,t)}\,\omega^*(t)(\mathfrak{M} f)(\bar{\nu}+i\,t)\,d\,t =$$

$$= \frac{-\overline{h}}{(2\pi)^n} x^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}+\overline{\nu}-1} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{it} (\mathrm{M}\, k)(1-\overline{\nu}-it)(\mathrm{M} f)(\overline{\nu}+it)\, dt =$$

$$= \frac{-\overline{h}}{(2\pi i)^n} x^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}+\overline{\nu}-1} \int_{1-\overline{\nu}-i\infty}^{1-\overline{\nu}+i\infty} x^{1-\overline{\nu}-\mathbf{s}} (\mathrm{M}\, k)(\mathbf{s})(\mathrm{M} f)(1-\mathbf{s})\, d\mathbf{s} =$$

$$= \frac{-\overline{h}}{(2\pi i)^n} x^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}} \int_{1-\overline{\nu}-i\infty}^{1-\overline{\nu}+i\infty} (\mathrm{M}\, W_{1/x} k)(\mathbf{s})(\mathrm{M} f)(1-\mathbf{s})\, d\mathbf{s} =$$

$$= \frac{-\overline{h}}{(2\pi i)^n} x^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}} \int_{1-\overline{\nu}-i\infty}^{1-\overline{\nu}+i\infty} (\mathrm{M}\, k(xt))(\mathbf{s})(\mathrm{M} f)(1-\mathbf{s})\, d\mathbf{s} = -\overline{h}\, x^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}} \int_{0}^{\infty} k(xt) f(t)\, dt .$$

Дифференцируя левую и правую части последнего равенства, получаем (1.1). Аналогично для случая $\nu_1 > 1-(\mathrm{Re}(\lambda_1)+1)/h_1$, $\nu_2 > 1-(\mathrm{Re}(\lambda_2)+1)/h_2$,…, $\nu_n > 1-(\mathrm{Re}(\lambda_n)+1)/h_n$ $(\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_n)$ используется формула (3.7) для функции $g_a(t)$, определяемой в (3.4). Точные расчеты мы опускаем.

Докажем (с). Полагаем $\omega \neq 0$. Тогда из (3.2) при $f \in L_{\overline{\nu},\overline{2}}$ и $\mathrm{K} f = 0$ следует равенство $\omega(t)(\mathrm{M} f)(\overline{\nu}-it) = 0$, отсюда $(\mathrm{M} f)(\overline{\nu}-it) = 0$.

Это означает, что $f = 0$, и преобразование $\mathrm{K} f$ взаимно однозначно. Мы полагаем, что $1/\omega \in L_\infty(R^n)$. На основании пункта (b) теоремы существует преобразование $\mathrm{T} \in [L_{1-\overline{\nu},\overline{2}}, L_{\overline{\nu},\overline{2}}]$, такое, что если $g \in L_{1-\overline{\nu},\overline{2}}$, то

$$(\mathrm{M}\, \mathrm{T} g)(\overline{\nu}+it) = \frac{1}{\omega(-t)} (\mathrm{M} g)(1-\overline{\nu}-it) \cdot$$

На основании (3.2) мы имеем

$$(\mathrm{M}\, \mathrm{KT} g)(1-\overline{\nu}+it) = \omega(t)(\mathrm{M}\, \mathrm{T} g)(\overline{\nu}-it) = (\mathrm{M} g)(1-\overline{\nu}+it) .$$

Таким образом, для всякой функции $g \in L_{1-\overline{\nu},\overline{2}}$ выполняется тождество $\mathrm{KT} g = g$, и значит, K отображает пространство $L_{\overline{\nu},\overline{2}}$ на $L_{1-\overline{\nu},\overline{2}}$.

Далее, если функции $f \in L_{\overline{\nu},\overline{2}}$ и $g \in L_{\overline{\nu},\overline{2}}$, то из (2.9) и (3.2) мы окончательно получаем

$$\int_0^\infty f(x)\big(\mathrm{K} g\big)(x)\, dx = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\overline{\nu}-i\infty}^{\overline{\nu}+i\infty} (\mathrm{M}\, f)(\mathbf{s})(\mathrm{M}\, \mathrm{K} g)(1-\mathbf{s}) d\mathbf{s} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{M}\, f)(\overline{\nu}+it)(\mathrm{M}\, \mathrm{K} g)(1-\overline{\nu}-it) dt = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{M}\, f)(\overline{\nu}+it)\, \omega(-t)(\mathrm{M}\, g)(\overline{\nu}+it) dt =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(t)(\mathrm{M}\, f)(\overline{\nu}-it)(\mathrm{M}\, g)(\overline{\nu}-it) dt =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{M}\, \mathrm{K} f)(1-\overline{\nu}+it)(\mathrm{M}\, g)(1-(1-\overline{\nu}+it)) dt =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{1-\overline{\nu}-i\infty}^{1-\overline{\nu}+i\infty} (\mathrm{M}\, \mathrm{K} f)(\mathbf{s})(\mathrm{M}\, g)(1-\mathbf{s}) d\mathbf{s} = \int_0^\infty (\mathrm{K} f)(x)\, g(x) dx .$$

Теорема доказана.

Заключение. Итогом проделанных исследований являются результаты, обобщающие полученные ранее для соответствующего одномерного преобразования.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Ву Ким Туан. Композиционная структура интегральных преобразований / Ву Ким Туан, О.И. Маричев, С.Б. Якубович // Докл. АН СССР. – 1986. – Т. 286, № 4. – С. 786–790.
3. Маричев, О.И. Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул) / О.И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1978. – 310 с.
4. Kilbas, A.A. H-Transforms. Theory and Applications / A.A. Kilbas, M.H. Saigo. – London: Chapman and Hall. CRC Press, 2004. – 401 p.
5. Kilbas, A.A. Theory and applications of fractional differential equations / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – 523 p.
6. Yu. A. Brychkov. Multidimensional Integral Transformations / H.-Y. Glaeske, A.P. Prudnikov, Vu Kim Tuan. – Gordon And Breach, Philadelphia, 1992.
7. Никольский, С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С.М. Никольский. – М.: Наука, 1975. – 455 с.
8. Rooney, P.G. On integral transformations with *G*- function kernels / P.G. Rooney // Proc. Royal Soc. Edinburgh. – Sect. A. – 1982/83. – Vol. 93. – P. 265–297.
9. Rooney, P.G. On the range of the integral transformation / P.G. Rooney // Canad. Math. Bul. – 1994. – Vol. 37, № 4. – P. 545–548.
10. Rooney, P.G. On the representation of functions by the Hankel and some related transformations / P.G. Rooney // Proc. Royal Soc. Edinburgh. – Sect. A. – 1995. – Vol. 125, № 3. – P. 449–463.
11. Ситник, С.М. Уточнения и обобщения классических неравенств / С.М. Ситник // Исследования по математическому анализу. Сер., Математический форум / редкол.: Ю.В. Коробейник, А.Г. Кусраев. – Владикавказ: Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН и Правительства Республики Северная Осетия-Алания, 2009. – Т. 3. – С. 221–266.

R E F E R E N C E S

1. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodniye drobnogo poriadka i nekotoriye ikh prilozheniya* [Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of Their Appendices], Mn.: Nauka i tekhnika, 1987, 688 p.
2. Voo Kim Tuan, Marichev O.I., Yakubovich S.B. *Dokl. AN SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1986, 4(286), pp. 786–790.
3. Marichev O.I. *Metod vychisleniya integralov ot spetsialnykh funktsii (teoriya i tablitsi formul)* [Method of Special Function Integral Calculation (Theory and Formula Tables)], Mn.: Nauka i tekhnika, 1978, 310 p.
4. Kilbas, A.A. H-Transforms. Theory and Applications / A.A. Kilbas, M.H. Saigo. – London: Chapman and Hall. CRC Press, 2004. – 401 p.
5. Kilbas, A.A. Theory and applications of fractional differential equations / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – 523 p.
6. Yu. A. Brychkov. Multidimensional Integral Transformations / H.-Y. Glaeske, A. P. Prudnikov, Vu Kim Tuan. – Gordon And Breach, Philadelphia, 1992.
7. Nikolski S.M. *Problizheniye funktsii peremennykh i teoremy vlozheniya* [Nearing the Functions of Many Variables and Theorems of Inclusion], M.: Nauka, 1975, 455 p.
8. Rooney, P.G. On integral transformations with *G*- function kernels / P.G. Rooney // Proc. Royal Soc. Edinburgh. – Sect. A. – 1982/83. – Vol. 93. – P. 265–297.
9. Rooney, P.G. On the range of the integral transformation / P.G. Rooney // Canad. Math. Bul. – 1994. – Vol. 37, № 4. – P. 545–548.
10. Rooney, P.G. On the representation of functions by the Hankel and some related transformations / P.G. Rooney // Proc. Royal Soc. Edinburgh. – Sect. A. – 1995. – Vol. 125, № 3. – P. 449–463.
11. Sitnik S.M. *Issledovaniya po matematicheskomu analizu. Seriya: Matematicheski Forum.* [Mathematical Analysis Studies. Series: Mathematical Forum], Vladikavkaz: Yuzhni matematicheski institute Vladikavkazskogo nauchnogo tsentra RAN i Pravitelstva Respubliki Severnaya Osetiya-Alaniya, 2009, 3, pp. 221–266.

Поступила в редакцию 11.05.2019

Адрес для корреспонденции: e-mail: skoromnik@gmail.com – Скоромник О.В.