СВОЙСТВО РАВНОМЕРНОЙ ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А.А. Козлов, И. Туфик

Рассмотрим линейное дифференциальное управляемое уравнение

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)v, \quad x \in \mathfrak{H}_1, \quad v \in \mathfrak{H}_2, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_1$. Линейную оператор-функцию $A(\cdot) : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_1$ будем считать интегрально ограниченной, т.е. для нее выполняется неравенство

$$\sup_{t\geqslant 0} \int_t^{t+1} \|A(\tau)\|\, d\tau \leqslant a,$$

(здесь и далее под нормой оператора $C : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$ подразумевается величина $\|C\| = = \sup\{\|Cy\|_2/\|y\|_1,\ y \in \mathfrak{H}_1,\ y \neq 0\}$, где $\|\cdot\|_k$ – норма в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_k$, $k = 1, 2$). Линейную оператор-функцию $B(\cdot) : \mathfrak{H}_2 \to \mathfrak{H}_1$ будем полагать непрерывной и ограниченной. В качестве управлений $v(\cdot)$ в уравнении (1) будем рассматривать измеримые по Лебегу и ограниченные на всей своей области определения функции.

Определение 1. Состояние $x_0 \in \mathfrak{H}_1$ системы (1) называется *управляемым в момент времени* t_0, если его можно перевести за конечное время $[t_0, t_1]$ в нуль вдоль решения уравнения (1), т.е. существуют $t_1 > t_0$ и управление $v : [t_0, t_1] \to \mathfrak{H}_2$ такие, что решение $x(\cdot)$ уравнения (1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ и управлением $v(\cdot)$ удовлетворяет равенству $x(t_1) = 0$.

Определение 2. Уравнение (1) называется *вполне управляемым в момент времени* t_0, если всякое состояние $x_0 \in \mathfrak{H}_1$ управляемо в этот момент времени.

Пусть $U(t, \tau)$, $t, \tau \geqslant 0$, – эволюционный (разрешающий) оператор [1, с. 147] линейного дифференциального уравнения (1) с нулевым управлением $v(\cdot)$.

Теорема 1. *Состояние $x_0 \in \mathfrak{H}_1$ системы (1) управляемо в момент времени t_0 тогда и только тогда, когда найдется такие момент времени $t_1 > t_0$ и допустимое управление $v : [t_0, t_1] \to \mathfrak{H}_2$, что выполняется равенство*

$$x_0 = -\int_{t_0}^{t_1} U(t_0, \tau)B(\tau)v(\tau)\, d\tau.$$

Для всякого непрерывного линейного оператора F, переводящего гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ в гильбертово пространство $\mathfrak{G}$, определим сопряженный оператор F^*, переводящий пространство $\mathfrak{G}^*$ непрерывных линейных функционалов в $\mathfrak{G}$, в пространство $\mathfrak{H}^*$ непрерывных линейных функционалов на $\mathfrak{H}$.

Определение 3. *Оператором управляемости* (*оператором Калмана*) уравнения (1) на отрезке $[t_0, t_1]$ назовем оператор $\mathfrak{W}(t_0, t_1) : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_1$ вида

$$\mathfrak{W}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} U(t_0, \tau)B(\tau)B^*(\tau)U^*(t_0, \tau)\, d\tau.$$

Очевидно, что при любых $t_0, t_1 \geqslant 0$ оператор $\mathfrak{W}(t_0, t_1)$ является линейным оператором.

Определение 4 [1, с. 50]. Оператор $H : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ называется *эрмитовым,* если $H = H^*$.

Теорема 2. *При всех $t_0, t_1 \geqslant 0$ оператор Калмана $\mathfrak{W}(t_0, t_1)$ является эрмитовым.*

Следствие 1. *При всех $t_0, t_1 \geqslant 0$ форма $(\mathfrak{W}(t_0, t_1)x, x)$ принимает только вещественные значения.*

Определение 5 [1, с. 50]. Оператор $H : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_1$ называется *неотрицательным,* если форма (Hx, x) неотрицательна при любом $x \neq 0$.

Теорема 3. *При всех $t_0, t_1 \geqslant 0$ оператор Калмана $\mathfrak{W}(t_0, t_1)$ является неотрицательным.*

Определение 6 [1, с. 26]. Точка комплексной плоскости называется *регулярной точкой* оператора $H : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_1$, если в существует оператор (*резольвента* оператора H) $R_\lambda = (H - \lambda I)^{-1}$. Известно, что множество всех регулярных точек оператора H открыто. Его дополнение $\sigma(H)$ называтся *спектром* оператора H.

Замечание 1. Известно [1, с. 50], что спектр эрмитова оператора $\sigma(H)$ представляет собой замкнутое ограниченное множество на вещественной оси. Наименьший сегмент, содержащий в себе спектр $\sigma(H)$, обозначают $[\lambda_m(H), \lambda_M(H)]$, причем имеют место равенства $\lambda_m(H) = \inf\{(Hx, x), \|x\| = 1\}$ и $\lambda_M(H) = \sup\{(Hx, x), \|x\| = 1\}$.

Определение 7 [1, с. 50]. Оператор $H : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_1$ называют *равномерно положительным,* если его форма (Hx, x) равномерно положительна на единичной сфере $S = \{x : \|x\| = 1\}$ в $\mathfrak{H}_1$, т.е. если $\lambda_m(H) > 0$.

Замечание 2 [1, с. 50]. Равномерно положительный оператор обратим, причем для нормы обратного оператора H^{-1} справедливо неравенство $\|H^{-1}\| \leqslant 1/\lambda_m(H) < +\infty$.

Определение 8 [2, с. 82]. Уравнение (1) называется *равномерно вполне управляемым*, если найдутся такие $\sigma > 0$ и $\alpha > 0$, что при каждых $t_0 \geqslant 0$ и $\xi \in \mathfrak{H}_1$ для оператора Калмана уравнения (1) выполнено неравенство

$$(\mathfrak{W}(t_0, t_0 + \sigma)\xi,\, \xi) \geqslant \alpha\|\xi\|^2$$

и *σ-равномерно вполне управляемым*, если уравнение (1) равномерно вполне управляемо на отрезках длины σ. Иначе, называется *равномерно вполне управляемым*, если найдется такое $\sigma > 0$, что при всяком $t_0 \geqslant 0$ оператор Калмана $\mathfrak{W}(t_0, t_0 + \sigma)$ уравнения (1) является равномерно положительным оператором.

Теорема 4. *Если уравнение* (1) *σ-равномерно вполне управляемо, то существует такое число $\beta > 0$, что при любом $t_0 \geqslant 0$ выполнено неравенство*

$$\|(\mathfrak{W}^{-1}(t_0, t_0 + \sigma)\xi, \xi)\| \leqslant \beta.$$

Определение 8 [2, с. 90]. Уравнение (1) называется *равномерно вполне управляемым*, если существуют такие числа $\sigma > 0$ и $\gamma > 0$, что при любых $t_0 \geqslant 0$ и $x_0 \in \mathfrak{H}_1$ найдется измеримое и ограниченное управление $v : [t_0, t_0 + \sigma] \to \mathfrak{H}_2$, при всех $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$ удовлетворяющее неравенству $\|u(t)\| \leqslant \gamma\|x_0\|$ и переводящее вектор начального состояния $x(t_0) = x_0$ уравнения (1) в нуль на этом отрезке.

Теорема 5. *Уравнение* (1) σ*-равномерно вполне управляемо в том и только в том случае, когда для любого* $t_0 \geqslant 0$ *оператор Калмана равномерно положителен на отрезке* $[t_0, t_0 + \sigma]$.

Работа выполнялась в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция–2020» (подпрограмма 1, задание 1.2.01).

Литература

1. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* М., 1970.

2. Макаров Е. К., Попова С. Н. *Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем.* Мн.: Беларус. навука, 2012.