

Министерство науки и образования Российской Федерации

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Российский университет транспорта

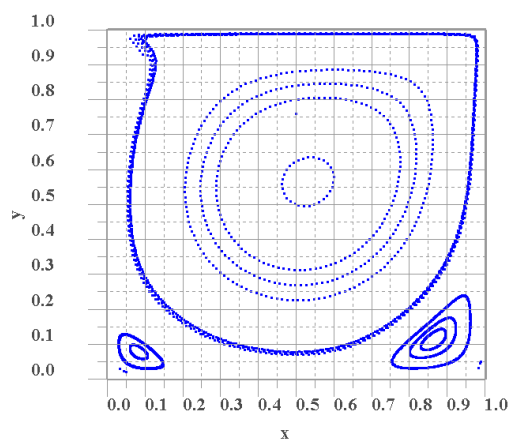
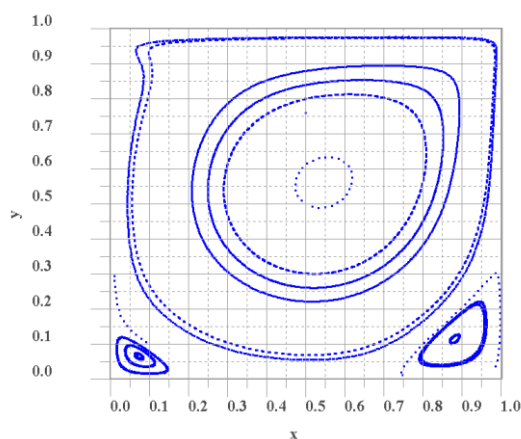
Полоцкий государственный университет

ВОЛОСОВА Н.К. (Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана – Национальный исследовательский университет);

ВОЛОСОВ К.А., ВОЛОСОВА А.К. (Российский университет транспорта);

ПАСТУХОВ Д.Ф., ПАСТУХОВ Ю.Ф. (Полоцкий университет);

СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ГИДРОДИНАМИКЕ



Москва

2022

УДК 519.6: 517.958

Рецензенты:

А.А. Козлов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и дифференциальных уравнений Полоцкого государственного университета;

Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К..

Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.

Сборник статей по гидродинамике/ Н.К. Волосова, К.А. Волосов, А.К. Волосова, Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, - 1 - е изд., – Москва: ПГУ, 2022. – 219 с.

Сборник статей с численными решениями гидродинамических задач в прямоугольной области содержит 18 работ с точными методами решения задачи, с аппроксимацией всех уравнений, начальных и краевых условий не хуже чем с четвертым порядком погрешности.

Материал книги условно разделен на три части для быстрого поиска нужного алгоритма или программы. Все программы написаны на языке FORTRAN, предназначенного для математических расчетов.

Для студентов университетов, педагогических вузов, а также для студентов технических вузов, преподавателей, инженеров, программистов использующих в своей практической деятельности численные методы решения гидродинамических задач.

УДК 519.6: 517.958

© Оформление УО «Полоцкий государственный университет», 2022

Содержание

1. Введение.	5
Часть 1. Методы решения уравнения Пуассона на прямоугольнике за конечное число элементарных операций.	
1. Конечные методы решения уравнения Пуассона на произвольном прямоугольнике с краевым условием Дирихле. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.	6
2. Модифицированное разностное уравнение К.Н. Волкова для уравнения Пуассона на прямоугольнике с четвертым порядком погрешности. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.	21
3. О решении уравнения Пуассона на прямоугольнике с четвертым порядком погрешности за конечное число элементарных операций. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.	30
4. О решении уравнения Пуассона на прямоугольнике с шестым порядком погрешности за конечное число элементарных операций. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.	40
5. Конечные методы решения уравнения Пуассона на прямоугольнике прогонкой столбцов неизвестной матрицы с шестым порядком погрешности. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.	51
Часть 2. Решение гидродинамических задач в прямоугольной каверне при больших числах Рейнольдса	
6. О роли профиля скорости на верхнем отрезке в гидродинамической задаче для прямоугольной каверны. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.	63
7. Возможные виды течения в закрытой каверне и противоречия в задаче с подвижной крышкой. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.	72
8. Вычисление поля давления по полю скорости в гидродинамической задаче для прямоугольной каверны. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.	89
9. Нестационарная гидродинамическая задача в открытой прямоугольной каверне. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.	101
Часть 3. Вязкие течения при малых числах Рейнольдса. Математическая модель образования фибрина в аневризмах кровеносных капилляров.	
10.Обобщенная модель открытой каверны для аневризмы кровеносных сосудов. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.	110
11. О нестационарном уравнении диффузии с полной производной по времени на прямоугольнике. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.	121
12. Мягкие краевые условия в гидродинамической задаче для профиля скорости в открытой прямоугольной каверне. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.	129
13. Простейшая математическая модель образования фибрина в аневризмах кровеносных капилляров. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.	136
14. Математическая модель динамики образования фибрина в аневризмах кровеносных капилляров. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.	148

Приложение.

15. Геометрический подход для качественного поиска конвективных ячеек по температурному полю. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Сперанская О.А. 161
16. Моделирование синхронного и асинхронного турбуляторов в ANSYS Fluent. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. 173
17. Вычисление производных дробного порядка с высокой степенью точности. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. 183
18. Вычисление производных дробного порядка, принимающего значения на интервале(1,2) с высокой степенью точности. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. 195
- Список литературы 209

Введение

Сборник статей по гидродинамике включает работы авторов, полученные за несколько последних лет. Условно статьи разбиты на три части.

Первая часть относится к методам решения уравнения Пуассона на прямоугольнике за конечное число элементарных операций. В ней пять статей. В первой идет речь об алгоритме решения уравнения на произвольном прямоугольнике за конечное число элементарных операций методом прогонки строк неизвестной матрицы с равными равномерными шагами по координатным осям. Во второй работе описан алгоритм решения уравнения Пуассона с иррациональным отношением шагов по осям. Третья и четвертая работы содержат алгоритмы решения уравнения Пуассона с четвертым и шестым порядками погрешности соответственно. В пятой работе впервые в научной литературе описан полученный нами алгоритм решения уравнения Пуассона на прямоугольнике методом прогонки столбцов неизвестной матрицы с шестым порядком погрешности. Получены оценки для корректности указанных методов прогонки.

Во второй части собраны четыре статьи. Все они преследуют цель выявить преимущества при решении гидродинамической задачи полученными конечными алгоритмами для уравнения Пуассона в закрытой и открытой прямоугольной каверне при больших числах Рейнольдса $Re=300-1000$. Вторая статья исследует возможные трехмерные течения в кубической каверне. В третьей указан алгоритм пересчета поля давления по известному полю скорости. Четвертая работа посвящена нестационарной гидродинамической задаче в открытой прямоугольной каверне с предельно малым зазором и сведения ее к задаче в закрытой каверне.

Третья часть содержит несколько работ для вязкого течения жидкости. Первая статья обобщает гидродинамическую задачу для течения жидкости через боковые стенки прямоугольной каверны. Вторая работа посвящена подбору шагов по координатам и времени для нестационарного уравнения динамики вихря, чтобы увеличить точность расчета и ускорить переходные временные процессы. Третья работа анализирует мягкие краевые условия профиля скорости в гидродинамической задаче для открытой каверны. Четвертая работа посвящена простейшей математической модели образования фибрина в аневризме прямоугольной каверны для установившегося поля скорости. Пятая работа указывает поправки решения гидродинамической задачи образования фибрина в аневризмах капилляров диаметром 5 мкм для вязкого течения крови с малыми числами Рейнольдса для переходных процессов.

Приложение содержит качественные методы решения двух гидродинамических задач. В первой указан геометрический алгоритм поиска конвективных ячеек по температурному разрезу, через который проходят интенсивные потоки тепла. Вторая задача - моделирование турбулятора в оболочке ANSYS Fluent решается в программной среде ANSYS WORKBENCH. Поведение вязких, но нелинейных и неньютоновских жидкостей описывают уравнения в частных производных дробного порядка. Поэтому нами в сборник статей включены 2 работы для численного расчета с двойной точностью производных дробного порядка отдельно для интервалов порядка производной (0,1) и (1,2).

Все программы в работах написаны на языке FORTRAN с использованием математической библиотеки `imsl`, а для вычисления обратных матриц дополнительно библиотеки `msimsl` в первой работе и далее.

Список литературы

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы/Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – 7-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – 636 с.: ил. – (Классический университетский учебник).
2. Бахвалов Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях / Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков. – М.: БИНОМ, 2010. – 240 с.
3. Пикулин В.П. Практический курс по уравнениям математической физики/ В.П. Пикулин, С.И. Похожаев. – Москва: МЦНМО, 2004. – 208 с. – ISSN 5-94057-148-4.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа/ А.Н. Колмогоров, Фомин С.В. – М.: Наука, 1976, 543 с.
5. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерностей.- М.:Наука, 1973, 577 С.
6. В.П. Маслов, В.Г. Данилов, К.А. Волосов. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса (эволюция диссипативных структур) С добавлением Н.А. Колобова, - М.:Наука, 1987, 352 с.
7. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре: Учебное пособие для вузов. – М.: Наука. Физматлит. 1984. – 416 с.
8. Волков Ю.С., Мирошниченко В.Л. Оценки норм матриц, обратных к матрицам монотонного вида и вполне неотрицательным матрицам/ Ю.С. Волков, В.Л. Мирошниченко//Сибирский математический журнал. Т.50. – 2009. – №6. – С. 1249 – 1254 .
9. Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н., Карпенко А.Г., Козелков А.С., Тетерина И.В. Методы ускорения газодинамических расчетов на неструктурированных сетках. - М.: Издательство: Физматлит, 2013 - 709 с.
10. Годунов С.К. Современные аспекты линейной алгебры/ С.К. Годунов. – Новосибирск: Научная книга, 1997. 407 с.
11. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Линейная алгебра/ В.А. Ильин, Э.Г. Поздняк //Главная редакция физико-математической литературы ”Наука”. – 1978 . – 304 С.
12. Некоторые методы уравнения теплопроводности в параллелепипеде, полученные методом быстрых разложений/А.Д. Чернышев, В.В. Горяйнов, С.В. Кузнецов, О.Ю. Никифорова// Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 07-09 декабря 2020 года/ФБГОУ ВО “Воронежский государственный университет”. – Воронеж: Научно-исследовательские публикации, 2021. – С. 1461-1473.
13. Применение быстрых разложений для построения точных решений задачи о прогибе прямоугольной мембраны под действием переменной нагрузки/ А.Д. Чернышев, В.В. Горяйнов, С.В. Кузнецов, О.Ю. Никифорова//Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2021. №70. – С. 127-142. DOI 10.17223/19988621/70/11.
14. Бартенев О.В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL: Ч.1. – М.: ДИАЛОГ – МИФИ, 2001. – 437 с.
15. A. Salih. Streamfunction - Vorticity Formulation//Department of Aerospace Engineering Indian Institute of Space Science and Technology, Thiruvananthapuram-Mach 2013. p.10.

16. Фомин А.А., Фомина Л.Н. Численное моделирование течения жидкости в плоской каверне при больших числах Рейнольдса. Вычислительная механика сплошных сред. 2014. Т. 7. №4. С. 363-377.
17. Волосова Н.К. и др. Эффективная итерационная формула для краевой задачи уравнения Пуассона со сложно распределенными источниками// Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: сб. материалов науч. конф., Герценовские чтения – 2019, СПб., 08-12 апр. 2019 г./ Рос. гос. пед. ун-т им. А.И. Герцена. – СПб, 2019. – С. 201-208.
18. Волосова Н.К. Математическая модель динамики образования фибрина в аневризмах кровеносных капилляров// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 12-1 (63). С. 11-17.
19. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Обобщенная модель открытой каверны для аневризмы кровеносных сосудов// Евразийское Научное Объединение. – 2021. № 8-1 (78). С. 18-23.
20. Пастухов Д.Ф. Минимальная разностная схема для уравнения Пуассона в параллелепипеде с шестым порядком погрешности/ Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2019. – № 4. – С. 154–174.
21. Вакуленко С.П., Волосова Н.К., Пастухов Д.Ф. Способы передачи QR-кода в стеганографии/ С.П. Вакуленко, Н.К. Волосова, Д.Ф. Пастухов // Мир транспорта. – 2018. Т.16. № 5(78). – С. 14-25. – EDN: YNQNQT
22. Пастухов Д.Ф., Волосова Н.К., Волосова А.К. Некоторые методы передачи QR-кода в стеганографии/ Д.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова, А.К. Волосова // Мир транспорта. – 2019. – Т.17. № 3(82). – С. 16-39. – EDN: RSGSLR.
23. Волосова Н.К., Пастухов Д.Ф., Волосов К.А. Методы расширения области применения методов математической физики//Международная конференция “Квазилинейные уравнения и обратные задачи”. QIPA conference handbook and proceedings. – М.: МФТИ, 2018. – С 20.
24. Волосова Н.К. Векторный аналог метода прогонки для решения трех - и пятидиагональных матричных уравнений/ Н.К. Волосова, К.А. Волосов, А.К. Волосова, Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2019. – № 12. – С. 101–115.
25. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. О решении уравнения Пуассона на прямоугольнике с четвертым порядком погрешности за конечное число элементарных операций// Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 2-1 (52). С. 11-17.
26. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Модифицированное разностное уравнение К.Н. Волкова для уравнения Пуассона на прямоугольнике с четвертым порядком погрешности// Евразийское Научное Объединение. – 2019. № 6-1 (52). С. 4-11.
27. Волосова Н.К. О решении уравнения Пуассона на прямоугольнике с шестым порядком погрешности за конечное число элементарных операций// Евразийское Научное Объединение. –2020. № 3-1 (61). С. 20-27.
28. Волосова Н.К. О решении уравнения Пуассона на прямоугольнике с четвертым порядком погрешности за конечное число элементарных операций// Евразийское Научное Объединение. –2020. № 2-1 (60). С. 11-17.

29. Волосова Н.К. Преобразование Радона и уравнение Пуассона в компьютерной стеганографии//Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. – Суздаль. 2018. – С. 61.
30. Пастухов Д.Ф. Аппроксимация уравнения Пуассона на прямоугольнике повышенной точности / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 62–77.
31. Пастухов Д.Ф. Оптимальный порядок аппроксимации разностной схемы волнового уравнения на отрезке / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2018. – № 12. – С. 60–74.
32. Пастухов Д.Ф. К вопросу о редукции неоднородной краевой задачи Дирихле для волнового уравнения на отрезке / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 60–74.
33. Волосова Н.К. Применение преобразования Радона в стеганографии//LXXI Международная конференция “Герценовские чтения”. Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена. – СПб, 2018. – 234-238.
34. Решение уравнения Пуассона в целых числах по модулю P с кусочно-разрывной правой частью стеганографии / Н.К. Волосова, К.А. Волосов, Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Евразийское научное объединение. – 2019. – Т. 1, № 1 (47). – С. 4–9.
35. Волосова Н.К. Конечные методы решения уравнения Пуассона на произвольном прямоугольнике с краевым условием Дирихле// Евразийское Научное Объединение. –2020. № 5-1 (63). С. 17-28.
36. Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Волосова Н.К., Волосова К.А., Волосова А.К. Численные методы. Лекции. Численный практикум/ Учебное пособие. Новополоцк. Москва, 2021. (3-е издание, дополненное). 237 С.
37. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Простейшая математическая модель образования фибрина в аневризмах кровеносных капилляров// Евразийское Научное Объединение. – 2021. № 10-1 (80). С. 17-23.
38. Волосова Н.К. Нестационарная гидродинамическая задача в открытой прямоугольной каверне// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 3-1 (73). С. 16-21.
39. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. О роли профиля скорости на верхнем отрезке в гидродинамической задаче для прямоугольной каверны// Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 5-1 (63). С. 11-17.
40. Волосова Н.К. Возможные виды течения в закрытой каверне и противоречия в задаче с подвижной крышкой// Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 12-1 (70). С. 4-14.
41. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Вычисление поля давления по полю скорости в гидродинамической задаче для прямоугольной каверны// Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 9-1 (67). С. 1-8.
42. Волосова Н.К. О нестационарном уравнении диффузии с полной производной по времени на прямоугольнике// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 1-1 (71). С. 9-14.

43. Волосова Н.К. Мягкие краевые условия в гидродинамической задаче для профиля скорости в открытой прямоугольной каверне// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 5-1 (75). С. 9-14.
44. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосова А.К., Зайцев В.Ф. Волосов К.А., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Этап конструирования математической модели аневризмы. Течения в каверне и противоречия в задаче в “закрытой” кювете// В сборнике: Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Материалы 74-й научной конференции “Герценовские чтения 2021”. Санкт-Петербург, 2021. С. 208-213.
45. Danilov V. G., Maslov V. P., Volosov K. A. Mathematical Modelling of Heat and Mass Transfer Processes. Kluwer Academic publishers. Dordrecht. Boston. London, 1995. – 316 p.
46. Г.Н. Лазаренко. Предикаты кардиального риска у пациентов с аневризмой брюшного отдела аорты. Автореферат, канд. мед. наук. 2011г. Москва.
47. Волосов К.А. Конструкция решений квазилинейных уравнений с частными производными. Сибирский журнал индустриальной математики. 2008, т.11 н.2 (34), с.29-39.
48. Волосов К.А., Данилов В.Г., Колобов Н.А., Маслов В.П. Доклады академии наук СССР. 1986. Т.33. С.517.
49. Volosov K.A., Danilov V.G., Maslov V.P. Structure of a weak discontinuity of solutions of quasilinear degenerate parabolic equations// Mathematical Notes. 1988. Т.43. №6. С. 479-485.
50. Danilov V.G., Maslov V.P., Volosov K.A. Mathematical modeling of heat and mass transfer//Originally published in Russian/Dordrecht,1995.
51. Волосов К.А. О собственных функциях структур, описываемых моделью “мелкой воды” на плоскости// Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12.№ 6. С. 17-32.
52. В.П. Маслов, В.Г. Данилов, К.А. Волосов. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса (эволюция диссипативных структур). С добавлением Н.А. Колобова, - М.:Наука, 1987, 352 с.
53. Атаулаханов Ф.И., Гурия Г.Т. Сорочкина А.Ю. Пространственные аспекты динамики свёртывания крови. Феноменологическая модель.
54. Волосов К.А., Вдовина Е.К., Пугина Л.В. Моделирование «пульсирующих» режимов динамики свёртывания крови. Математическое моделирование. 2014, т 26, н.12 , с. 14–32 .
55. Зайцев В. Ф., Полянин А.Д. Справочник. Дифференциальные уравнения с частными производными. Международная программа образования 1996.
56. Волосов К.А. Одевание решений для некоторых неинтегрируемых задач и некоторые инвариантные свойства анзаца метода Хироты//Дифференциальные уравнения. 2005. Т 41.№ 11.С. 1572-1575.
57. Волосов К.А. Построение решений квазилинейных параболических уравнений в параметрическом виде// Дифференциальные уравнения, 2007. Т.43. № 4. С. 492-497.
58. Волосов К.А. Новый метод построения решений уравнений с частными производными в параметрической форме// Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. 2007. Т. 7. № 26. С. 13-20.

59. Волосов К.А. Конструкция решений квазилинейных уравнений с частными производными// Сибирский журнал индустриальной математики 2008. Т. 11, № 2(34). С. 29-39.
60. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Модифицированная формула Ньютона – касательных парабол на комплексной плоскости// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 6-1 (76). С. 21-27.
61. Пастухов Ю.Ф., Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов А.Ю. Теорема о связи чисел Кармайкла с функцией Кармайкла// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 6-1 (76). С. 50-53.
62. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Сперанская О.А. Геометрический подход для качественного поиска конвективных ячеек по температурному полю// Евразийское Научное Объединение. – 2021. № 8-1 (78). С. 10-18.
63. Волосова Н.К. Вычисление производных дробного порядка с высокой степенью точности // Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 11-1 (69). С. 1-9.
64. Волосова Н.К. О конечных методах решения уравнения Пуассона на прямоугольнике с краевым условием Дирихле/ Н.К. Волосова, К.А. Волосов, А.К. Волосова, Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2020. – № 4. – С. 78–92.
65. Л.Г. Лойцянский. Механика жидкости и газа. Главная редакция Физматлит. «Наука», М. 1978 г.
66. А.А. Самарский Введение в теорию разностных схем. М. Наука, 1971.
67. М.Ф. Кравченко, М.А. Басараб. Булева Алгебра и методы аппроксимации в краевых задачах электродинамики. Физматлит. 2004.
68. Данилов В.Г., Гайдуков В.Г. Асимптотики решения задачи обтекание несжимаемой жидкостью поверхностей малыми неровностями при больших числах Рейнольдса. Асимптотики решений задач обтекания несжимаемой жидкостью поверхностей., 2016, том 15, номер 1, 5–102.
69. Альбом течений жидкости и газа. М. «МИР» , 1986 г.
70. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. М. ФИЗМАТЛИТ. 2006. 736 с.
71. С. Мизохата. Теория уравнений с частными производными. Под ред. О.А. Олейник М. МИР. 1977.
72. Куфнер А. Фучик С. Нелинейные дифференциальные уравнения. Под. Ред. Похожаева С.И. М. ФИЗМАТЛИТ. Наука, 1988.
73. О.А. Ладыженская. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье-Стокса. УМН. 2003, том.58, вып. 2 (350) , с.48-78.
74. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1981. 399 с.
75. Андрианов И.В., Баранцев Р.Г., Маневич Л.И. Асимптотическая математика и синергетика. М. Едиториал. УРСС.2004 304с.

76. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том 1. Механика: Учеб. Пособие для вузов.- 3-е изд., испр. и доп. – М.:Наука. Гл. ред. физ. мат. лит. 1989. - 576 с. - ISBN 5-02-014054-6.
77. Волосова Н.К. Мягкие краевые условия в гидродинамической задаче для профиля скорости в открытой прямоугольной каверне// Евразийское Научное Объединение. – 2021. № 5-1 (75). С. 9-14.
78. П. Роуч. Вычислительная гидродинамика. Мир. Москва. 1980. 597 С.
79. The role of aeration in forming the thermal regime of a geothermal lake. Anisimova E.P., Pastukhov D.F., Speranskaya A.A., Speranskaya O.A.//Izvestiya. Atmospheric and Oceanic Physics.1996. Т 32. № 2. С. 268-272.
80. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф. Изучение биологически мотивированной математической модели предстательной железы// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 6-1 (76). С. 6-21.
81. Волосова Н.К. Вычисление производных дробного порядка, принимающего значения на интервале(0,1), с высокой степенью точности// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 2-1 (72). С. 30-37.
82. Козлов А.А. Преобразование подобия на множестве полукватернионов / А.А. Козлов, К.С. Суравнева, И.Л.Жалейко // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2019. – № 4. – С. 115–123.
83. Козлов А.А. Множество полуоктав / А.А. Козлов // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 75–85.
84. Пастухов Ю.Ф. Пастухов Д.Ф., Карлов М.И., Пастухов А.Ю. Тензор многомерного обобщенного 0-импульса 1-го ранга// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 2-1 (72). С. 43-48.
85. Пастухов Ю.Ф. Пастухов Д.Ф. Тензор Эйлера-Лагранжа в расслоении (преобразование многомерного обобщенного 0-импульса) // Евразийское Научное Объединение. –2020. № 12-1 (70). С. 4-14.
86. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику/Р.П. Федоренко/Под ред. А.И. Лобанова. – 2-ое изд., испр. и доп. – Долгопрудный. Издательский дом "Интеллект", 2008. – 504 с.
87. Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф. Об интегралах обобщенной энергии на экстремальных системы уравнений Эйлера-Лагранжа/ Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2020. – № 4. – С. 93–107.
88. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу//Издательство Московского университета. 2005. 560 с.
89. Лобанов А.И., Куриленко И.А., Украинец А.В. Автоволновые решения и диссипативные структуры в двух математических моделях динамики свертывания крови//ТРУДЫ МФТИ. – 2009.- Том 1. №4.
90. А.И. Лобанов, Т.К. Сторожилова, В.И. Зарницына, Ф.И. Атауллаханов. Сравнение двух математических моделей для описания пространственной динамики процесса свертывания крови//Математическое моделирование, 2003, том 15, номер 1,14-28.
91. Полянин А.Д., Зайцев В. Ф., Журов А.И. Нелинейные уравнения математической физики и механики. Методы решения. Учебник и практикум//Москва,2020.Сер. 76. Высшее образование(2-ое изд. испр. и доп.).

92. Волосова Н.К., Волосова А.К., Волосов К.А. Интегрирование уравнений Гарри Дима и Кортевега де Вриза в параметрической форме. Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2017. № 4. С. 194-214.
93. Вакуленко С.П., Волосов К.А., Волосова Н.К. К методу оценки состояния железнодорожного полотна//Мир транспорта. 2016. Т14. № 3(64) С. 20-35.
94. Вдовина Е.К. , Пугина Л.В., Волосов К.А. Моделирование пульсирующих режимов динамики свертывания крови//Математическое моделирование. 2014. Т. 26. № 12. С. 14-32.
95. Волосов К.А., Пугина Л.В., Волосова А.К. Нелинейные уравнения как система линейных функциональных уравнений//Математический форум (Итоги науки. Юг России). 2014. Т. 8. № 2. С. 93-104.
96. Вдовина Е.К., Волосов К.А. Моделирование спиральных волн в процессе свертывания крови// Математическое моделирование. 2013. Т. 25. № 3. С. 14-24.
97. Волосов К.А. Конструкция решений квазилинейных уравнений с частными производными//Сибирский журнал индустриальной математики. – 2008 . Т.11. № 2(34). С.29-39.
98. Козлов А.А. Об управлении показателями Ляпунова двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами./А.А. Козлов//Дифференциальные уравнения.-2008.-Т.44,№10. С.1319-1335.
99. Козлов А.А. Об управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае./А.А. Козлов//Дифференциальные уравнения.-2007.-Т.43,№5. С.621-627.
100. Сперанская О.А., Волосова Н.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Соловьев А.А., Голубева О.В., Ехилевский С.Г. Моделирование быстропериодического прерывания потока жидкости под давлением в оболочке ANSYS Fluent//В сборнике: ИКТ-2018.Электронный сборник статей... научно-практической конференции, посвященной 50-летию Полоцкого государственного университета.2018. С. 73-79.
101. Кристалинский В.Р., Кристалинский Р.Е. О решении задач математической физики в системе WOLFRAM MATHEMATICA//Современные информационные технологии и ИТ-образование. Т 15. № 4. 2019. С. 981-991.
102. Пастухов Д.Ф. Исследование особенностей термического режима геотермального озера открытого типа: автореф. дис. ...канд. физ.-мат. наук/Д.Ф. Пастухов. – М.,1996.
103. Анисимова Е.П., Пастухов Д.Ф., Сперанская А.А., Фазлуллин С.М. Особенности термогидродинамического режима вулканического озера// Вулканология и сейсмология. – 1994. №2. С. 71.
104. Пастухов Д.Ф. Классификация профилей температуры в плюс-минус односантиметровом слое от поверхности раздела геотермального озера//Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия.1995. Т. 36. С. 84-89.
105. Анисимова Е.П., Пастухов Д.Ф. Расчет поля линий тока в вулканическом озере с геотермальными источниками на дне//Вулканология и сейсмология. – 1996. № 3. С.94.

106. Волосова Н.К. Вычисление производных дробного порядка явной квадратурной формулой Гаусса с двумя узлами// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 1-1 (71). С. 14-19.
107. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 272 с
108. Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф. Обратная теорема Гамильтона/ Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2019. – № 12. – С. 86–100.
109. Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф. Свойства функции Гамильтона в вариационных задачах со старшими производными/ Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2019. – № 4. – С. 137–153.
110. Аппроксимация двойных и тройных интегралов в математической физике/Пастухов Д.Ф.[и др.] // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 62–77.
111. Д.Б. Гуров, Т.Г. Елизарова, Ю.В. Шеретов. Численное моделирование течений жидкости в каверне на основе квазигидродинамической системы уравнений// Математическое моделирование.1996. том 8, № 7, С. 33-44.
112. Корчагина А.Н. Использование производных дробного порядка для решения задач механики сплошных сред/ А.Н. Корчагина// Известия Алтайского государственного университета. № 1-1(81) 2014. С. 65-67.
113. Волосова Н.К. Вычисление производных дробного порядка явной квадратурной формулой Гаусса с двумя узлами // Евразийское Научное Объединение. – 2021. № 1-1 (71). С. 14-19.
114. Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф. Свойства функции Гамильтона в вариационных задачах со старшими производными/ Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2019. – № 4. – С. 137–153.
115. Пастухов Д.Ф. Построение нестационарных моделей в оболочке ANSYS Fluent: учебное пособие/ Д.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова, Ю.Ф. Пастухов. – Москва: Полоцкий государственный университет, 2018. – 45 с. – EDN SBWQRY.
116. Метод последовательных функциональных компенсаций в задачах математической физики: Учебное пособие для практических занятий по курсу Уравнения математической физики/ Волосова Н.К., Волосова К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. – Москва: Полоцкий государственный университет, 2022. – 32 С.
117. Пастухов Д.Ф., Волосова Н.К., Пастухов Ю.Ф., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И. Алгебраические методы шифрования. Учебное пособие к лекционным и практическим занятиям для студентов специальности 1-98 01 01 Компьютерная безопасность/ Москва, 2022(3-е издание). EDN: SNZVRK
118. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Некоторые конечные методы решения уравнения Пуассона на прямоугольнике с шестым порядком погрешности. Учебное пособие к лекционным и практическим занятиям для студентов специальности 1-98 01 01 Компьютерная безопасность 1 – 40 01 01 Программное обеспечение информационных технологий/

- Н.К. Волосова, А.К. Волосова, К. А. Волосов[и др.]. – Москва: ”Полоцкий государственный университет”, 2022. – 33 с. – EDN: PWLFIQ.
119. Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И. Моделирование систем. Лекции. Лабораторный практикум/Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов. Н.К. Волосова[и др.]. 3-е дополненное. – Москва: Полоцкий государственный университет, 2022. – 142 с.
 120. Килбас А.А. Теория и приложения дифференциальных уравнений дробного порядка. Курс лекций – Самара: Научная конференция ”Математическая физика и нанотехнологии”.2009. 121С.
 121. Hendrik C. Kuhlmann and Francesco Romano The lid – driven cavity, p 85.
 122. F. Romano, H. C. Kuhlmann. Particle- boundary interaction in a shear-driven cavity flow. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 31:427-445, 2017.
 123. J.Jong, F. Hussian On the identification of a vortex. *J. Fluid. Mech.*A stady285:69-94, 1995.
 124. T.W. Sheu, S.F. Tsai. Flow topology in a steady three –dimensional lid-driven cavity. *Comp. Fluids* 31:911-934, 2002.
 125. U. Ghia, K.N. Ghia, C.T. Shen. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *J. Comput. Phys.*, 48: 387-411, 1982.
 126. P.N. Shankar Slow viscous Flows. National Aerospace laboratories, India. 2007.
 127. A. Salih. An Exact solutions of Navier-Stokes equation. Indian Institute of space science and technology. Thiruvanthapuman. 2011.
 128. J.F. Scott. Moffatt-type flows in a trihedral cone. *J. Fluid Mech.* 725;446-461,2013.
 129. W.W. Schultz, H.B. Keller, Drinev cavity flows by efficient numerical techniques. *J.Comp. Phys.*, 49:310-333, 1983.
 130. C.Kuhlmann, S.A. Albensoeder. Stability of steady three-dimensional lid-driven in a cube and the supercritical flowdynamics. *Pyys.Fluids*, 26(2)024104-1-024104-11, Feb. 2014, ISSN 1070-6631, 1089-7666.
 131. J.M. Lopez, B.D.Welfert, K.Wu. Yalim, J. Yalim Transition to the comp;ex dynamics in the cubic lid-driven cavity. *Pyis. Rev. Fiuids.*, 2:074401-1-074401-23, 2017.
 132. J. C. Loiseau , J.C. Robinet, E. Leriche Intrmittency and transition to chaos in the cubical lid-driven cavity flow. *Fluid Dyn. Res.*, 48(6) : 164-1421-1-061421-11, 2016.
 133. P.D. Anderson, O.S. Galaktionov, G.W. Peters, F.N. van de Vosse,H.E. Meijer. Chaotic fluid mixing in non-quasi-static flows. *Int. J. Head Fluid Flow*, 21(2): 176+185, 2000, ISSN 0142-727X.
 134. W.L. Chien, H.Rising, J. M. Ottino. Laminar mixing and chaotic mixing in several cavity flow. *J. FFluid Mech.* , 1700:355-377, 1986.
 135. Hassan Aref. Chaotic advection of fluid Particles. *Philosophical Transactions: Physical Sciences and Engineering.* V. 333, No 1631, [http: / / www.jstor.org/stable/53810](http://www.jstor.org/stable/53810).
 136. Hendrik C. Kuhlmann, Franceasco Romano. The Lid-Driven cavity.

137. [http:// www.resachgate.net](http://www.resachgate.net) > 324413434 , 2018.
138. A. Straccia How to Solve a Classic CFD Benchmark: The Lid-Drivev Cavety Problem. [www.comsol.com>blogs](http://www.comsol.com/blogs)> howtosolve. May 2018.
139. A. Salih. Streamfunction – Vorticity Formulation.
140. [http://www.iist.as.i> people> psi> omega](http://www.iist.as.i/people/psi/omega). 2013.
141. Goldstein S. On Laminnar Doundary –Layes Flow Near a Position Separation// Q.J. of Mechanics and Applied Mathematics, 1948 , (1) pp.43-69.

ВОЛОСОВА Н.К. (Московский государственный технический университет им. Н.Э.
Баумана – Национальный исследовательский университет);

ВОЛОСОВ К.А., ВОЛОСОВА А.К. (Российский университет транспорта);

ПАСТУХОВ Д.Ф., ПАСТУХОВ Ю.Ф. (Полоцкий университет);

СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ГИДРОДИНАМИКЕ

Москва

2022