АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ОБ ОДНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ

Т.К. Андреева, Н.С. Березкина, И.П. Мартынов, В.А. Пронько

Рассмотрим автономное дифференциальное уравнение

$$(y'-y^2)y^2y''' =$$
$$= (1-1/\nu)y^2y''^2 + a_1yy'^2y'' + a_2y'^4 + a_3y^3y'y'' + a_4y^2y'^3 + a_5y^5y'' + a_6y^4y'^2, \qquad (1)$$

где y – комплекснозначная функция от z, z – независимая комплексная переменная, $\nu \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Уравнением (1) может быть определена одна из компонент квадратичной системы третьего порядка.

Уравнение (1) эквивалентно системе

$$\begin{cases} y' = uy^2, \\ (u-1)u'' = (1-1/\nu)u'^2 - p(u)u'y - q(u)y^2, \end{cases} \qquad (2)$$

где

$$p(u) = (2 - a_1 + 4/\nu)u^2 - (a_3+6)u - a_5,$$
$$q(u) = (2 - 2a_1 - a_2 + 4/\nu)u^4 - (2a_3 + a_4 + 6)u^3 - (2a_5 + a_6)u^2.$$

В случае $p(1) = q(1) = 0$ Пенлеве-анализ уравнения (1) проводился в [1, 2]; при $\nu = \infty$, $p(1) \neq 0$ – в [3, 4].

Справедлива

Лемма 1. *Для наличия свойства Пенлеве у системы (2) необходимо выполнение условий*

$q(1) = \nu p^2(1)/(\nu-2)^2$, $(1-2/\nu)q'(1)+p(1)(1+p'(1)) = 0$ *при* $p(1)\neq 0$, $\nu\in\mathbb{N}\setminus\{2\}$;
$p(1) = 0$, $2q(1)(1+p'(1))^2 = q'^2(1)$ *при* $\nu = 2$;
$q(1) = \nu p^2(1)/(\nu-2)^2$ *при* $\nu = -k$, $k\in\mathbb{N}$, *или*
$q(1) = 3/2p^2(1)$ *при* $\nu = -3$, *или* $q(1) = 5p^2(1)$ *при* $\nu = -5$, *или*
$q(1) = 1/2p^2(1)$ *либо* $p(1) = 0$ *при* $\nu = -2$.

Условия леммы 1 при $\nu\in\mathbb{N}$ содержатся в [5]. Решается задача нахождения необходимых и достаточных условий наличия свойства Пенлеве у уравнения (1). Приведем результаты, полученные при выполнении условий леммы 1 и

$$2 - 2a_1 - a_2 + 4/\nu \neq 0, \quad a_6 = -2a_5.$$

Имеет место

Лемма 2. *Уравнение (1) при каждом наборе коэффициентов*

$$a_1 = a_2 = a_5 = a_6 = 0,\ a_3 = -3\nu/(\nu+1),\ a_4 = \nu(2\nu+1)/(\nu+1)^2,\ \nu\in\mathbb{Z}\setminus\{-2,-1,0\}; \quad (3)$$

$$a_1 = a_2 = 0,\ a_3 = -4,\ a_4 = -a_5 = -\nu,\ a_6 = -2\nu,\ \nu\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,0\}; \qquad (4)$$

$$\nu = -8,\ a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = a_6 = 0,\ a_3 = -2$$

удовлетворяет необходимым условиям наличия свойства Пенлеве.

Доказана

Теорема. *1) Уравнение (1) с коэффициентами (3) при $\nu = -k$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$, обладает свойством Пенлеве.*

2) Общее решение уравнения (1) с коэффициентами (3) при $\nu \in \mathbb{N}$ и с коэффициентами (4) содержит подвижные логарифмические точки ветвления.

Литература

1. Мартынов И. П. *Аналитические свойства решений одного дифференциального уравнения третьего порядка* // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. № 5. С. 764–771.

2. Мартынов И. П. *Об уравнениях третьего порядка без подвижных критических особенностей* // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. № 6. С. 937–946.

3. Мартынов И. П., Пронько В. А. *Об одном уравнении третьего порядка типа Пенлеве* // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24. № 9. С. 1640–1641.

4. Андреева Т. К., Мартынов И. П., Пронько В. А. *Аналитические свойства решений одного класса уравнений третьего порядка* // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 9. С. 1219–1224.

5. Андреева Т. К., Мартынов И. П., Пронько В. А. *Об одном классе дифференциальных уравнений третьего порядка без подвижных многозначных особых точек* // Респ. науч.-практ. конф., посвящ. 450-летию со дня рождения Г. Галилея: материалы конф. Брест, 17–18 апреля 2014 г. Брест: БрГУ, 2014. С. 11–13.

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ПРОИЗВОДНЫЕ ВО ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

Е.Р. Бабич, И.П. Мартынов

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} xy'^2 - 2x'^2 = xy^4 - 6x^2y^2 + 4x^3 + ax, \\ x'^2y - 2xx'y' = 4x^3y - x^2y^3 + bx, \end{cases} \tag{1}$$

где a, b – постоянные, причем резонансы этой системы равны $r_1 = -1$, $r_2 = -2$.

Подставляя ряды

$$x = \frac{1}{t^2} + \frac{\alpha}{t} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \qquad y = \frac{\pm 2}{t} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k, \quad t = z - z_0, \tag{2}$$

в уравнения системы (1), найдем

$$\alpha = a_0 = a_1 = a_4 = a_5 = b_0 = b_1 = b_2 = b_5 = b_6 = 0,$$

$$a_2 = -\frac{1}{20}a,\ a_3 = \mp\frac{1}{28}b,\ a_6 = \frac{1}{1200}a^2,\ a_7 = \pm\frac{17}{12320}ab,\ a_8 = \frac{39}{68992}b^2,$$

$$b_3 = \mp\frac{1}{20}a,\ b_4 = -\frac{1}{14}b,\ b_7 = \pm\frac{1}{4800}a^2,\ b_8 = \frac{3}{3080}ab,\ b_9 = \pm\frac{25}{34496}b^2,$$

а остальные коэффициенты можно найти по рекуррентным формулам. Ряды (2) сходятся в области $0 \neq |z - z_0| < \delta$, $\delta > 0$.