$$V_2 = D^{-1}\begin{pmatrix} s_2 - d_2\alpha_3 c & d_2\,(d_1\alpha_3 s_2 - s_1) \\ \dfrac{\alpha_3 c\,(d_2\alpha_3 c - s_2) + 1}{s_1 - d_1\alpha_3 s_2} & d_2\alpha_3 c \end{pmatrix} D,$$

$$V_3 = (V_1 V_2)^{-1},$$

где c – произвольная постоянная, D – любая невырожденная (2×2)-матрица.

Полученные выше формулы можно использовать при решении задачи Пуанкаре с четырьмя особыми точками, представив матрицу V_4^{-1} в виде произведения двух матриц двумя способами $V_4^{-1} = V_1(V_2V_3)$ и $V_4^{-1} = (V_1V_2)\,V_3$.

Литература

1. Khvostchinskaya L., Rogosin S. *On a solution method for the Riemann problem with two pairs of unknown functions* // Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE-2018 (M. V. Dubatovskaya, S. V. Rogosin Eds.) Cambridge Scientific Publishers, 2020. P. 79–112.

О СИСТЕМЕ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, АССОЦИИРОВАННОЙ СО ВТОРЫМ УРАВНЕНИЕМ ПЕНЛЕВЕ

В.В. Цегельник

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$w_\alpha = -w_{\alpha-\varepsilon} - \varepsilon\frac{(2\alpha-\varepsilon)\varphi'}{2w'_{\alpha-\varepsilon} + 2\varepsilon w^2_{\alpha-\varepsilon} + \varepsilon\varphi}, \tag{1}$$

$$w_{\alpha-\varepsilon} = -w_\alpha + \varepsilon\frac{(2\alpha-\varepsilon)\varphi'}{2w'_\alpha - 2\varepsilon w^2_\alpha - \varepsilon\varphi} \tag{2}$$

с неизвестными функциями w_α, $w_{\alpha-\varepsilon}$ независимой переменной z, произвольным параметром α, а также параметром $\varepsilon^2 = 1$ и произвольной аналитической функцией $\varphi(z)$ $(\varphi'(z) \not\equiv 0)$.

Из системы (1), (2) при условии

$$(2\alpha-\varepsilon)\varphi' \neq 0 \tag{3}$$

следует, что

$$w'_\alpha - \varepsilon w^2_\alpha + w'_{\alpha-\varepsilon} + \varepsilon w^2_{\alpha-\varepsilon} = 0. \tag{4}$$

Исключая из (4) при условии (3) неизвестную функцию $w_{\alpha-\varepsilon}$ относительно w_α получим уравнение

$$w''_\alpha = 2w^3_\alpha + \varphi w_\alpha + \alpha\varphi' + \frac{\varphi''}{2\varphi'}(2w'_\alpha - 2\varepsilon w^2_\alpha - \varepsilon\varphi). \tag{5}$$

Если из (4) при условии (3) исключить неизвестную функцию w_α, то относительно $w_{\alpha-\varepsilon}$ получим уравнение

$$w''_{\alpha-\varepsilon} = 2w^2_{\alpha-\varepsilon} + \varphi w_{\alpha-\varepsilon} + (\alpha-\varepsilon)\varphi' + \frac{\varphi''}{2\varphi'}(2w'_{\alpha-\varepsilon} + 2\varepsilon w^2_{\alpha-\varepsilon} + \varepsilon\varphi). \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть $w_\alpha = w(z,\alpha,\varepsilon)$ – решение уравнения (5) при фиксированных значениях α, $\varepsilon^2 = 1$ и условии (3). Тогда функция $w_{\alpha-\varepsilon} = w(z,\alpha-\varepsilon)$, определяемая (2), является решением уравнения (6).*

Теорема 2. *Пусть* $w_{\alpha-\varepsilon} = w(z, \alpha-\varepsilon)$ *– решение уравнения (6) при фиксированных значениях* α , $\varepsilon^2 = 1$ *и условии (3). Тогда функция* w_α , *определяемая (1), является решением уравнения (5).*

Легко видеть, что уравнение (6) получается из (5) заменой $\varepsilon \to -\varepsilon$, $\alpha \to \alpha + \varepsilon$ и наоборот. Сказанное справедливо и по отношению к формулам (2), (1).

Таким образом, формулы (1), (2) определяют прямое и обратное преобразование Беклунда уравнения (5).

Полагая без ограничения общности $\varphi(z) = z$, из (4) получаем второе уравнение Пенлеве

$$w''_\alpha = 2w^3_\alpha + zw_\alpha + \alpha. \tag{7}$$

Формулы (1), (2) в этом случае имеют вид

$$w_\alpha = -w_{\alpha-\varepsilon} - \varepsilon \frac{2\alpha - \varepsilon}{2w'_{\alpha-\varepsilon} + 2\varepsilon w^2_{\alpha-\varepsilon} + \varepsilon z}, \tag{8}$$

$$w_{\alpha-\varepsilon} = -w_\alpha + \varepsilon \frac{2\alpha - \varepsilon}{2w'_\alpha - 2\varepsilon w^2_\alpha - \varepsilon z}. \tag{9}$$

Преобразования (8), (9) для уравнения (7) в случае $\varepsilon = 1$ получены в [1].

Нетрудно убедиться в том, что все решения уравнения Риккати $2w'_\alpha = 2w^2_\alpha + \varepsilon\varphi$ являются одновременно решениями уравнения (5) при $2\alpha = \varepsilon$.

Отметим, что уравнение (5) в случае $\varphi''(z) \not\equiv 0$ не является уравнением Пенлеве–типа.

Литература

1. Громак В. И., Лукашевич Н. А. *Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве.* Минск: Университетское, 1990.