АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ПОКАЗАТЕЛЯ ПЕРРОНА ПО РЕШЕНИЯМ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Е.А. Барабанов, В.В. Быков

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ через $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ обозначим класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с кусочно-непрерывными коэффициентами, через $\mathcal{M}_n$ – его подкласс, состоящий из систем, коэффициенты которых ограничены на полуоси, а через $x(\cdot;\xi)$ – решение системы (1) с начальным вектором $x(0;\xi) = \xi \in \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \bigsqcup \bigsqcup \{-\infty, +\infty\}$ расширенную числовую прямую с естественным порядком и порядковой топологией.

Нижним показателем Перрона ненулевого решения $x(\cdot)$ системы (1) называется [1] величина

$$\pi[x(\cdot)] = \varliminf_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \|x(t)\|, \tag{2}$$

а функция начального вектора $\pi_A \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{R}}$, определяемая равенством $\pi_A(\xi) = \pi[x(\cdot;\xi)]$, – *показателем Перрона* системы (1). Нижние показатели Перрона представляют собой один из многочисленных примеров асимптотических характеристик – функционалов, определённых на решениях дифференциальных систем и отражающих те или иные качественные или асимптотические их свойства. Важнейший из них – характеристический показатель Ляпунова (его определение получается заменой в (2) нижнего предела верхним). Приведём некоторые известные свойства показателя Перрона, показывающие его принципиальные отличия от показателя Ляпунова.

А.М. Ляпуновым установлено, что число различных показателей Ляпунова системы из $\mathcal{M}_n$ не превосходит её размерности n. О. Перрон обнаружил [1], что для нижних показателей это утверждение неверно. Для диагональных систем из $\mathcal{M}_n$ количество различных значений показателя Перрона не превосходит $2^n - 1$ [2] и может быть любым таким натуральным числом [3].

У недиагональных систем множество значений показателей Перрона может быть устроено гораздо сложнее: в работе [4] построена система, нижние показатели решений которой заполняют целый отрезок, а в работе [5] доказано, что множество S является множеством значений показателей Перрона некоторой системы $A \in \mathcal{M}_n$ тогда и только тогда, когда S – ограниченное суслинское множество, содержащее свою точную верхнюю грань.

Несмотря на указанные отличия в строении множеств характеристических и нижних показателей систем (1) множества Лебега сужений этих показателей на аффинные подпространства имеют определённое сходство. Так, Н. А. Изобовым установлено [2, 6], что для системы $A \in \mathcal{M}_n$ и произвольного аффинного подпространства Π_k размерности k ($1 \leqslant k \leqslant n$) в $\mathbb{R}^n$ множество

$$P(\Pi_k) \equiv \bigl\{\xi \in \Pi_k \setminus \{0\} : \pi(\xi) < \sup_{\zeta \in \Pi_k \setminus \{0\}} \pi(\zeta)\bigr\}$$

имеет нулевую k-мерную меру Лебега, т.е.

$$\operatorname{mes} P(\Pi_k) = 0. \tag{3}$$

Другими словами, множество показателей Перрона решений с начальными векторами из аффинной плоскости Π_k содержит свой супремум, и для почти всех по мере Лебега начальных векторов из Π_k решения, из них выходящие, имеют показатель Перрона, равный этому супремуму.

Для одномерных аффинных подпространств приведённое свойство может быть усилено [7]: для любой аффинной прямой Π_1 множество $P(\Pi_1)$ является множеством нулевой $\ln^{\nu}|\ln(\cdot)|$-меры Хаусдорфа при всяком $\nu < -1$.

Легко показывается [8], что множество $P(\Pi_1)$ является $G_{\delta\sigma}$-множеством, а функция π_A – функцией второго класса Бэра. Эти утверждения и приведённое выше утверждение из [7] неулучшаемы [8]: для любого $n \geqslant 2$ существует такая система $A \in \mathcal{M}_n$, что для некоторой прямой Π_1 множество $P(\Pi_1)$ — точное $G_{\delta\sigma}$-множество бесконечной $\ln^{-1}|\ln(\cdot)|$-меры Хаусдорфа, а функция π_A – функция точного второго класса Бэра.

А.Г. Гаргянц [9] обнаружил, что для систем из $\widetilde{\mathcal{M}}_n \backslash \mathcal{M}_n$ при $n \geqslant 2$ свойство (3), вообще говоря, не имеет места. Он также установил [10], что свойство (3) имеет место для всех систем $A \in \widetilde{\mathcal{M}}_n$, коэффициенты которых растут медленнее любой экспоненты:

$$\varlimsup_{t\to+\infty} t^{-1} \ln \|A(t)\| \leqslant 0.$$

Ставится задача теоретико-множественного описания для каждого натурального n класса функций $\widetilde{\mathcal{P}}_n = \{\pi_A : A \in \widetilde{\mathcal{M}}_n\}$.

В [11] доказано, что для любого $n \geqslant 2$ класс $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ содержит все непрерывные функции $f \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию

$$f(c\xi) = f(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad c \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}. \tag{4}$$

Этот результат перенесён в [12] на полунепрерывные сверху функции.

Полное описание класса $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ для любого $n \geqslant 2$ даёт следующая

Теорема. *Функция $f \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ при $n \geqslant 2$, если и только если она удовлетворяет условию (4) и для любого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}\big([-\infty, r]\big)$ является G_δ-множеством. Класс $\widetilde{\mathcal{P}}_1$ состоит из всех постоянных функций $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{R}}$.*

Литература

1. Perron O. *Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme* // Math. Zeitschr. 1930. V. 31. № 5. P. 748–766.

2. Изобов Н. А. *О множестве нижних показателей линейной дифференциальной системы* // Дифференциальные уравнения. 1965. Т. 1. № 4. С. 469–477.

3. Барабанов Е. А. *Достижимость оценки числа нижних показателей линейной дифференциальной диагональной системы* //Докл. АН БССР. 1982. Т. 26. № 12. С. 1069–1072.

4. Изобов Н. А. *О множестве нижних показателей положительной меры* // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4. № 6. С. 1147–1149.

5. Барабанов Е. А. *Структура множества нижних показателей Перрона линейной дифференциальной системы* // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22. № 11. С. 1843–1853.

6. Изобов Н. А. *О мере множества решений линейной системы с наибольшим нижним показателем* // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24. № 12. С. 2168–2170.

7. Барабанов Е. А. *О распределении нижних показателей Перрона линейных дифференциальных систем на прямых фазового пространства* // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24. № 12. С. 2042–2046.

8. Барабанов Е. А. *Точность некоторых утверждений о нижних показателях Перрона* // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34. № 3. С. 200–203.

9. Гаргянц А. Г. *К вопросу о типичности и существенности значений показателя Перрона неограниченных линейных систем* // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 11. С. 1505–1506.

10. Гаргянц А. Г. *О метрической типичности старшего показателя Перрона на решениях линейной системы с медленно растущими коэффициентами* // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 8. С. 1011–1017.

11. Гаргянц А. Г. *К вопросу о распределении значений показателей Перрона по решениям систем с неограниченными коэффициентами* // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 11. С. 1567.

12. Фоминых Е. И., Касабуцкий А. Ф. *О распределении значений показателя Перрона решений линейных дифференциальных систем с неограниченными коэффициентами* // XVIII Междунар. науч. конф. по диф. уравн. (Еругинские чтения-2018): Тезисы докладов Междунар. науч. конф. Гродно, 15–18 мая 2018 г. Т. 1. Мн: Ин-т математики НАН Беларуси, 2018. С. 58–59.

О МНОЖЕСТВАХ КИНЕМАТИЧЕСКОГО И ОБОБЩЁННО КИНЕМАТИЧЕСКОГО ПОДОБИЯ МАТРИЧНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ С ВЕЩЕСТВЕННЫМ ПАРАМЕТРОМ-МНОЖИТЕЛЕМ

Е.Б. Бекряева, Н.С. Нипарко

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ через $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ обозначим класс n-мерных линейных однородных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

матрицы коэффициентов $A(\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ которых кусочно-непрерывны на временно́й полуоси $\mathbb{R}_+$, а через $\mathcal{M}_n$ – его подкласс, состоящий из систем с ограниченными на полуоси коэффициентами, т. е. таких, для которых $\sup\{\|A(t)\| : t \in \mathbb{R}_+\} < +\infty$. Через $C\widetilde{\mathcal{M}}_n$ и $C\mathcal{M}_n$ обозначаются подклассы классов $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ и $\mathcal{M}_n$ соответственно, матрицы коэффициентов которых непрерывны. Будем отождествлять систему (1) и её матрицу коэффициентов и вследствие этого писать, например, $A \in \widetilde{\mathcal{M}}_n$ или $A \in C\mathcal{M}_n$.

Сделав в системе (1) линейную замену переменных $x = L(t)y$ с невырожденной при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и кусочно-дифференцируемой матрицей $L(\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$, придём к линейной однородной дифференциальной системе

$$\dot{y} = B(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

с матрицей $B(\cdot)$, задаваемой равенством

$$B(t) = L^{-1}(t)A(t)L(t) - L^{-1}(t)\dot{L}(t) \tag{3}$$

(равенство (3) понимается выполненным всюду на $\mathbb{R}_+$, кроме тех значений t, в которых производная $\dot{L}(t)$ не существует). Кусочно-непрерывные матричнозначные функции $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$, связанные соотношением (3), называют *кинематически подобными относительно матрицы* $L(\cdot)$, а систему (1) *приводимой* к системе (2) преобразованием $x = L(t)y$.

Если $L(\cdot)$ – матрица Ляпунова, т.е. матрица, для которой

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|L(t)\| < +\infty, \quad \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|L^{-1}(t)\| < +\infty, \quad \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|\dot{L}(t)\| < +\infty,$$