7. Барабанов Е. А. *О распределении нижних показателей Перрона линейных дифференциальных систем на прямых фазового пространства* // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24. № 12. С. 2042–2046.

8. Барабанов Е. А. *Точность некоторых утверждений о нижних показателях Перрона* // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34. № 3. С. 200–203.

9. Гаргянц А. Г. *К вопросу о типичности и существенности значений показателя Перрона неограниченных линейных систем* // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 11. С. 1505–1506.

10. Гаргянц А. Г. *О метрической типичности старшего показателя Перрона на решениях линейной системы с медленно растущими коэффициентами* // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 8. С. 1011–1017.

11. Гаргянц А. Г. *К вопросу о распределении значений показателей Перрона по решениям систем с неограниченными коэффициентами* // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 11. С. 1567.

12. Фоминых Е. И., Касабуцкий А. Ф. *О распределении значений показателя Перрона решений линейных дифференциальных систем с неограниченными коэффициентами* // XVIII Междунар. науч. конф. по диф. уравн. (Еругинские чтения-2018): Тезисы докладов Междунар. науч. конф. Гродно, 15–18 мая 2018 г. Т. 1. Мн: Ин-т математики НАН Беларуси, 2018. С. 58–59.

О МНОЖЕСТВАХ КИНЕМАТИЧЕСКОГО И ОБОБЩЁННО КИНЕМАТИЧЕСКОГО ПОДОБИЯ МАТРИЧНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ С ВЕЩЕСТВЕННЫМ ПАРАМЕТРОМ-МНОЖИТЕЛЕМ

Е.Б. Бекряева, Н.С. Нипарко

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ через $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ обозначим класс n-мерных линейных однородных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

матрицы коэффициентов $A(\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ которых кусочно-непрерывны на временно́й полуоси $\mathbb{R}_+$, а через $\mathcal{M}_n$ – его подкласс, состоящий из систем с ограниченными на полуоси коэффициентами, т. е. таких, для которых $\sup\{\|A(t)\| : t \in \mathbb{R}_+\} < +\infty$. Через $C\widetilde{\mathcal{M}}_n$ и $C\mathcal{M}_n$ обозначаются подклассы классов $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ и $\mathcal{M}_n$ соответственно, матрицы коэффициентов которых непрерывны. Будем отождествлять систему (1) и её матрицу коэффициентов и вследствие этого писать, например, $A \in \widetilde{\mathcal{M}}_n$ или $A \in C\mathcal{M}_n$.

Сделав в системе (1) линейную замену переменных $x = L(t)y$ с невырожденной при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и кусочно-дифференцируемой матрицей $L(\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$, придём к линейной однородной дифференциальной системе

$$\dot{y} = B(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

с матрицей $B(\cdot)$, задаваемой равенством

$$B(t) = L^{-1}(t)A(t)L(t) - L^{-1}(t)\dot{L}(t) \tag{3}$$

(равенство (3) понимается выполненным всюду на $\mathbb{R}_+$, кроме тех значений t, в которых производная $\dot{L}(t)$ не существует). Кусочно-непрерывные матричнозначные функции $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$, связанные соотношением (3), называют *кинематически подобными относительно матрицы* $L(\cdot)$, а систему (1) *приводимой* к системе (2) преобразованием $x = L(t)y$.

Если $L(\cdot)$ – матрица Ляпунова, т.е. матрица, для которой

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|L(t)\| < +\infty, \quad \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|L^{-1}(t)\| < +\infty, \quad \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|\dot{L}(t)\| < +\infty,$$

то системы $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$, матрицы которых связаны соотношением (3), называются *приводимыми друг к другу*, а сами матрицы $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ – *кинематически подобными.* Если же матрица $L(\cdot)$ – матрица обобщённого преобразования Ляпунова, т.е. матрица, для которой

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-1}\ln\|L(t)\| = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} t^{-1}\ln\|L^{-1}(t)\| = 0,$$

то системы $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$, матрицы которых связаны соотношением (3), называются *обобщённо приводимыми друг к другу*, а сами матрицы $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ – *обобщённо кинематически подобными.* Следуя работе [1], кинематическое подобие матриц $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ обозначаем как $A(\cdot) \overset{c}{\sim} B(\cdot)$, а их обобщённо кинематическое подобие – как $A(\cdot) \overset{gc}{\sim} B(\cdot)$. Так как мы отождествляем систему и задающую её матрицу коэффициентов, то далее о приводимых (обобщённо приводимых) друг к другу системах мы будем говорить также как о кинематически (обобщённо кинематически) подобных системах. Очевидно, что отношения кинематического подобия и обобщённого кинематического подобия являются отношениями эквивалентности.

Если $L(\cdot)$ – тождественно постоянная матрица, то равенство (3) приводит к обычному подобию матриц, которое в этом случае называют также [2, с. 93] *статическим подобием.* Очевидно, что статически подобные матрицы остаются статически подобными после умножения их на один и тот же скаляр. Для отношения кинематического подобия это, если $n \geqslant 2$, вообще говоря, не так: в [1] построен пример таких кинематически подобных матриц $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ из $\mathcal{M}_2$, что, например, матрицы $2^{-1}A(\cdot)$ и $2^{-1}B(\cdot)$ не являются кинематически подобными. Обобщая эту ситуацию, введём следуя [1] и [3], следующие определения.

Для пары матриц $\big(A(\cdot), B(\cdot)\big) \in \widetilde{\mathcal{M}}_n \times \widetilde{\mathcal{M}}_n$ назовём её *множеством кинематического подобия* множество $c(A,B)$ тех $\mu \in \mathbb{R}$, для которых $\mu A(\cdot) \overset{c}{\sim} \mu B(\cdot)$, а *множеством обобщённого кинематического подобия* этой пары матриц – множество тех $\mu \in \mathbb{R}$, для которых $\mu A(\cdot) \overset{gc}{\sim} \mu B(\cdot)$. То, что для кинематически подобных матриц $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ в общем случае справедливо неравенство $gc(A,B) \neq \mathbb{R}$, вытекает из упомянутого выше примера из [1]: его матрицы $2^{-1}A(\cdot)$ и $2^{-1}B(\cdot)$ не только не являются кинематически подобными, но и не являются обобщённо кинематически подобными.

Как следует из работы [1], класс множеств $\{c(A,B) : A(\cdot), B(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{M}}_n\}$, если $n \geqslant 2$, совпадает с классом F_σ-множеств числовой прямой, содержащих нуль. Дескриптивно-множественная характеризация класса $\{gc(A,B) : A(\cdot), B(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{M}}_n\}$ в настоящее время не известна. Вместе с тем очевидно включение $c(A,B) \subset gc(A,B)$, которое, как показано в [3], является, вообще говоря, собственным: для каждого $n \geqslant 2$ существуют такие системы $A(\cdot), B(\cdot) \in C\mathcal{M}_n$, что $gc(A,B) \setminus c(A,B) \neq \varnothing$. В работе [4] это утверждение усилено до следующего: для каждого $n \geqslant 2$ найдутся системы $A(\cdot), B(\cdot) \in C\mathcal{M}_n$, для которых разность $gc(A,B) \setminus c(A,B)$ не менее, чем счётна.

Результаты работ [3] и [4] содержит следующая

Теорема. *Для каждого $n \geqslant 2$, существуют такие системы $A(\cdot), B(\cdot) \in C\mathcal{M}_n$, для которых разность $gc(A,B) \setminus c(A,B)$ является множеством точного первого борелевского класса.*

Литература

1. Барабанов Е. А. *Кинематическое подобие линейных дифференциальных систем с параметром-множителем при производной* // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. Вып. 30. М., 2014. С. 42–63.

2. Чезари Л. *Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Мир, 1964.

3. Худякова П. А. *Об обобщённом кинематическом подобии матричнозначных функций с вещественным параметром-множителем* // Матер. Междунар. мат. конф. “Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям”. Минск, 7–10 декабря 2015 г.: в 2 ч. Ч. 1. Минск, 2015. С. 48–50.

4. Алдибеков Т. М. *О приводимости и обобщённой приводимости линейных дифференциальных систем с вещественным параметром-множителем* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 1. С. 4–9.

ПРИМЕР ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ, ОБЛАДАЮЩЕЙ ЛЯПУНОВСКОЙ ГЛОБАЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТЬЮ, НО ПЕРРОНОВСКОЙ И ВЕРХНЕПРЕДЕЛЬНОЙ ГЛОБАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТЬЮ

А.А. Бондарев

Настоящий доклад посвящён недавно введённому [1] понятию качественной теории дифференциальных уравнений, а именно, *устойчивости по Перрону.* Он является продолжением цикла работ автора [2–4], усиливая их результаты:

1) работа [2] исправляла недостаток, указанный в замечании 4 к теореме 1 [5], но построенная в ней система обладала *ограниченным* на всей полуоси времени (хотя и ненулевым) линейным приближением вдоль нулевого решения;

2) в работе [3] построена система, обладающая теми же свойствами, но уже с *нулевым* линейным приближением;

3) в работе [4] этот результат был ещё более усилен тем, что построенная в ней система обладала как *перроновской*, так и *верхнепредельной полной неустойчивостью* (а значит, и *ляпуновской глобальной неустойчивостью*) и одновременно с этим даже *массивной частной устойчивостью* (в отличие от всех примеров, рассмотренных выше).

Нижеследующее усиление перечисленных результатов состоит в построении системы, обладающей ляпуновской глобальной неустойчивостью, но при этом как *перроновской*, так и *верхнепредельной глобальной устойчивостью.*

Для числа $n \in \mathbb{N}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ с евклидовой нормой $|\cdot|$ рассматриваем дифференциальные системы

$$\dot{x} = f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \quad x \equiv (x_1,\ldots,x_n)^T, \tag{1}$$

правые части которых удовлетворяют условиям

$$f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n), \qquad f(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

а значит, обеспечивают существование и единственность решений задач Коши и допускают *нулевое* решение.

Теорема. *При $n = 2$ существует система (1), которая имеет правую часть, удовлетворяющую условиям (2) и*

$$f'_x(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

и обладающая следующими двумя свойствами:

1) для всех решений x системы (1) справедливо равенство

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t)| = 0;$$