2) для каждого ненулевого решения x *системы (1) существует такой момент* $t_0 \in \mathbb{R}_+$, *что*

$$|x(t_0)| > 1.$$

Таким образом, все решения описанной системы при $t \to +\infty$ стремятся по норме к нулю, но при этом фазовая кривая каждого ненулевого решения хотя бы однажды покидает 1-окрестность начала координат.

Заметим, что полученный результат не распространяется на *автономные* системы, для которых свойства глобальной неустойчивости сразу всех перечисленных типов (и перроновского, и верхнепредельного, и ляпуновского), согласно теореме 5 из работы [6], *неразличимы.*

Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (проект 21-8-2-4-1).

Литература

1. Сергеев И. Н. *Определение устойчивости по Перрону и ее связь с устойчивостью по Ляпунову* // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856.

2. Бондарев А. А. *Один пример неустойчивой системы* // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 899.

3. Бондарев А. А. *Пример полной, но не глобальной неустойчивости по Перрону* // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2021. № 2. С. 43–47.

4. Бондарев А. А. *Существование вполне неустойчивой по Ляпунову дифференциальной системы, обладающей перроновской и верхнепредельной массивной частной устойчивостью* // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 6. С. 858–859.

5. Сергеев И. Н. *Определение и некоторые свойства устойчивости по Перрону* // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 636–646.

6. Сергеев И. Н. *Ляпуновские, перроновские и верхнепредельные свойства устойчивости автономных дифференциальных систем* // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 56. № 2. С. 63–78.

ТОЧНЫЙ БЭРОВСКИЙ КЛАСС АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ЭНТРОПИИ НЕАВТОНОМНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, НЕПРЕРЫВНО ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

А.Н. Ветохин

Пусть (X, d) – компактное метрическое пространство, а $\mathcal{F} \equiv (f_1, f_2, \dots)$ – последовательность непрерывных отображений из X в X. Для каждого натурального n обозначим через F_n подпоследовательность $(f_n, f_{n+1}, \dots)$ последовательности $\mathcal{F}$. Наряду с исходной метрикой d, определим на X дополнительную систему метрик

$$d_k^{F_n}(x,y) = \max_{0 \leqslant i < k} d(f^{\circ i}(x), f^{\circ i}(y)), \quad f^{\circ i} \equiv f_{n+(i-1)} \circ \dots \circ f_{n+0} \circ \mathrm{id}_X, \quad x, y \in X, \quad k, n \in \mathbf{N}.$$

Для всяких $k, n \in \mathbf{N}$ и $\varepsilon > 0$ обозначим через $N_d(F_n, \varepsilon, k)$ максимальное число точек в X, попарные $d_k^{F_n}$-расстояния между которыми больше, чем ε. Тогда *топологическая энтропия, верхняя асимптотическая топологическая энтропия* и *нижняя асимптотическая топологическая энтропия* неавтономной динамической системы $\mathcal{F}$ определяют формулами [1]

$$h_{\mathrm{top}}(\mathcal{F}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varlimsup_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \ln N_d(F_1, \varepsilon, k), \tag{1}$$

$$\overline{h}^{*}_{\mathrm{top}}(\mathcal{F})=\sup_{n\in\mathbf{N}}\lim_{\varepsilon\to 0}\varlimsup_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\ln N_d(F_n,\varepsilon,k), \qquad (2)$$

$$\underline{h}^{*}_{\mathrm{top}}(\mathcal{F})=\sup_{n\in\mathbf{N}}\lim_{\varepsilon\to 0}\varliminf_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\ln N_d(F_n,\varepsilon,k). \qquad (3)$$

Отметим, что величины (1) и (2) не зависят от выбора метрики, порождающей на X данную топологию, поэтому формулы (1) и (2) корректны.

По метрическому пространству $\mathcal{M}$ и семейству последовательностей непрерывных отображений

$$\mathcal{F}(\mu,\cdot)\equiv(f_1(\mu,\cdot),f_2(\mu,\cdot),\dots),\quad \mu\in\mathcal{M},\quad f_i:\mathcal{M}\times X\to X,\quad i\in\mathbf{N}, \qquad (4)$$

образуем функции

$$\mu\mapsto h_{\mathrm{top}}(\mathcal{F}(\mu,\cdot)), \qquad (5)$$

$$\mu\mapsto \overline{h}^{*}_{\mathrm{top}}(\mathcal{F}(\mu,\cdot)), \qquad (6)$$

$$\mu\mapsto \underline{h}^{*}_{\mathrm{top}}(\mathcal{F}(\mu,\cdot)). \qquad (7)$$

Для произвольных $\mathcal{M}$, X и семейства стационарных последовательностей (4) функция (5) принадлежит второму классу Бэра [2], а если $\mathcal{M}$, X – множества Кантора на отрезке $[0,1]$, то для некоторого семейства стационарных последовательностей (4) функция (5) всюду разрывна и не принадлежит первому классу Бэра [3].

Для произвольных $\mathcal{M}$, X и любого семейства (4) функция (5) принадлежит третьему классу Бэра [4], а если X – отрезок прямой и $\mathcal{M}$ – множество иррациональных чисел на отрезке $[0,1]$, то для некоторого семейства (4) функция (5) всюду разрывна и не принадлежит второму классу Бэра [5]. Аналогичные результаты верны и для функции (6).

Теорема 1. *Для любых $\mathcal{M}$, X и семейства (4) функция* (5) *принадлежит третьему классу Бэра на $\mathcal{M}$.*

Теорема 2. *Если X – канторово совершенное множество, а $\mathcal{M}$ – множество иррациональных чисел на отрезке* $[0,1]$ *со стандартной метрикой, то для некоторого семейства (4) функция* (6) *всюду разрывна и не принадлежит второму классу Бэра на $\mathcal{M}$.*

Для функции (7) справедлива

Теорема 3. *Для любых $\mathcal{M}$, X и семейства (4) функция (7) принадлежит второму классу Бэра на $\mathcal{M}$, причём множество точек её полунепрерывности сверху имеет тип G_δ (в случае полноты пространства $\mathcal{M}$ – ещё и всюду плотно в нём).*

Из результата работы [3] получаем

Теорема 4. *Если $\mathcal{M}$ и X – канторовы совершенные множества на отрезке* $[0,1]$ *со стандартной метрикой, то для некоторого семейства (4) функция (7) всюду разрывна и не принадлежит первому классу Бэра на $\mathcal{M}$.*

Литература

1. Kolyada S., Snoha L. *Topological entropy of nonautonomous dynamical systems* // Random & Computational dynamics. 1996. V. 4. № 2&3. P. 205–233.

2. Ветохин А. Н. *Типичное свойство топологической энтропии непрерывных отображений компактов* // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 4. С. 448–453.

3. Ветохин А. Н. *Непринадлежность первому классу Бэра топологической энтропии на пространстве гомеоморфизмов* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2016. Т. 2. № 4. С. 44–48.

4. Ветохин А. Н. *Точный бэровский класс топологической энтропии неавтономных динамических систем* // Матем. заметки. 2019. Т. 106. № 3. С. 341–348.

5. Ветохин А. Н. *О непринадлежности второму бэровскому классу одного семейства гладких неавтономных динамических систем на отрезке, непрерывно зависящих от параметра* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 1. С. 133–136.

О ПОГЛОЩАЕМОСТИ РЕШЕНИЙ СТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОДНОЙ ХУКУХАРЫ

А.С. Войделевич

Согласно определению, решения обыкновенных дифференциальных уравнений с производной Хукухары [1; 2, с. 14] при каждом значении независимой переменной являются компактными выпуклыми множествами. Поэтому исследование свойств решений таких уравнений включает в себя изучение изменения и асимптотического поведения как функций независимой переменной геометрических характеристик множеств, являющихся значениями решений. Так, например, в работе [3] вычислены показатели Ляпунова радиусов вписанных и описанных сфер решений линейных стационарных дифференциальных уравнений с производной Хукухары, а в работе [4] дано полное описание линейных стационарных дифференциальных уравнений с производной Хукухары, сохраняющих многогранники, т.е. таких уравнений, что любое их решение, которое при начальном значении независимой переменной является многогранником, остаётся многогранником и для всех последующих значений. Наконец, в работе [5] получено полное описание линейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары, сохраняющих свойство решений быть множествами постоянной ширины, т.е. таких уравнений, что любое их решение, которое при начальном значении независимой переменной является множеством постоянной ширины, остаётся множеством постоянной ширины и для всех последующих значений.

Изучению характеристик решений линейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары посвящён и настоящий доклад, но, прежде чем сформулировать полученный результат, приведём ряд необходимых определений.

Определение 1. *Суммой Минковского* $Z = X + Y$ двух множеств $X,\ Y \subset \mathbb{R}$ называется множество $Z \overset{\text{def}}{=} \{x + y\colon x \in X,\, y \in Y\}$.

Определение 2. [1] Множество $Z \subset \mathbb{R}^d$ такое, что $X = Y + Z$, где $X, Y \subset \mathbb{R}^d$, называется *разностью Хукухары* множеств X, Y и обозначается как $Z = X - Y$.

Через $B \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^d\colon \|x\| \leqslant 1\}$ обозначим замкнутый шар единичного радиуса с центром в начале координат. Через $\Omega(\mathbb{R}^d)$ обозначим семейство всех непустых ограниченных подмножеств пространства $\mathbb{R}$.

Определение 3. *Расстоянием Хаусдорфа* $h(\cdot,\cdot)$ на множестве $\Omega(\mathbb{R}^d)$ называется величина $h(X,Y) \overset{\text{def}}{=} \inf\{r \geqslant 0 : X \subset Y + rB,\, Y \subset X + rB\}$, $X, Y \in \Omega(\mathbb{R}^d)$.

Совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^d$ обозначим через $K_c(\mathbb{R}^d)$. Согласно теореме Хана пара $\big(K_c(\mathbb{R}^d), h\big)$ – полное метрическое пространство. Через $I \subset \mathbb{R}$ обозначим какой-либо интервал, вообще говоря неограниченный.

Определение 4. [1] Отображение $X : I \to K_c(\mathbb{R})$ называется *дифференцируемым по Хукухаре* в точке $t_0 \in I$, если пределы

$$\lim_{\Delta t \to +0} \frac{X(t_0 + \Delta t) - X(t_0)}{\Delta t}, \quad \lim_{\Delta t \to +0} \frac{X(t_0) - X(t_0 - \Delta t)}{\Delta t}$$