5. Ветохин А.Н. *О непринадлежности второму бэровскому классу одного семейства гладких неавтономных динамических систем на отрезке, непрерывно зависящих от параметра* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 1. С. 133–136.

О ПОГЛОЩАЕМОСТИ РЕШЕНИЙ СТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОДНОЙ ХУКУХАРЫ

А.С. Войделевич

Согласно определению, решения обыкновенных дифференциальных уравнений с производной Хукухары [1; 2, с. 14] при каждом значении независимой переменной являются компактными выпуклыми множествами. Поэтому исследование свойств решений таких уравнений включает в себя изучение изменения и асимптотического поведения как функций независимой переменной геометрических характеристик множеств, являющихся значениями решений. Так, например, в работе [3] вычислены показатели Ляпунова радиусов вписанных и описанных сфер решений линейных стационарных дифференциальных уравнений с производной Хукухары, а в работе [4] дано полное описание линейных стационарных дифференциальных уравнений с производной Хукухары, сохраняющих многогранники, т.е. таких уравнений, что любое их решение, которое при начальном значении независимой переменной является многогранником, остаётся многогранником и для всех последующих значений. Наконец, в работе [5] получено полное описание линейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары, сохраняющих свойство решений быть множествами постоянной ширины, т.е. таких уравнений, что любое их решение, которое при начальном значении независимой переменной является множеством постоянной ширины, остаётся множеством постоянной ширины и для всех последующих значений.

Изучению характеристик решений линейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары посвящён и настоящий доклад, но, прежде чем сформулировать полученный результат, приведём ряд необходимых определений.

Определение 1. *Суммой Минковского* $Z = X + Y$ двух множеств $X,\ Y \subset \mathbb{R}$ называется множество $Z \overset{\text{def}}{=} \{x + y\colon x \in X,\, y \in Y\}$.

Определение 2. [1] Множество $Z \subset \mathbb{R}^d$ такое, что $X = Y + Z$, где $X, Y \subset \mathbb{R}^d$, называется *разностью Хукухары* множеств X, Y и обозначается как $Z = X - Y$.

Через $B \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^d\colon \|x\| \leqslant 1\}$ обозначим замкнутый шар единичного радиуса с центром в начале координат. Через $\Omega(\mathbb{R}^d)$ обозначим семейство всех непустых ограниченных подмножеств пространства $\mathbb{R}$.

Определение 3. *Расстоянием Хаусдорфа* $h(\cdot,\cdot)$ на множестве $\Omega(\mathbb{R}^d)$ называется величина $h(X,Y) \overset{\text{def}}{=} \inf\{r \geqslant 0 : X \subset Y + rB,\, Y \subset X + rB\}$, $X, Y \in \Omega(\mathbb{R}^d)$.

Совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^d$ обозначим через $K_c(\mathbb{R}^d)$. Согласно теореме Хана пара $\big(K_c(\mathbb{R}^d), h\big)$ – полное метрическое пространство. Через $I \subset \mathbb{R}$ обозначим какой-либо интервал, вообще говоря неограниченный.

Определение 4. [1] Отображение $X : I \to K_c(\mathbb{R})$ называется *дифференцируемым по Хукухаре* в точке $t_0 \in I$, если пределы

$$\lim_{\Delta t \to +0} \frac{X(t_0 + \Delta t) - X(t_0)}{\Delta t}, \quad \lim_{\Delta t \to +0} \frac{X(t_0) - X(t_0 - \Delta t)}{\Delta t}$$

существуют и равны между собой. В этом случае общее значение этих пределов, являющееся, очевидно, выпуклым компактом, обозначается через $D_H X(t_0)$ и называется *производной Хукухары* отображения X в точке t_0.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$D_H X = AX, \quad X(t) \in K_c(\mathbb{R}^d), \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с постоянной $(d \times d)$-матрицей коэффициентов A. Для произвольного множества $X_0 \in K_c(\mathbb{R})$ через $X(\cdot; X_0)$ обозначим решение уравнения (1) такое, что $X(0;X_0) = X_0$.

Будем говорить, что решение $X(\cdot)$ уравнения (1) *поглощает* его другое решение $Y(\cdot)$, если найдётся такое $T \geqslant 0$, что при всех $t \geqslant T$ верно включение $Y(t) \subset X(t)$. Через $\mathfrak{A}_d$ обозначим множество всех действительных $(d \times d)$-матриц A таких, что для любых векторов $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^d$ и неотрицательных чисел $r_1 > r_2 \geqslant 0$ решение $X(\cdot; p_1 + r_1 B)$ уравнения (1) поглощает решение $X(\cdot; p_2 + r_2 B)$. Естественно возникает задача описать множество $\mathfrak{A}_d$.

Лемма. *Если λ – вещественное собственное значение матрицы $A \in \mathfrak{A}_d$, то $\lambda < 0$.*

Из леммы, в частности, следует, что $\mathfrak{A}_d$ состоит из невырожденных матриц.

Теорема. *Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ – собственные значения невырожденной действительной $(d \times d)$-матрицы A. Тогда из неравенства $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i| > \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \operatorname{Re} \lambda_i$ следует, что $A \in \mathfrak{A}_d$.*

Литература

1. Hukuhara M. *Integration des applications measurables dont la valeur est un compact convexe* // Funk. Ekv. 1967. V. 10. P. 205–223.
2. Lakshmikantham V., Gnana Bhaskar T., Vasundhara Devi J. *Theory of set differential equations in metric spaces.* London, 2006.
3. Войделевич А.С. *Показатели Ляпунова радиусов вписанных и описанных сфер решений стационарных линейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары* // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 4. С. 572–576.
4. Войделевич А.С. *Стационарные линейные дифференциальные уравнения с производной Хукухары, сохраняющие многогранники* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1695–1698.
5. Войделевич А.С. *Линейные дифференциальные уравнения с производной Хукухары, сохраняющие свойство постоянства ширины* // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 1. С. 17–22.

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ АСИНХРОННЫМ СПЕКТРОМ ЛИНЕЙНЫХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НУЛЕВЫМ ПРАВЫМ ВЕРХНИМ БЛОКОМ УСРЕДНЕНИЯ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ

А.К. Деменчук

Условия протекания процесса, при выполнении которых колебания системы описываются сильно нерегулярными решениями, в приложениях называют асинхронным режимом [1]. Задача конструирования периодических систем, обладающих асинхронным режимом, поставлена в виде задачи управления спектром нерегулярных колебаний (асинхронным спектром) и в некоторых случаях найдено ее решение [2].

Исследуем подобные вопросы в случае почти периодических (по Бору [3]) систем.