существуют и равны между собой. В этом случае общее значение этих пределов, являющееся, очевидно, выпуклым компактом, обозначается через $D_H X(t_0)$ и называется *производной Хукухары* отображения X в точке t_0.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$D_H X = AX, \quad X(t) \in K_c(\mathbb{R}^d), \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с постоянной $(d \times d)$-матрицей коэффициентов A. Для произвольного множества $X_0 \in K_c(\mathbb{R})$ через $X(\cdot; X_0)$ обозначим решение уравнения (1) такое, что $X(0;X_0) = X_0$.

Будем говорить, что решение $X(\cdot)$ уравнения (1) *поглощает* его другое решение $Y(\cdot)$, если найдётся такое $T \geqslant 0$, что при всех $t \geqslant T$ верно включение $Y(t) \subset X(t)$. Через $\mathfrak{A}_d$ обозначим множество всех действительных $(d \times d)$-матриц A таких, что для любых векторов $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^d$ и неотрицательных чисел $r_1 > r_2 \geqslant 0$ решение $X(\cdot; p_1 + r_1 B)$ уравнения (1) поглощает решение $X(\cdot; p_2 + r_2 B)$. Естественно возникает задача описать множество $\mathfrak{A}_d$.

Лемма. *Если λ – вещественное собственное значение матрицы $A \in \mathfrak{A}_d$, то $\lambda < 0$.*

Из леммы, в частности, следует, что $\mathfrak{A}_d$ состоит из невырожденных матриц.

Теорема. *Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ – собственные значения невырожденной действительной $(d \times d)$-матрицы A. Тогда из неравенства $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i| > \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \operatorname{Re} \lambda_i$ следует, что $A \in \mathfrak{A}_d$.*

Литература

1. Hukuhara M. *Integration des applications measurables dont la valeur est un compact convexe* // Funk. Ekv. 1967. V. 10. P. 205–223.

2. Lakshmikantham V., Gnana Bhaskar T., Vasundhara Devi J. *Theory of set differential equations in metric spaces.* London, 2006.

3. Войделевич А.С. *Показатели Ляпунова радиусов вписанных и описанных сфер решений стационарных линейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары* // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 4. С. 572–576.

4. Войделевич А.С. *Стационарные линейные дифференциальные уравнения с производной Хукухары, сохраняющие многогранники* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1695–1698.

5. Войделевич А.С. *Линейные дифференциальные уравнения с производной Хукухары, сохраняющие свойство постоянства ширины* // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 1. С. 17–22.

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ АСИНХРОННЫМ СПЕКТРОМ ЛИНЕЙНЫХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НУЛЕВЫМ ПРАВЫМ ВЕРХНИМ БЛОКОМ УСРЕДНЕНИЯ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ

А.К. Деменчук

Условия протекания процесса, при выполнении которых колебания системы описываются сильно нерегулярными решениями, в приложениях называют асинхронным режимом [1]. Задача конструирования периодических систем, обладающих асинхронным режимом, поставлена в виде задачи управления спектром нерегулярных колебаний (асинхронным спектром) и в некоторых случаях найдено ее решение [2].

Исследуем подобные вопросы в случае почти периодических (по Бору [3]) систем.

Определение 1. Вещественное число λ называется *показателем Фурье* (*частотой*) почти периодической функции $f(t)$, если выполняется условие

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)\exp(\lambda t)dt \not\equiv 0.$$

Определение 2. *Модулем* (*частотным модулем*) $\mathrm{Mod}\,(f)$ почти периодической функции $f(t)$ называется наименьшая аддитивная группа вещественных чисел, содержащая все показатели Фурье этой функции.

Определение 3. Почти периодическое решение некоторой разрешенной относительно производной почти периодической системы обыкновенных дифференциальных уравнений называется *сильно нерегулярным*, если пересечение частотных модулей решения и её правой части тривиально.

Отметим, что в периодическом случае условие сильной нерегулярности означает несоизмеримость периодов решения и самой системы [4].

Пусть задана линейная система управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geqslant 2, \tag{1}$$

где x – фазовый вектор, $A(t)$ – непрерывная почти периодическая $(n \times n)$-матрица с модулем частот $\mathrm{Mod}\,(A)$, u – управление, B – постоянная $(n \times n)$-матрица. Будем предполагать, что управление задается в виде обратной связи, линейной по фазовым переменным

$$u = U(t)x$$

с непрерывной почти периодической $(n \times n)$-матрицей $U(t)$, $\mathrm{Mod}\,(U) \subseteq \mathrm{Mod}\,(A)$.

Задача управления спектром нерегулярных колебаний (асинхронным спектром) с целевым множеством частот L состоит в следующем: требуется выбрать такую матрицу $U(t)$ (коэффициент обратной связи), чтобы замкнутая этим управлением система

$$\dot{x} = (A(t) + BU(t))x$$

имела сильно нерегулярное почти периодическое решение $x(t)$, спектр частот которого содержит заданное подмножество L.

В случае невырожденной матрицы B решение поставленной задачи не вызывает затруднений. Поэтому далее предполагаем, что матрица B имеет неполный ранг, т.е.

$$\mathrm{rank} B = r < n, \tag{2}$$

причем без ограничения общности можно считать, что первые $n-r$ строк этой матрицы нулевые, а остальные строки линейно независимы, т.к. в противном случае этого можно добиться линейным невырожденным стационарным преобразованием фазовых переменных.

Пусть

$$\hat{A} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T A(s)ds$$

среднее значение матрицы коэффициентов $A(t)$. Обозначим через $\hat{A}_{11}$ – левый верхний блок размерности $(n-r)\times(n-r)$ матрицы $\hat{A}$, а через $\hat{A}_{12}$ – ее правый верхний блок размерности $(n-r)\times r$.

Справедлива

Теорема. *Предположим, что выполняется условие (2) и равенство* $\hat{A}_{12} = 0$. *Если для системы (1) разрешима задача управления асинхронным спектром с целевым множеством частот* L, *то матрица* $\hat{A}_{11}$ *имеет* k *пар различных чисто мнимых собственных чисел* $\pm i\lambda$, $\lambda \in L$, *при этом для мощности целевого множества частот имеет место оценка* $|L| \leqslant k$.

Исследования выполнены в Институте математики НАН Беларуси при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

Литература

1. Вермель А. С., Дубошинский Д. Б., Пеннер Д. И. и др. *Асинхронное возбуждение незатухающих колебаний* // Успехи физич. наук. 1973. Т. 109. Вып. 1. С. 402–406.

2. Деменчук А. К. *Задача управления спектром сильно нерегулярных периодических колебаний* // Доклады НАН Беларуси. 2009. Т. 53. № 4. С. 37–42.

3. Левитан Б. М. *Почти периодические функции.* М.: Гостехиздат, 1953.

4. Курцвейль Я, Вейвода О. *О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений* // Чехосл. матем. журнал. 1955. Т. 5. № 3. С. 362–370.

АНТИПЕРРОНОВСКИЙ ЭФФЕКТ ПРИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО УБЫВАЮЩИХ ЛИНЕЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Н.А. Изобов, А.В. Ильин

Рассматриваем линейные дифференциальные системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и положительными характеристическими показателями $\lambda_2(A) \geqslant \lambda_1(A) > 0$, а также возмущённые системы

$$\dot{y} = A(t)y + Q(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant t_0, \tag{2}$$

с бесконечно дифференцируемыми экспоненциально убывающими $(n \times n)$-возмущениями

$$Q : \|Q(t)\| \leqslant C_Q e^{-\sigma t}, \quad \sigma > 0, \quad t \geqslant t_0. \tag{3}$$

Возникает вопрос о существовании, например, таких двумерной системы (1) и возмущения (3), что возмущённая система (2) имеет нетривиальное решение с отрицательными показателями Ляпунова. Решение этой (первой) задачи может служить предварительным этапом в решении более важной (второй) задачи о существовании нетривиальных решений с отрицательными показателями у нелинейной дифференциальной системы

$$\dot{y} = A(t)y + f(t, y), \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0, \tag{4}$$

с бесконечно дифференцируемым m-возмущением

$$f(t, y) : \|f(t, y)\| \leqslant C_f \|y\|^m, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0,$$

порядка $m > 1$ малости в окрестности начала координат $y = 0$ и допустимого роста вне ее в “антиперроновском” случае положительности всех характеристических показателей линейного приближения (1). В силу принципа линейного включения возможное отрицательное решение первой задачи влекло бы такое же решение и второй. Смена же положительных характеристических показателей линейного приближения (1)