Справедлива

Теорема. *Предположим, что выполняется условие (2) и равенство* $\hat{A}_{12} = 0$. *Если для системы (1) разрешима задача управления асинхронным спектром с целевым множеством частот* L, *то матрица* $\hat{A}_{11}$ *имеет* k *пар различных чисто мнимых собственных чисел* $\pm i\lambda$, $\lambda \in L$, *при этом для мощности целевого множества частот имеет место оценка* $|L| \leqslant k$.

Исследования выполнены в Институте математики НАН Беларуси при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

Литература

1. Вермель А. С., Дубошинский Д. Б., Пеннер Д. И. и др. *Асинхронное возбуждение незатухающих колебаний* // Успехи физич. наук. 1973. Т. 109. Вып. 1. С. 402–406.

2. Деменчук А. К. *Задача управления спектром сильно нерегулярных периодических колебаний* // Доклады НАН Беларуси. 2009. Т. 53. № 4. С. 37–42.

3. Левитан Б. М. *Почти периодические функции.* М.: Гостехиздат, 1953.

4. Курцвейль Я, Вейвода О. *О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений* // Чехосл. матем. журнал. 1955. Т. 5. № 3. С. 362–370.

АНТИПЕРРОНОВСКИЙ ЭФФЕКТ ПРИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО УБЫВАЮЩИХ ЛИНЕЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Н.А. Изобов, А.В. Ильин

Рассматриваем линейные дифференциальные системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и положительными характеристическими показателями $\lambda_2(A) \geqslant \lambda_1(A) > 0$, а также возмущённые системы

$$\dot{y} = A(t)y + Q(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant t_0, \tag{2}$$

с бесконечно дифференцируемыми экспоненциально убывающими $(n \times n)$-возмущениями

$$Q : \|Q(t)\| \leqslant C_Q e^{-\sigma t}, \quad \sigma > 0, \quad t \geqslant t_0. \tag{3}$$

Возникает вопрос о существовании, например, таких двумерной системы (1) и возмущения (3), что возмущённая система (2) имеет нетривиальное решение с отрицательными показателями Ляпунова. Решение этой (первой) задачи может служить предварительным этапом в решении более важной (второй) задачи о существовании нетривиальных решений с отрицательными показателями у нелинейной дифференциальной системы

$$\dot{y} = A(t)y + f(t, y), \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0, \tag{4}$$

с бесконечно дифференцируемым m-возмущением

$$f(t, y) : \|f(t, y)\| \leqslant C_f \|y\|^m, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0,$$

порядка $m > 1$ малости в окрестности начала координат $y = 0$ и допустимого роста вне ее в “антиперроновском” случае положительности всех характеристических показателей линейного приближения (1). В силу принципа линейного включения возможное отрицательное решение первой задачи влекло бы такое же решение и второй. Смена же положительных характеристических показателей линейного приближения (1) на отрицательные у решений возмущённой системы (4) являлась бы эффектом, противоположным известному эффекту Перрона [1–5].

Положительному решению первой задачи и посвящено настоящее сообщение.

Теорема. *Для любых параметров* $\lambda_2 \geqslant \lambda_1 > 0$, $\theta > 1$ *и* $\sigma \in (0, \lambda_1 + \theta^{-1}\lambda_2)$ *существуют:*

1) двумерная система (1) с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и характеристическими показателями $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = 1, 2$;

2) бесконечно дифференцируемое экспоненциально убывающее возмущение (3) $Q(t)$ *такое, что возмущённая линейная система (2) имеет решение* $y(t)$ *с отрицательным показателем*

$$\lambda_0 = \frac{\sigma\theta - \lambda_1 - \lambda_2}{\theta - 1}.$$

С помощью этой теоремы и её доказательства устанавливается справедливость аналогичного утверждения в n-мерном случае: для любых параметров

$$\lambda_n \geqslant \ldots \geqslant \lambda_1 > 0, \quad \theta > 1, \quad \sigma \in (0, \lambda_1, +\theta^{-1}\lambda_2)$$

существуют линейная система (1) с показателями $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = \overline{1, n}$, экспоненциально убывающее возмущение (3) такие, что возмущённая система (2) имеет $n-1$ линейно независимых решений $y_i(t)$ с показателями

$$\lambda[y_i] = \frac{\sigma\theta - \theta\lambda_1 - \lambda_{i+1}}{\theta - 1} < 0, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Исследования выполнены в Институте математики НАН Беларуси при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

Литература

1. Perron O. *Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen* // Math. Zeitschr. 1930. Bd 32. H. 5. S. 702–728.

2. Леонов Г. А. *Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения.* М.; Ижевск, 2006.

3. Изобов Н. А., Ильин А. В. *О бэровской классификации положительных характеристических показателей в эффекте Перрона смены их значений* // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 11. С. 1435–1439.

4. Изобов Н. А., Ильин А. В. *Построение произвольного суслинского множества положительных характеристических показателей в эффекте Перрона* // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 463–472.

5. Изобов Н. А., Ильин А. В. *Построение счётного числа различных суслинских множеств характеристических показателей в эффекте Перрона смены их значений* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1585–1590.

ТОЧНЫЙ БОРЕЛЕВСКИЙ КЛАСС МНОЖЕСТВА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

А.Ф. Касабуцкий

Для натурального $n \geqslant 2$ через $\mathcal{M}_n$ обозначим класс n-мерных линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$