на отрицательные у решений возмущённой системы (4) являлась бы эффектом, противоположным известному эффекту Перрона [1–5].

Положительному решению первой задачи и посвящено настоящее сообщение.

Теорема. *Для любых параметров* $\lambda_2 \geqslant \lambda_1 > 0$, $\theta > 1$ *и* $\sigma \in (0, \lambda_1 + \theta^{-1}\lambda_2)$ *существуют:*

1) двумерная система (1) с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и характеристическими показателями $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = 1, 2$;

2) бесконечно дифференцируемое экспоненциально убывающее возмущение (3) $Q(t)$ *такое, что возмущённая линейная система (2) имеет решение* $y(t)$ *с отрицательным показателем*

$$\lambda_0 = \frac{\sigma\theta - \lambda_1 - \lambda_2}{\theta - 1}.$$

С помощью этой теоремы и её доказательства устанавливается справедливость аналогичного утверждения в n-мерном случае: для любых параметров

$$\lambda_n \geqslant \ldots \geqslant \lambda_1 > 0, \quad \theta > 1, \quad \sigma \in (0, \lambda_1, +\theta^{-1}\lambda_2)$$

существуют линейная система (1) с показателями $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = \overline{1, n}$, экспоненциально убывающее возмущение (3) такие, что возмущённая система (2) имеет $n-1$ линейно независимых решений $y_i(t)$ с показателями

$$\lambda[y_i] = \frac{\sigma\theta - \theta\lambda_1 - \lambda_{i+1}}{\theta - 1} < 0, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Исследования выполнены в Институте математики НАН Беларуси при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

Литература

1. Perron O. *Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen* // Math. Zeitschr. 1930. Bd 32. H. 5. S. 702–728.

2. Леонов Г. А. *Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения.* М.; Ижевск, 2006.

3. Изобов Н. А., Ильин А. В. *О бэровской классификации положительных характеристических показателей в эффекте Перрона смены их значений* // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 11. С. 1435–1439.

4. Изобов Н. А., Ильин А. В. *Построение произвольного суслинского множества положительных характеристических показателей в эффекте Перрона* // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 463–472.

5. Изобов Н. А., Ильин А. В. *Построение счётного числа различных суслинских множеств характеристических показателей в эффекте Перрона смены их значений* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1585–1590.

ТОЧНЫЙ БОРЕЛЕВСКИЙ КЛАСС МНОЖЕСТВА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

А.Ф. Касабуцкий

Для натурального $n \geqslant 2$ через $\mathcal{M}_n$ обозначим класс n-мерных линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

матрицы коэффициентов $A(\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ которых кусочно-непрерывны на временно́й полуоси $\mathbb{R}_+$ и ограничены. Будем отождествлять систему (1) и её матрицу коэффициентов и вследствие этого писать $A \in \mathcal{M}_n$.

Наряду с системой (1) рассмотрим порождённое ею однопараметрическое семейство линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = \mu A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

со скалярным параметром-множителем $\mu \in \mathbb{R}$.

В работе [1] дано следующее

Определение. Для системы $A \in \mathcal{M}_n$ и числа $\lambda < 0$ множество $Se_A(\lambda)$ всех тех значений параметра $\mu \in \mathbb{R}$, при которых старший показатель Ляпунова системы (2) меньше λ, называется *множеством λ-экспоненциальной устойчивости* системы A.

Очевидно, что $Se_A(\lambda_1) \subset Se_A(\lambda_2)$, если $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$.

Чтобы сформулировать известные свойства множества $Se_A(\lambda)$, введём нижнее $l(A)$ и верхнее $u(A)$ средние значения [2, с. 534] следа матрицы $A(\cdot)$, т.е. величины

$$l(A) = \varliminf_{t\to+\infty} i_A(t) \quad \text{и} \quad u(A) = \varlimsup_{t\to+\infty} i_A(t),$$

где

$$i_A(t) \stackrel{\text{def}}{=} t^{-1}\int\limits_0^t \operatorname{Sp} A(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad t \geqslant 0.$$

В работе [1] доказана

Теорема 1. *Для системы $A \in \mathcal{M}_n$ при любом $\lambda < 0$ его множество λ-экспоненциальной устойчивости $Se_A(\lambda)$ является F_σ-множеством.*

При этом $Se_A(\lambda) = \varnothing$, если $l(A)\cdot u(A) \leqslant 0$, а $Se_A(\lambda) \subset \big(n\lambda\cdot u^{-1}(A), +\infty\big)$ при $u(A) < 0$ и $Se_A(\lambda) \subset \big(-\infty, n\lambda\cdot l^{-1}(A)\big)$ при $l(A) > 0$.

Оценки нижней при $u(A) < 0$ и верхней при $l(A) > 0$ границ множества λ-экспоненциальной устойчивости $Se_A(\lambda)$, даваемые теоремой 1, являются неулучшаемыми в классе $\mathcal{M}_n$, как показывает пример системы (1) с постоянной матрицей $A(t) = \operatorname{diag}[a,\ldots,a]$, где $a \neq 0$. Тогда $l(A) = u(A) = na$ и для любого $\lambda < 0$, как легко видеть, $Se_A(\lambda) = (\lambda a^{-1}, +\infty)$, если $a < 0$, и $Se_A(\lambda) = (-\infty, \lambda a^{-1})$, если $a > 0$.

Что же касается борелевского типа множества $Se_A(\lambda)$, то до настоящего времени был известен только заметно более слабый по сравнению с утверждением теоремы 1 результат: множество $Se_A(\lambda)$ может быть любым открытым множеством, дополнение которого до содержащей его полуоси, ограничено. Отсюда, в частности, следует существование таких систем $A \in \mathcal{M}_n$, для которых указанные в теореме 1 оценки границ множества $Se_A(\lambda)$ не только точны, но и для которых, в отличие от приведённого выше примера постоянной диагональной матрицы, не обязательно выполняется равенство $l(A) = u(A)$ и множество $Se_A(\lambda)$ является полубесконечным интервалом.

В настоящем докладе показывается, что номер бэровского класса в теореме 1 уменьшить нельзя. Поскольку, как несложно видеть, случаи $l(A) > 0$ и $u(A) < 0$ сводятся один к другому заменой матрицы $A(\cdot)$ на противоположную ей матрицу $-A(\cdot)$, то теорему 2 мы формулируем только для случая $u(A) < 0$.

Теорема 2. *Для каждого натурального $n \geqslant 2$, отрицательных чисел l и u $(l \leqslant u)$ существует такое F_σ-множество M, не являющееся множеством нулевого борелевского класса, что $M = Se_A(\lambda)$ для некоторых системы $A \in \mathcal{M}_n$ и числа $\lambda < 0$. При этом выполняются равенства $l(A) = l$ и $u(A) = u$.*

Сформулированная теорема означает, в частности, что множество экспоненциальной устойчивости линейной дифференциальной системы из $\mathcal{M}_n$, $n \geqslant 2$, является в общем случае множеством точного первого борелевского класса.

Литература

1. Касабуцкий А. Ф. *О множествах Лебега показателя экспоненциальной устойчивости линейных дифференциальных систем с параметром* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 4. С. 58–67.

2. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. *Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости.* М.: Наука, 1966.

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ МИЛЛИОНЩИКОВА С ПРОИЗВОЛЬНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ ПАРАМЕТРА

А.В. Липницкий

Рассмотрим однопараметрическое семейство линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A_\mu(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant 0, \tag{1_μ}$$

с матрицами

$$A_\mu(t) := \begin{cases} d_k(\mu)\,\mathrm{diag}\,[1,-1], & 2k-2 \le t < 2k-1, \\ (\mu + b_k)J, & 2k-1 \le t < 2k, \end{cases} \text{где } k \in \mathbb{N}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

и вещественным параметром μ; условия, которым удовлетворяют числа $b_k \in \mathbb{R}$ и функции $d_k(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, будут указаны ниже.

В работе [1] доказано, что старший показатель Ляпунова системы (1_μ), рассматриваемый как функция параметра μ, положителен на множестве положительной меры Лебега в случае, когда $d_k(\cdot)$ не зависят от μ и выполнено условие $d_k(\mu) \equiv d_k \geqslant d > 0$, $k \in \mathbb{N}$. В доказательстве этого результата существенно используются комплексные матрицы специального вида. В [2] приводится другой способ доказательства теоремы из [1], основанный на применении равенства Парсеваля для тригонометрических сумм.

Пусть $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, – произвольные числа. Положим

$$d_k(\mu) \equiv d(\mu) > 0, \quad b_{2^{n-1}(2k-1)} := a_n, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \mu \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Обозначим через $X_{A_\mu}(t,s)$, $t,s \geqslant 0$, матрицу Коши системы (1_μ). Для любого $\varphi \in \mathbb{R}$ матрицу поворота на угол φ по часовой стрелке обозначим через

$$U(\varphi) \equiv \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что в случае, когда матрица $A_\mu(\cdot)$ определяется условиями (2), для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $X_{A_\mu}(2^{k+1},0) = U(a_{k+1} - a_k)X^2_{A_\mu}(2^k,0)$.

Системы с коэффициентами, выбранными согласно (2), обладают рядом свойств, позволяющих строить однопараметрические семейства с различными асимптотическими характеристиками. В частности, если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, то матрица $A_\mu(\cdot)$ есть равномерный по $t \geqslant 0$ предел последовательности периодических матриц. В.М. Миллионщиков использовал такие системы в работах [3, 4]