Сформулированная теорема означает, в частности, что множество экспоненциальной устойчивости линейной дифференциальной системы из $\mathcal{M}_n$, $n \geqslant 2$, является в общем случае множеством точного первого борелевского класса.

Литература

1. Касабуцкий А. Ф. *О множествах Лебега показателя экспоненциальной устойчивости линейных дифференциальных систем с параметром* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 4. С. 58–67.

2. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. *Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости.* М.: Наука, 1966.

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ МИЛЛИОНЩИКОВА С ПРОИЗВОЛЬНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ ПАРАМЕТРА

А.В. Липницкий

Рассмотрим однопараметрическое семейство линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A_\mu(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant 0, \tag{1_μ}$$

с матрицами

$$A_\mu(t) := \begin{cases} d_k(\mu)\,\mathrm{diag}\,[1,-1], & 2k-2 \le t < 2k-1, \\ (\mu + b_k)J, & 2k-1 \le t < 2k, \end{cases} \text{ где } k \in \mathbb{N}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

и вещественным параметром μ; условия, которым удовлетворяют числа $b_k \in \mathbb{R}$ и функции $d_k(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, будут указаны ниже.

В работе [1] доказано, что старший показатель Ляпунова системы (1_μ), рассматриваемый как функция параметра μ, положителен на множестве положительной меры Лебега в случае, когда $d_k(\cdot)$ не зависят от μ и выполнено условие $d_k(\mu) \equiv d_k \geqslant d > 0$, $k \in \mathbb{N}$. В доказательстве этого результата существенно используются комплексные матрицы специального вида. В [2] приводится другой способ доказательства теоремы из [1], основанный на применении равенства Парсеваля для тригонометрических сумм.

Пусть $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, – произвольные числа. Положим

$$d_k(\mu) \equiv d(\mu) > 0, \quad b_{2^{n-1}(2k-1)} := a_n, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \mu \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Обозначим через $X_{A_\mu}(t,s)$, $t,s \geqslant 0$, матрицу Коши системы (1_μ). Для любого $\varphi \in \mathbb{R}$ матрицу поворота на угол φ по часовой стрелке обозначим через

$$U(\varphi) \equiv \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что в случае, когда матрица $A_\mu(\cdot)$ определяется условиями (2), для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $X_{A_\mu}(2^{k+1},0) = U(a_{k+1} - a_k)X^2_{A_\mu}(2^k,0)$.

Системы с коэффициентами, выбранными согласно (2), обладают рядом свойств, позволяющих строить однопараметрические семейства с различными асимптотическими характеристиками. В частности, если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, то матрица $A_\mu(\cdot)$ есть равномерный по $t \geqslant 0$ предел последовательности периодических матриц. В.М. Миллионщиков использовал такие системы в работах [3, 4] (см. также [5]) для доказательства существования неправильных по Ляпунову линейных дифференциальных систем с предельно периодическими и квазипериодическими коэффициентами.

Предложенные в этих работах методы требуют получения оценок собственных значений и векторов матрицы Коши системы (1_μ). Критерий Е. А. Барабанова [6] правильности линейной системы, состоящий в точности её сингулярных показателей, инициировал другой подход, состоящий в применении сингулярного представления матрицы Коши (см. формулу (3_n) ниже).

В работе [2] при выполнении условий (2), в которых $d(\mu) > 2^{20}$, и в случае непрерывной функции $d(\cdot)$ доказано существование такого значения параметра $\mu \in \mathbb{R}$, при котором соответствующая система (1_μ) неустойчива. В настоящем докладе аналогичный результат получен для любых $d(\mu) > 0$.

Положим $\eta_1(\mu) = e^{d(\mu)}$, $\psi_1(\mu) := 0$. Для любых $k \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{R}$ определим рекуррентно вещественные числа $\eta_k \geqslant 1$ и ψ_k следующим образом. Обозначим

$$\xi_k := 2\psi_k + a_k + \mu.$$

Поскольку $\eta_k \geqslant 1$ и, следовательно $\operatorname{sh}(2\ln\eta_k) \geqslant 0$, найдутся единственные

$$1 \leqslant \eta_{k+1} \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \varphi_k \in [-2^{-1}\pi, 2^{-1}\pi),$$

такие что выполнены равенства

$$\operatorname{sh}\ln\eta_{k+1} = (\operatorname{sh}(2\ln\eta_k))|\cos\xi_k|,$$

$$\operatorname{ctg}\varphi_k = (\operatorname{ch}(2\ln\eta_k))\operatorname{ctg}\xi_k, \text{ если } \sin\xi_k \neq 0, \quad \varphi_k = 0 \text{ в случае, когда } \sin\xi_k = 0.$$

Наконец, полагаем $\psi_{k+1} = \psi_k + \varphi_k/2 + \dfrac{\pi}{4}(1 - \operatorname{sgn}\,\cos\xi_k)$.

Лемма 1. [2] *Для любых $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{R}$ при выполнении условий (2) имеет место представление*

$$Y_n := X_{A_\mu}(2^n - 1, 0) = U(\psi_n)\begin{pmatrix} \eta_n & 0 \\ 0 & \eta_n^{-1} \end{pmatrix} U(\psi_n). \qquad (3_n)$$

Пусть $E(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}; \mathfrak{c}, \mathfrak{d})$ обозначает прямоугольник $\{(x, y)\,|\,\mathfrak{a} \leqslant x \leqslant \mathfrak{b},\ \mathfrak{c} \leqslant y \leqslant \mathfrak{d}\}$ на плоскости $\mathbb{R}^2$, где $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c} < \mathfrak{d}$.

Лемма 2. [7] *Пусть $h(t) = (h_1(t), h_2(t))$ и $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ $(-1 \leqslant t \leqslant 1)$ – непрерывные пути в $E(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}; \mathfrak{c}, \mathfrak{d})$, удовлетворяющие условиям*

$$h_1(-1) = \mathfrak{a}, \quad h_1(1) = \mathfrak{b}, \quad u_2(-1) = \mathfrak{c}, \quad u_2(1) = \mathfrak{d}.$$

Тогда эти два пути пересекаются, т.е. $h(s) = v(t)$ для некоторых s, t в $[-1, 1]$.

Для любого множества $M \subset \mathbb{R}$ обозначим через $\mathrm{C}\,(M)$ множество всех непрерывных функций из M в $\mathbb{R}$.

Теорема. *Для любых $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, и любой непрерывной функции $d(\cdot)$ при выполнении условий (2) найдётся $\mu \in \mathbb{R}$ такое, что система (1_μ) неустойчива.*

Для доказательства индукцией по $k \in \mathbb{N}$ устанавливается существование множества $V_k \subset \mathbb{R}$, $\alpha_k < \beta_k \in \mathbb{R}$, биекции $\omega_k(\cdot) : V_k \to \tilde{V}_k := [\alpha_k, \beta_k]$ и функции $\zeta_k(\cdot) : \tilde{V}_k \to \mathbb{R}$ таких, что справедливы сравнение

$$\zeta_k \circ \omega_k(\mu) \equiv (\xi_k(\mu) - a_k)\,(\operatorname{mod}\pi), \quad \mu \in V_k,$$

равенство

$$\zeta_k(\alpha_k) = -\pi + \zeta_k(\beta_k)$$

и включения

$$\zeta_k \in \mathrm{C}\,(\tilde{V}_k), \quad \eta_k \circ \omega_k^{-1} \in \mathrm{C}\,(\tilde{V}_k),$$

а также неравенство

$$\operatorname{sh} \ln \eta_k(\mu) \geqslant \varkappa_k := (\sqrt{2})^{k-1} \min_{\mu \in [0,\pi]} \operatorname{sh} e^{d(\mu)}, \quad \mu \in V_k. \qquad (4_k)$$

Тогда в силу леммы 1 для любого $\mu \in \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} V_k$ справедливы оценки

$$\|X_{A_\mu}(2^n - 1, 0)\| \overset{(3_n)}{=} \eta_n \overset{(4_n)}{>} \exp(2^{n/2-1}) \to +\infty \text{ при } n \to \infty.$$

Литература

1. Липницкий А. В. *Оценки снизу старшего характеристического показателя в однопараметрических семействах систем Миллионщикова* // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 2014. Вып. 30. С. 171–177.

2. Липницкий А. В. *О неустойчивости линейных дифференциальных систем Миллионщикова, зависящих от вещественного параметра* // Доклады НАН Беларуси. 2019. Т. 63. № 3. С. 270–277.

3. Миллионщиков В. М. *Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с почти-периодическими коэффициентами* // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4. № 3. С. 391–396.

4. Миллионщиков В. М. *Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами* // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 11. С. 1979–1983; 1974. Т. 10. № 3. С. 569.

5. Липницкий А. В. *О решении В.М. Миллионщиковым проблемы Еругина* // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36. № 12. С. 1615–1620.

6. Барабанов Е. А. *Сингулярные показатели и критерии правильности линейных дифференциальных систем* // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. № 2. С. 147–157.

7. Maehara R. *The Jordan Curve Theorem Via the Brouwer Fixed Point Theorem* // The American Mathematical Monthly. 1984. V. 91. № 10. P. 641—643.

АППРОКСИМАЦИИ СИГМА-ПОКАЗАТЕЛЯ С ОГРАНИЧЕННЫМ КОЛИЧЕСТВОМ ТОЧЕК РАЗБИЕНИЯ

Е.К. Макаров

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \qquad (1)$$

с кусочно-непрерывной и ограниченной матрицей коэффициентов A такой, что

$$\|A(t)\| \leqslant M < +\infty \quad \text{для всех} \quad t \geqslant 0.$$

Обозначим матрицу Коши системы (1) через X_A, а ее старший показатель через $\lambda_n(A)$. Вместе с системой (1) рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{y} = A(t)y + Q(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \qquad (2)$$

с кусочно-непрерывной и ограниченной матрицей возмущений Q такой, что

$$\|Q(t)\| \leqslant N_Q \exp(-\sigma t), \quad t \geqslant 0, \qquad (3)$$