равенство

$$\zeta_k(\alpha_k) = -\pi + \zeta_k(\beta_k)$$

и включения

$$\zeta_k \in \mathrm{C}\,(\tilde{V}_k), \quad \eta_k \circ \omega_k^{-1} \in \mathrm{C}\,(\tilde{V}_k),$$

а также неравенство

$$\operatorname{sh}\ln\eta_k(\mu) \geqslant \varkappa_k := (\sqrt{2})^{k-1} \min_{\mu\in[0,\pi]} \operatorname{sh} e^{d(\mu)}, \quad \mu \in V_k. \tag{4_k}$$

Тогда в силу леммы 1 для любого $\mu \in \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} V_k$ справедливы оценки

$$\|X_{A_\mu}(2^n-1,0)\| \overset{(3_n)}{=} \eta_n \overset{(4_n)}{>} \exp(2^{n/2-1}) \to +\infty \text{ при } n\to\infty.$$

Литература

1. Липницкий А. В. *Оценки снизу старшего характеристического показателя в однопараметрических семействах систем Миллионщикова* // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 2014. Вып. 30. С. 171–177.
2. Липницкий А. В. *О неустойчивости линейных дифференциальных систем Миллионщикова, зависящих от вещественного параметра* // Доклады НАН Беларуси. 2019. Т. 63. № 3. С. 270–277.
3. Миллионщиков В. М. *Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с почти-периодическими коэффициентами* // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4. № 3. С. 391–396.
4. Миллионщиков В. М. *Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами* // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 11. С. 1979–1983; 1974. Т. 10. № 3. С. 569.
5. Липницкий А. В. *О решении В.М. Миллионщиковым проблемы Еругина* // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36. № 12. С. 1615–1620.
6. Барабанов Е. А. *Сингулярные показатели и критерии правильности линейных дифференциальных систем* // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. № 2. С. 147–157.
7. Maehara R. *The Jordan Curve Theorem Via the Brouwer Fixed Point Theorem* // The American Mathematical Monthly. 1984. V. 91. № 10. P. 641—643.

АППРОКСИМАЦИИ СИГМА-ПОКАЗАТЕЛЯ С ОГРАНИЧЕННЫМ КОЛИЧЕСТВОМ ТОЧЕК РАЗБИЕНИЯ

Е.К. Макаров

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad t\geqslant 0, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывной и ограниченной матрицей коэффициентов A такой, что

$$\|A(t)\| \leqslant M < +\infty \quad \text{для всех} \quad t\geqslant 0.$$

Обозначим матрицу Коши системы (1) через X_A, а ее старший показатель через $\lambda_n(A)$. Вместе с системой (1) рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{y} = A(t)y + Q(t)y, \quad y\in\mathbb{R}^n, \quad t\geqslant 0, \tag{2}$$

с кусочно-непрерывной и ограниченной матрицей возмущений Q такой, что

$$\|Q(t)\| \leqslant N_Q \exp(-\sigma t), \quad t\geqslant 0, \tag{3}$$

где $\sigma > 0$. Обозначим старший показатель системы (2) через $\lambda_n(A+Q)$.

Пусть $\mathfrak{M}_\sigma(A)$ – множество всех возмущений Q, удовлетворяющих условию (3) и имеющих соответствующую размерность. Любое $Q \in \mathfrak{M}_\sigma$ называется сигма-возмущением, а число $\nabla_\sigma(A) := \sup\bigl\{\lambda_n(A+Q) : Q \in \mathfrak{M}_\sigma(\mathfrak{A})\bigr\}$ называется [1; 2, с. 214] старшим сигма-показателем системы (1). В [1] доказано, что сигма-показатель может быть вычислен с помощью следующего алгоритма:

$$\nabla_\sigma(A) = \varlimsup_{m\to\infty} \frac{\xi_m(\sigma)}{m},$$
$$\xi_m(\sigma) = \max_{i<m}\bigl(\ln\|X_A(m,i)\| + \xi_i(\sigma) - \sigma i\bigr), \quad \xi_1 = 0, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Известно [2, с. 216], что $\nabla_\sigma(A)$ является выпуклой монотонно убывающей функцией на $[0, +\infty[$, причем $\nabla_\sigma(A) = \lambda_n(A)$ для всех $\sigma > \sigma_0(A)$, где $\sigma_0(A) \leqslant 2M$ – некоторое положительное число.

Альтернативное представление для $\xi_m(\sigma)$ предложено в [3]. Пусть $\mathcal{D}(m)$ – множество всех непустых множеств $d \subset \{1, \ldots, m-1\} \subset \mathbb{N}$. Будем предполагать, что для каждого $d \in \mathcal{D}(m)$ элементы d нумеруются в порядке возрастания, так что $d_1 < d_2 < \cdots < d_s$ и $d = \{d_1, d_2, \ldots, d_s\}$, где $s = |d|$ – это число элементов множества d. Пусть также $\|d\| := d_1 + \ldots + d_s$ для $d \in \mathcal{D}(m)$ и $\|d\| := 0$ для $d = \varnothing$. Кроме того, для удобства мы предполагаем, что $d_0 = 0$ и $d_{s+1} = m$ для каждого $d \in \mathcal{D}_0(m) := \mathcal{D}(m) \cup \{\varnothing\}$. Заметим, что мы не включаем эти дополнительные элементы в множество d. При указанных предположениях определим величину $\Xi(m,d)$ равенством

$$\Xi(m,d) := \sum_{i=0}^{s} \ln\|X_A(d_{i+1}, d_i)\|,$$

где $m \in \mathbb{N}$, $d \in \mathcal{D}(m)$ и $s := |d|$. Согласно [3] выполнено равенство

$$\xi_m(\sigma) = \max_{d\in\mathcal{D}_0(m)}\bigl(\Xi(m,d) - \sigma\|d\|\bigr),$$

и поэтому

$$\nabla_\sigma(A) = \varlimsup_{m\to\infty} m^{-1} \max_{d\in\mathcal{D}_0(m)}\bigl(\Xi(m,d) - \sigma\|d\|\bigr). \tag{4}$$

Для построения возмущений Q, обеспечивающих значения $\lambda_n(A+Q)$ близкие к $\nabla_\sigma(A)$, полезно знать некоторые (или все) последовательности $d(m) \in \mathcal{D}_0(m)$, $m \in \mathbb{N}$, такие, что

$$\nabla_\sigma(A) = \lim_{m\to\infty} m^{-1}\bigl(\Xi(m, d(m)) - \sigma\|d(m)\|\bigr). \tag{5}$$

Предложение 1. [1; 2, с. 215] *Если $b \in \mathcal{D}_0(m)$ удовлетворяет условию $\xi_m(\sigma) = \Xi(m,b) - \sigma\|b\|$, то для каждого $i \in \{1, \ldots, s\}$ выполнено неравенство*

$$b_{i+1} - b_i \geqslant \frac{\sigma}{2M} b_i,$$

где $b = \{b_1, \ldots, b_s\}$, $s = |b|$.

Основываясь на теории характеристических векторов (см. [4]) можно предположить, что некоторую информацию о последовательностях $d(m)$ в (5) можно получить, зная величины угловых коэффициентов опорных прямых к графику $\nabla_\sigma(A)$. Поскольку результатов такого рода пока нет, здесь мы рассматриваем некоторую упрощенную версию задачи. Для этого мы ограничим число точек разбиения d_i в (4) на каждом отрезке $[0, m]$ некоторым числом $k \in \mathbb{N}$.

Пусть $\mathcal{D}^k(m) \subset \mathcal{D}(m)$, $k \in \mathbb{N}$, – множество всех $d \in \mathcal{D}(m)$ таких, что $|d| \leqslant k$. Положим также $\mathcal{D}_0^k(m) := \mathcal{D}^k(m) \cup \{\varnothing\}$.

Определение 1. Число

$$\nabla_\sigma^k(A) = \overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1} \max_{d\in\mathcal{D}()} (\Xi(m,d) - \sigma\|d\|).$$

будем называть k*-точечной аппроксимацией для* $\nabla_\sigma(A)$.

Предложение 2. *Для каждого* $k \in \mathbb{N}$ *справедливы следующие утверждения:*

1) $\nabla_\sigma(A) \geqslant \nabla_\sigma^k(A) \geqslant \lambda_n(A)$ *при всех* $\sigma > 0$;

2) $\nabla_\sigma^k(A)$ *– выпуклая монотонно убывающая функция на* $[0,+\infty[$ *такая, что* $\nabla_\sigma(A) = \lambda_n(A)$ *для всех* $\sigma > \sigma_0(A)$;

3) если $b \in \mathcal{D}_0^k(m)$ *удовлетворяет условию*

$$\Xi(m,b) - \sigma\|b\| = \max_{d\in\mathcal{D}_0^k(m)} \bigl(\Xi(m,d) - \sigma\|d\|\bigr), \tag{6}$$

то выполнено неравенство $\sigma\|b\| \leqslant 2Mm$.

Для каждого $\sigma > 0$ обозначим множество всех $b \in \mathcal{D}_0^k(m)$, удовлетворяющих условию (6), через $\mathcal{B}_\sigma^k(m)$. Положим

$$\mathrm{B}_\sigma(A) = \underline{\lim_{m\to\infty}} \min_{b\in\mathcal{B}_\sigma^k(m)} \frac{\|b\|}{m}, \quad \mathrm{T}_\sigma(A) = \overline{\lim_{m\to\infty}} \max_{b\in\mathcal{B}_\sigma^k(m)} \frac{\|b\|}{m}.$$

Множество угловых коэффициентов опорных прямых, проведенных к графику некоторой выпуклой функции $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ в точках $\bigl(s, f(s)\bigr)$, где $s \in [0,+\infty[$, обозначим через $\mathcal{S}_s(f)$.

Теорема. *Множество* $\mathcal{S}_\sigma\bigl(\nabla_\sigma^k(A)\bigr)$ *при любых* $\sigma > 0$ *совпадает с отрезком*

$$\bigl[\mathrm{B}_\sigma(A), \mathrm{T}_\sigma(A)\bigr].$$

Литература

1. Изобов Н. А. *О старшем показателе линейной системы с экспоненциальными возмущениями* // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1186–1192.

2. Изобов Н. А. *Введение в теорию показателей Ляпунова.* Минск: БГУ, 2006.

3. Макаров Е. К., Марченко И. В., Семерикова Н. В. *Об оценке сверху для старшего показателя линейной дифференциальной системы с интегрируемыми на полуоси возмущениями* // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. № 2. С. 215–224.

4. Макаров Е. К. *О взаимосвязи между характеристическими функционалами и слабыми характеристическими показателями* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 3. С. 393–399.

О ЛОКАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ СПЕКТРА ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

С.Н. Попова, М.В. Федорова

Рассмотрим линейную систему с дискретным временем

$$x(k+1) = A(k)x(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

с вполне ограниченной [1] на $\mathbb{Z}$ матрицей коэффициентов $A(\cdot)$. Полный спектр показателей Ляпунова системы (1) обозначим через $\lambda(A) = \bigl(\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)\bigr)$. Всюду