Пусть $\mathcal{D}^k(m) \subset \mathcal{D}(m)$, $k \in \mathbb{N}$, – множество всех $d \in \mathcal{D}(m)$ таких, что $|d| \leqslant k$. Положим также $\mathcal{D}_0^k(m) := \mathcal{D}^k(m) \cup \{\varnothing\}$.

Определение 1. Число

$$\nabla_\sigma^k(A) = \overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1} \max_{d\in\mathcal{D}()} (\Xi(m,d) - \sigma\|d\|).$$

будем называть k*-точечной аппроксимацией для* $\nabla_\sigma(A)$.

Предложение 2. *Для каждого* $k \in \mathbb{N}$ *справедливы следующие утверждения:*

1) $\nabla_\sigma(A) \geqslant \nabla_\sigma^k(A) \geqslant \lambda_n(A)$ *при всех* $\sigma > 0$;

2) $\nabla_\sigma^k(A)$ *– выпуклая монотонно убывающая функция на* $[0,+\infty[$ *такая, что* $\nabla_\sigma(A) = \lambda_n(A)$ *для всех* $\sigma > \sigma_0(A)$;

3) если $b \in \mathcal{D}_0^k(m)$ *удовлетворяет условию*

$$\Xi(m,b) - \sigma\|b\| = \max_{d\in\mathcal{D}_0^k(m)} \big(\Xi(m,d) - \sigma\|d\|\big), \tag{6}$$

то выполнено неравенство $\sigma\|b\| \leqslant 2Mm$.

Для каждого $\sigma > 0$ обозначим множество всех $b \in \mathcal{D}_0^k(m)$, удовлетворяющих условию (6), через $\mathcal{B}_\sigma^k(m)$. Положим

$$\mathrm{B}_\sigma(A) = \underline{\lim_{m\to\infty}} \min_{b\in\mathcal{B}_\sigma^k(m)} \frac{\|b\|}{m}, \quad \mathrm{T}_\sigma(A) = \overline{\lim_{m\to\infty}} \max_{b\in\mathcal{B}_\sigma^k(m)} \frac{\|b\|}{m}.$$

Множество угловых коэффициентов опорных прямых, проведенных к графику некоторой выпуклой функции $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ в точках $\big(s, f(s)\big)$, где $s \in [0,+\infty[$, обозначим через $\mathcal{S}_s(f)$.

Теорема. *Множество* $\mathcal{S}_\sigma\big(\nabla_\sigma^k(A)\big)$ *при любых* $\sigma > 0$ *совпадает с отрезком*

$$\big[\mathrm{B}_\sigma(A), \mathrm{T}_\sigma(A)\big].$$

Литература

1. Изобов Н. А. *О старшем показателе линейной системы с экспоненциальными возмущениями* // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1186–1192.
2. Изобов Н. А. *Введение в теорию показателей Ляпунова.* Минск: БГУ, 2006.
3. Макаров Е. К., Марченко И. В., Семерикова Н. В. *Об оценке сверху для старшего показателя линейной дифференциальной системы с интегрируемыми на полуоси возмущениями* // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. № 2. С. 215–224.
4. Макаров Е. К. *О взаимосвязи между характеристическими функционалами и слабыми характеристическими показателями* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 3. С. 393–399.

О ЛОКАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ СПЕКТРА ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

С.Н. Попова, М.В. Федорова

Рассмотрим линейную систему с дискретным временем

$$x(k+1) = A(k)x(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

с вполне ограниченной [1] на $\mathbb{Z}$ матрицей коэффициентов $A(\cdot)$. Полный спектр показателей Ляпунова системы (1) обозначим через $\lambda(A) = \big(\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)\big)$. Всюду считаем, что полный спектр показателей Ляпунова этой и каждой рассматриваемой ниже системы n-го порядка принадлежит множеству $\mathbb{R}^n_{\leqslant}$ упорядоченных по неубыванию наборов n чисел. Наряду с системой (1) рассмотрим возмущенную систему

$$y(k+1) = \big(A(k) + Q(k)\big)y(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

где матрица возмущений $Q\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ также предполагается вполне ограниченной. Для этой системы определен полный спектр показателей Ляпунова $\lambda(A+Q) \in \mathbb{R}^n_{\leqslant}$. Систему (2) отождествим с матрицей возмущений $Q(\cdot)$. Множество всех возмущенных систем вида (2) обозначим через $\mathcal{Q}$. Пусть $\mathcal{Q}_\delta$ – его подмножество, отвечающее возмущениям $Q(\cdot)$, для которых справедлива оценка $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \|Q(k)\| < \delta$ с фиксированным $\delta > 0$. Обозначим

$$\lambda(\mathcal{Q}_\delta) \doteq \big\{\lambda(A+Q)\colon Q(\cdot) \in \mathcal{Q}_\delta\big\}.$$

Кроме того, для произвольного $\varepsilon > 0$ введем в рассмотрение множество

$$\mathcal{O}_\varepsilon\big(\lambda(A)\big) \doteq \big\{\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n_{\leqslant}\colon \max_{j=1,\ldots,n} |\mu_j - \lambda_j(A)| < \varepsilon\big\}.$$

Определение 1. Полный спектр показателей Ляпунова системы (1) называется *устойчивым*, если отображение $Q(\cdot) \mapsto \lambda(A+Q)$ непрерывно в точке $Q(k) \equiv 0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\lambda(\mathcal{Q}_\delta) \subset \mathcal{O}_\varepsilon\big(\lambda(A)\big)$.

Определение 2. Полный спектр показателей Ляпунова системы (1) называется *открытым*, если отображение $Q(\cdot) \mapsto \lambda(A+Q)$ открыто в точке $Q(k) \equiv 0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\mathcal{O}_\delta\big(\lambda(A)\big) \subset \lambda(\mathcal{Q}_\varepsilon)$.

Систему (1) отождествим с матрицей коэффициентов $A(\cdot)$. Обозначим $A_s(k) \doteq A(k+s)$ – сдвиг $A(\cdot)$ на $s \in \mathbb{Z}$ и рассмотрим множество $\mathfrak{R}(A)$ – замыкание множества $\{A_s(\cdot)\colon s \in \mathbb{Z}\}$ в топологии поточечной сходимости на $\mathbb{Z}$. Метрика в $\mathfrak{R}(A)$ может быть задана равенством

$$\rho(\widetilde{A}, \widehat{A}) = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \min\{\|\widetilde{A}(k) - \widehat{A}(k)\|, |k|^{-1}\}.$$

Пространство $(\mathfrak{R}(A), \rho)$ компактно [2]. Оно называется *оболочкой Бебутова* системы $A(\cdot)$.

Каждую функцию $\widehat{A}(\cdot) \in \mathfrak{R}(A)$ отождествим с линейной системой

$$x(k+1) = \widehat{A}(k)x(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема. *Если полный спектр показателей Ляпунова системы $A(\cdot)$ устойчив, то каждая система $\widehat{A}(\cdot) \in \mathfrak{R}(A)$ обладает устойчивым и открытым полным спектром показателей Ляпунова.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20–01–00293) и Министерства науки и высшего образования в рамках государственного задания № 075-01265-22-00 (проект FEWS-2020-0010 “Развитие теории и методов управления и стабилизации динамических систем”).

Литература

1. Демидович В. Б. *Об одном признаке устойчивости разностных уравнений* // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1247–1255.

2. Sell G. R. *Topological Dynamics and Ordinary Differential Equations.* London: Van Nostrand Reinhold Company, 1971.