ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНОГО ЭФФЕКТА ПЕРРОНА ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.В. Равчеев

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с непрерывными коэффициентами. Обозначим показатели Ляпунова системы (1) через $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$, а их спектр — через $\Lambda(A) = \big(\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)\big)$. Поскольку мы не предполагаем коэффициенты рассматриваемых систем ограниченными, их показатели Ляпунова являются, вообще говоря, точками расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, +\infty\}$, которая наделяется порядковой топологией.

Для данных метрического пространства M и функции $\theta\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ рассмотрим класс $\mathcal{Q}_n^\theta[A](M)$ непрерывных по совокупности переменных функций

$$Q\colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n},$$

удовлетворяющих условиям:

1) $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} \sup_{\mu\in M} \|Q(t,\mu)\| e^{\theta(t)t} < \infty$;

2) для всяких $k = \overline{1,n}$ и $\mu \in M$ выполняется неравенство

$$\lambda_k(A(\cdot) + Q(\cdot,\mu)) \geqslant \lambda_k(A).$$

Отметим, что для любой системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}_n$ класс $\mathcal{Q}_n^\theta[A](M)$ не пуст, поскольку ему заведомо принадлежит матрица $Q \equiv 0$.

Ставится задача полного дескриптивно-множественного описания для каждых $n \geqslant 2$ и метрического пространства M класса

$$\Pi\mathcal{Q}_n^\theta(M) = \big\{\big(\Lambda(A), \Lambda(A+Q)\big) \mid A \in \widetilde{\mathcal{M}}_n,\ Q \in \mathcal{Q}_n^\theta[A](M)\big\}.$$

Указанную задачу можно рассматривать как обобщение примера Перрона [1, § 1.4] на случай неограниченных коэффициентов.

Будем говорить [2, с. 224], что функция $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $(^*, G_\delta)$, если для любого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}\big([r, +\infty]\big)$ луча $[r, +\infty]$ является G_δ-множеством метрического пространства M. В частности, класс $(^*, G_\delta)$ – подкласс второго класса Бэра [2, с. 248].

Решение поставленной задачи содержит следующая

Теорема. *Для каждых метрического пространства M, натурального числа $n \geqslant 2$ и непрерывной функции $\theta\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ пара $\big(l, f\big)$, где $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \big(\overline{\mathbb{R}}\big)^n$ и $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon M \to \big(\overline{\mathbb{R}}\big)^n$, принадлежит классу $\Pi\mathcal{Q}_n^\theta(M)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) $l_1 \leqslant \ldots \leqslant l_n$;

2) $f_1(\mu) \leqslant \ldots \leqslant f_n(\mu)$ *для любого* $\mu \in M$;

3) $f_i(\mu) \geqslant l_i$ *для всех* $\mu \in M$ *и* $i = \overline{1,n}$;

4) для любого $i=\overline{1,n}$ функция $f_i(\cdot)\colon M\to\overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $(^*,G_\delta)$.

Замечание. Аналог этой теоремы для случая систем с ограниченными коэффициентам установлен в работе [3].

Приведённая теорема показывает, что все теоретически возможные пары спектров исходной и параметрически возмущённой систем (при дополнительном условии, что все показатели возмущённой системы не меньше, чем у исходной) можно получить в классе возмущений, убывающих быстрее всякой экспоненты. Эта ситуация является специфичной для класса систем с неограниченными коэффициентами, т.к. показатели Ляпунова систем с ограниченными коэффициентами инвариантны относительно возмущений, убывающих быстрее любой экспоненты [1, § 8.1].

Литература

1. Изобов Н. А. *Введение в теорию показателей Ляпунова.* Мн.: БГУ, 2006.

2. Хаусдорф Ф. *Теория множеств.* М.–Л.: ОНТИ, 1937.

3. Барабанов Е. А., Быков В. В. *Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях, экспоненциально убывающих к нулю на бесконечности* // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. 2019. Т. 25. № 4. С. 31–43.

МАССИВНЫЕ И ПОЧТИ МАССИВНЫЕ СВОЙСТВА УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ РАЗНЫХ ТИПОВ

И.Н. Сергеев

Для заданной окрестности нуля $G\subset\mathbb{R}^{\varkappa}$ рассмотрим систему

$$\dot x=f(t,x),\quad x\in G,\quad f(t,0)=0,\quad t\in\mathbb{R}_+\equiv[0,+\infty),\quad f,f'_x\in C(\mathbb{R}_+\times G).\qquad(1)$$

Через S_* и S_δ будем обозначать множества всех непродолжаемых ненулевых решений x системы (1) и, соответственно, тех из них, что удовлетворяют начальному условию

$$|x(0)|<\delta.$$

Определение 1. [1, 2] Будем говорить, что система (1) обладает *перроновской* или, соответственно, *верхнепредельной*:

1) *устойчивостью*, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что любое решение $x\in S_\delta$ удовлетворяет требованию

$$\varliminf_{t\to+\infty}|x(t)|\leqslant\varepsilon\quad\text{или, соответственно,}\quad\varlimsup_{t\to+\infty}|x(t)|\leqslant\varepsilon,\qquad(2)$$

молчаливо предполагающему, что решение x определено на всей полуоси $\mathbb{R}^+$;

2) *полной* (или *глобальной*) *неустойчивостью*, если для некоторых $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ любое решение $x\in S_\delta$ (или $x\in S_*$) не удовлетворяет требованию (2);

3) *асимптотической* (или *глобальной*) *устойчивостью*, если при $\varepsilon=0$ для некоторого $\delta>0$ любое решение $x\in S_\delta$ (или $x\in S_*$) удовлетворяет требованию (2).
Для определения аналогичных свойств *ляпуновского* типа [3, гл. II, § 1] системы (1) нужно:

4) в пп. 1 и 2 заменить требование (2) требованием

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+}|x(t)|\leqslant\varepsilon,\qquad(3)$$