4) для любого $i = \overline{1,n}$ *функция* $f_i(\cdot)\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ *принадлежит классу* $(^*, G_\delta)$.

Замечание. Аналог этой теоремы для случая систем с ограниченными коэффициентам установлен в работе [3].

Приведённая теорема показывает, что все теоретически возможные пары спектров исходной и параметрически возмущённой систем (при дополнительном условии, что все показатели возмущённой системы не меньше, чем у исходной) можно получить в классе возмущений, убывающих быстрее всякой экспоненты. Эта ситуация является специфичной для класса систем с неограниченными коэффициентами, т.к. показатели Ляпунова систем с ограниченными коэффициентами инвариантны относительно возмущений, убывающих быстрее любой экспоненты [1, § 8.1].

Литература

1. Изобов Н. А. *Введение в теорию показателей Ляпунова.* Мн.: БГУ, 2006.

2. Хаусдорф Ф. *Теория множеств.* М.–Л.: ОНТИ, 1937.

3. Барабанов Е. А., Быков В. В. *Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях, экспоненциально убывающих к нулю на бесконечности* // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. 2019. Т. 25. № 4. С. 31–43.

МАССИВНЫЕ И ПОЧТИ МАССИВНЫЕ СВОЙСТВА УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ РАЗНЫХ ТИПОВ

И.Н. Сергеев

Для заданной окрестности нуля $G \subset \mathbb{R}^{\varkappa}$ рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x \in G, \quad f(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G). \qquad (1)$$

Через S_* и S_δ будем обозначать множества всех непродолжаемых ненулевых решений x системы (1) и, соответственно, тех из них, что удовлетворяют начальному условию

$$|x(0)| < \delta.$$

Определение 1. [1, 2] Будем говорить, что система (1) обладает *перроновской* или, соответственно, *верхнепредельной*:

1) *устойчивостью*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in S_\delta$ удовлетворяет требованию

$$\varliminf_{t\to+\infty} |x(t)| \leqslant \varepsilon \quad \text{или, соответственно,} \quad \varlimsup_{t\to+\infty} |x(t)| \leqslant \varepsilon, \qquad (2)$$

молчаливо предполагающему, что решение x определено на всей полуоси $\mathbb{R}^+$;

2) *полной* (или *глобальной*) *неустойчивостью*, если для некоторых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ любое решение $x \in S_\delta$ (или $x \in S_*$) не удовлетворяет требованию (2);

3) *асимптотической* (или *глобальной*) *устойчивостью*, если при $\varepsilon = 0$ для некоторого $\delta > 0$ любое решение $x \in S_\delta$ (или $x \in S_*$) удовлетворяет требованию (2).
Для определения аналогичных свойств *ляпуновского* типа [3, гл. II, § 1] системы (1) нужно:

4) в пп. 1 и 2 заменить требование (2) требованием

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} |x(t)| \leqslant \varepsilon, \qquad (3)$$

а в п. 3 в дополнение к соответствующему верхнепредельному свойству потребовать наличие у системы (1) ляпуновской устойчивости.

Определение 2. [4, 5] Все перечисленные в определении 1 ляпуновские, перроновские и верхнепредельные свойства системы (1) назовём *массивными*: при их описании сразу на все решения $x \in S$, где $S = S_\delta, S_*$, накладывается определённое условие – требование (2), (3) или его отрицание. Каждому массивному свойству из определения 1 поставим в соответствие его *почти массивный* аналог, а именно: *почти устойчивость, почти полная* (*почти глобальная*) *неустойчивость* и *почти асимптотическая* (*почти глобальная*) *устойчивость*, — в описании которых соответствующее условие накладывается уже не на все решения $x \in S$, а только на те, начальные значения которых не принадлежат некоторому множеству, называемому *множеством вырождения*, нулевой меры Лебега и первой категории Бэра (представимому в виде счётного объединения нигде не плотных множеств).

Замечание. Свойства системы (1), противоположные массивным свойствам из определения 2, естественно называть *точечными*: в них, напротив, невыполнение определённого условия требуется хотя бы от одного решения $x \in S$. Однако и они могут носить массивный характер, например [6]: существует система (1), ляпуновски вполне неустойчивая, но обладающая перроновской и верхнепредельной массивной, хотя и частной устойчивостью, т.е. при некотором $\delta > 0$ все её решения $x \in S = S_* \setminus S_\delta$ сходятся к нулю на бесконечности.

Свойства ляпуновской устойчивости и ляпуновской почти устойчивости в действительности оказываются неразличимыми между собой, о чём и говорит

Теорема 1. *Если система (1) ляпуновски почти устойчива, то она и ляпуновски устойчива.*

Если ляпуновскую асимптотическую (или глобальную) устойчивость, означающую одновременное выполнение двух условий: ляпуновской устойчивости и верхнепредельной асимптотической (или, соответственно, глобальной) устойчивости, — ослабить до ляпуновской почти асимптотической (или почти глобальной) устойчивости, то первого условия, а именно, ляпуновской устойчивости, это ослабление не коснётся, т.е. справедлива

Теорема 2. *Если система (1) ляпуновски почти асимптотически или почти глобально устойчива, то она и ляпуновски устойчива.*

Логическая иерархия, действующая между массивными свойствами, не только полностью распространяется на их почти массивные аналоги, но и более того, справедливы

Теорема 3. *Если для каких-либо двух массивных свойств имеет место импликация, то она имеет место и для их почти массивных аналогов.*

Теорема 4. *Если какие-либо два массивных свойства несовместны, то несовместны и их почти массивные аналоги.*

Приведённый в теореме 1 пример массивного свойства, неразличимого со своим почти массивным аналогом, оказывается уникальным в том смысле, который разъясняют

Теорема 5. *При $n = 2$ существует автономная линейная диагональная система (1), не обладающая ни ляпуновской, ни перроновской, ни верхнепредельной полной неусточивостью, но почти глобально неустойчивая и ляпуновски, и перроновски, и верхнепредельно.*

Теорема 6. *При $n = 2$ существует автономная система (1), не устойчивая ни перроновски, ни верхнепредельно, но почти глобально устойчивая и перроновски, и* *верхнепредельно.*

Теорема 7. *При* $n = 2$ *существует автономная система (1), не обладающая ляпуновской асимптотической устойчивостью, но ляпуновски почти глобально устойчивая.*

Заметим, что теорема 7 распространяет на ляпуновские свойства утверждение теоремы 5 в максимально возможной степени общности — ровно в той, в какой оно не противоречит теореме 1. Множества вырождения почти массивных свойств в примерах систем из теорем 5–7 можно выбрать совпадающими с одной из координатных осей или полуосей.

Согласно теореме 1, добавка «почти» применительно к ляпуновской устойчивости роли не играет. В одномерном же случае она не работает вообще, как показывает

Теорема 8. *При* $n = 1$ *для любой системы (1) любое массивное свойство неразличимо с его почти массивным аналогом.*

Глобальная устойчивость любого типа абсолютно чувствительна к самому незначительному сужению фазовой области — выкалыванию одной ненулевой точки, о чём и говорит

Теорема 9. *Любая система (1), обладающая какой-либо глобальной устойчивостью, перестаёт быть таковой при удалении из её фазовой области любой ненулевой точки.*

В автономном же случае теорема 9 распространяется и на почти глобальную устойчивость — в том смысле, который подразумевает

Теорема 10. *Любая автономная система (1), обладающая какой-либо почти глобальной устойчивостью, перестаёт быть таковой при удалении из её фазовой области любой кривой, трансверсальной к векторному полю этой системы хотя бы в одной точке.*

Известно [7], что полная ляпуновская неустойчивость автономной системы влечёт за собой её полную, и даже глобальную перроновскую (а тем более верхнепредельную) неустойчивость. Однако для тех же свойств с добавкой «почти» аналогичная импликация в автономном случае уже не действует, что и подтверждает

Теорема 11. [7] *При* $n = 2$ *существует автономная система (1), обладающая перроновской устойчивостью, даже почти глобальной, но ляпуновской и верхнепредельной неустойчивостью, даже почти глобальной, причём множество вырождения всех её почти массивных свойств представляет собой луч, выходящий из нуля и заполненный неподвижными точками, а для любого решения* $x \in S_*$, *начинающемся не на этом луче, выполнены соотношения*

$$0 = \varliminf_{t\to+\infty} |x(t)| < \varlimsup_{t\to+\infty} |x(t)| = +\infty. \tag{4}$$

Если в формулировке теоремы 11 отменить последнее из требований (4), то в том же примере можно снять добавку «почти» и с перроновской глобальной устойчивости, т.е. верна

Теорема 12. *При* $n = 2$ *существует автономная система (1), обладающая перроновской глобальной устойчивостью, но ляпуновской и верхнепредельной неустойчивостью, даже почти глобальной, причём множество её вырождения представляет собой окружность, проходящую через нуль.*

Литература

1. Сергеев И. Н. *Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову* // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856.

2. Сергеев И. Н. *Определение верхнепредельной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1556–1557.

3. Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М.: Наука, 1967.

4. Сергеев И. Н. *Массивные и почти массивные свойства устойчивости и неустойчивости дифференциальных систем* // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1576–1578.

5. Сергеев И. Н. *Особенности почти массивных свойств устойчивости и неустойчивости одномерных и автономных дифференциальных систем* // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 6.

6. Бондарев А. А. *Существование вполне неустойчивой по Ляпунову дифференциальной системы, обладающей перроновской и верхнепредельной массивной частной устойчивостью* // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 6. С. 858–859.

7. Сергеев И. Н. *Некоторые особенности перроновских и ляпуновских свойств устойчивости автономных систем* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 830–831.

ON SOME METHODS FOR STUDYING QUALITATIVE AND ASYMPTOTIC PROPERTIES OF SOLUTIONS TO HIGHER-ORDER QUASILINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

I.V. Astashova

For the equation

$$y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) y^{(j)} = p(x)|y|^k \operatorname{sgn} y \ , \tag{1}$$

where $k > 1$, $n \geqslant 2$, the functions $p, a_0, \ldots, a_{n-1}$ are continuous for $x \geqslant 0$, we discuss some methods for studying qualitative and asymptotic properties of its solutions. (See, for example, [1–6]).

Theorem 1. *If the continuous functions $a_0, \ldots, a_{n-1}$ and p satisfy the conditions*

$$\int_{x_0}^{\infty} x^{n-j-1} |a_j(x)|\, dx < \infty \quad \textit{for all} \ \ j \in \{0, \ldots, n-1\} \tag{2}$$

and, for some integer number $m \in \{0, \ldots, n-1\}$, the condition

$$\int_{x_0}^{\infty} x^{n-1+(k-1)m}\, |p(x)|\, dx < \infty, \tag{3}$$

then for any $C \neq 0$ there exists a solution y to equation (1) satisfying, as $x \to \infty$,

$$y^{(j)}(x) \sim \frac{C\, m!\, x^{m-j}}{(m-j)!} \quad \textit{for all } j \in \{0, \ldots, m\},$$

$$y^{(j)}(x) = o\left(x^{m-j}\right) \ \ \textit{and} \ \int^{\infty} s^{j-m-1} \left|y^{(j)}(s)\right|\, ds < \infty \ \ \textit{for all } j \in \{m+1, \ldots, n-1\}.$$

Sketch of the proof. To prove this theorem, we use a factorisation of the linear differential operator producing the left-hand side of (1). We use [7, Chap.1, Lemma 3.1, Lemma 3.2] and the following lemmas.