КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ОБ ИЗОХРОННЫХ И СИЛЬНО ИЗОХРОННЫХ ФОКУСАХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ЛЬЕНАРА

В.В. Амелькин

Рассмотрим вещественную полиномиальную дифференциальную систему Льенара

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x + A(x) - B(x)y \tag{1}$$

в предположении, что полиномы $A(x)$ и $B(x)$ задаются равенствами

$$A(x) = \sum_{k=2}^{n} A_k x^k, \quad B(x) = \sum_{j=1}^{r} B_j x^j, \quad A_n \neq 0, \quad B(x) \not\equiv 0,$$

где $n \geqslant 3$ – нечетное число, $r \leqslant n-1$.

Как хорошо известно, особая точка $O(0,0)$ системы (1) является либо центром, либо фокусом.

Пусть OA – луч (с началом в точке $O(0,0)$), составляющий с положительной полуосью оси абсцисс декартовой прямоугольной системы координат xOy угол $\varphi \in [0, 2\pi)$. Тогда центр или фокус $O(0,0)$ системы (1) называют *изохронным*, если все изображающие точки, начиная двигаться по траекториям центра или фокуса системы (1) с некоторого луча OA в момент времени $t = t_0$, совершают полный оборот вокруг начала за одно и то же время $T = 2\pi$. Луч OA из приведённого определения изохронности будем называть *лучом-изохроной*.

Пусть, далее, y^+ и y^- – соответственно положительная и отрицательная полуоси оси Oy системы координат xOy. Особая точка $O(0,0)$ системы (1) называется *сильно изохронной*, если она изохронная и если дополнительно изображающая точка, выходящая из точки полуоси y^+, пересечет полуось y^- в первый раз через время π.

Отметим, что поскольку полиномиальная система Льенара (1) в общем случае приводится обратимой полиномиальной заменой координат

$$u = x, \quad v = y - x\Phi(x), \tag{2}$$

где $\Phi(x) = x^{-2} \int_0^x sB(s)\, ds$, к системе

$$\dot{u} = -v - u\Phi(u), \quad \dot{v} = u - v\Phi(u) + A(u) - u\Phi^2(u),$$

приходим к выводу, что начало координат $O(0,0)$, как особая точка системы (1), является изохронной (причем единственной) при условии $A(x) = x\Phi^2(x)$.

А так как полуоси y^+ и y^- являются лучами-изохронами в случае фокуса $O(0,0)$ системы (1) [1], то исследуя систему (1) в случае фокуса во всей фазовой плоскости (т.е. глобально), получаем на основании диффеоморфизма (2) и [1], что имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Для того чтобы особая точка $O(0,0)$ полиномиальной системы была изохронным, а значит, и сильно изохронным фокусом, необходимо и достаточно выполнение равенств*

$$A_2 = 0, \quad A_k = \sum_{r=1}^{k-2} \frac{B_r}{r+2} \cdot \frac{B_{k-r-1}}{k-r+1}, \quad k = \overline{3,n}, \tag{3}$$

в которых по крайней мере один из коэффициентов B_{2s}, $s = \overline{1,(n-1)/2}$, полинома $B(x)$ при заданном нечетном $n \geqslant 5$ отличен от нуля.

Теорема 2. *Для того чтобы особая точка $O(0,0)$ полиномиальной системы (1) была изохронным, а значит, и сильно изохронным фокусом, необходимо и достаточно, чтобы диффеоморфизм плоскости $\mathbb{R}^2$*

$$u = x, \quad v = y - x \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{B_k}{k+2}\, x^k,$$

где по крайней мере один из коэффициентов B_{2s}, $s = \overline{1,\ (n-1)/2}$, полинома $B(x)$ при заданном нечетном $n \geqslant 5$ отличен от нуля, переводил систему (1) в систему

$$\dot u = -v - u \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{B_k}{k+2}\, u^k, \quad \dot v = u - v \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{B_k}{k+2}\, u^k.$$

Пример. Система Льенара

$$\dot x = -y, \quad \dot y = x + x^3 + 2x^4 + x^5 + 2x^7 + 2x^8 + x^{11} - (3x + 4x^2 + 7x^5)y$$

имеет в особой точке $O(0,0)$ изохронный, а значит, и сильно изохронный фокус, поскольку равенства (3) принимают вид

$$A_2 = 0, \quad A_3 = (B_1/3)^2, \quad A_4 = 2(B_1/3)(B_2/4), \quad A_5 = (B_2/4)^2,$$

$$A_7 = 2(B_1/3)(B_5/7), \quad A_8 = 2(B_2/4)(B_5/7), \quad A_{11} = (B_5/7)^2.$$

Диффеоморфизм же плоскости $\mathbb{R}^2$

$$u = x, \ \ v = y - x^2 - x^3 - x^6 \quad (x = u, \ \ y = v + u^2 + u^3 + u^6)$$

переводит рассматриваемую систему в систему

$$\dot u = -v - u\,(u + u^2 + u^5), \quad \dot v = u - v\,(u + u^2 + u^5).$$

Литература

1. Амелькин В. В. *Изохронные и сильно изохронные фокусы полиномиальных систем Льенара* // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 1. С. 3–10.