О СВЯЗЯХ МЕЖДУ ПОВЕДЕНИЯМИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ГРАДИЕНТНО ПОДОБНЫМ ОТОБРАЖЕНИЕМ ОСНОВНОГО ФУНКЦИОНАЛА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ С НЕКОТОРЫМИ СВОЙСТВАМИ ЕГО КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК

Ш.Ш. Бабаджанов

В банаховом пространстве

$$E = C^1_* = \big\{x \in C^1[0,1] : x(0) = x(1) = 0\big\}$$

с нормой $\|x\| = \max\limits_{0\leqslant s\leqslant 1} |x(s)| + \max\limits_{0\leqslant s\leqslant 1} |x'(s)|$, которое было введено в работе [1], рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = -G(x), \tag{1}$$

где $G(x)$ построенное в этой работе и определенное равенством

$$G(x) = \int\limits_0^1 K_0(s,t)\frac{\partial f\big(t,x(t),x'(t)\big)}{\partial x}\,dt + \int\limits_0^1 K_1(s,t)\frac{\partial f\big(t,x(t),x'(t)\big)}{\partial x'}\,dt = \Gamma\left(\frac{\partial f}{\partial x'}, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

градиентно подобное отображение для основного функционала вариационного исчисления

$$F(x) = \int\limits_0^1 f\big(s,x(s),x'(s)\big)\,ds. \tag{2}$$

Здесь $\Gamma(a,b) = \int\limits_0^1 K_1(s,t)a(t)\,dt + \int\limits_0^1 K_0(s,t)b(t)\,dt,\ \ a,b \in C[0,1],$ непрерывно действующий интегральный оператор из $C[0,1]\times C[0,1]$ в C^1_*, где

$$K_0(s,t) = \begin{cases} t(1-s), & \text{если } 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\\ s(1-t), & \text{если } 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1\end{cases} \quad \text{и} \quad K_1(s,t) = \begin{cases} 1-s, & \text{если } 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\\ -s, & \text{если } 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

Решение $x(t,s) = p\big(t,y(s)\big)$, $0\leqslant s\leqslant 1$, $t\in[0,+\infty)$, удовлетворяет следующим условиям: $x(t,0) = x(t,1) = 0$. При каждом фиксированном t функция $x(t,s)$ будет элементом пространства C^1_*.

Настоящий доклад посвящается связи между поведением решений уравнения (1) при $t\to+\infty$ $(-\infty)$ с различными свойствами критических точек функционала (2).

В дальнейшем будем считать, что для уравнения (1) справедлива локальная теорема существования и единственности решения задачи Коши, например, выполнены условия:

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y} \text{ по } x \text{ и } y \text{ удовлетворяют локальному условию Липщица}\right\}. \tag{3}$$

В данной работе используется следующее условие компактности.

Множество $M\subset C^1_*$ компактно тогда и только тогда, когда M ограничено в C^1_* и семейство функции $\{u'(s) : u\in M\}$ равностепенно непрерывно.

Имеют место следующие утверждения:

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (3) и у функции* $f(s,x,y)$ *на* $[0,1]\times\mathbb{R}^2$ *существует непрерывная производная* $\dfrac{\partial^2 f(s,x,y)}{\partial y^2}$, *которая является положительной. Пусть для последовательности решений* $x_k(t,s)=p(t,y_k)$, $t_k\leqslant t<T_k$, $k=1,\,2,\,\ldots,$ $(T_k<\infty$ *или* $T_k=+\infty)$ *уравнения (1) выполнено условие* $\|x_k(t,s)\|\leqslant R_1$, $t_k\leqslant t<T_k$, $k=1,2,\ldots$. *Тогда*

1) для любого отрезка $[a,b]$, $t_k\leqslant a_k$, $b_k<T_k$, $k\geqslant k_0$ *множество*

$$\{x_k(t,s): a\leqslant t<b,\ k\geqslant k_0\}$$

компактно в C^1_*, *если* $t_k\to-\infty$ *при* $k\to\infty$;

2) множество $\big\{x_k(t,s): t_k\leqslant t<T_k,\ k=1,\,2,\,\ldots\big\}$ *компактно в* C^1_*, *если* $t_k\geqslant t_0$, $k=1,\,2,\,3,\,\ldots,$ *и множество начальных значений* $\{x_k(t,s)=y_k(s)\}$, $k=1,\,2,\,\ldots,$ *компактно в* C^1_*.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (3) и у функции* $f(s,x,y)$ *на* $[0,1]\times\mathbb{R}^2$ *существует непрерывная производная* $\dfrac{\partial^2 f(s,x,y)}{\partial y^2}$, *которая является положительной. Пусть последовательность решений* $\{x_k(t)\}$ *уравнения (1) удовлетворяет условиям* $\|x_k(t_k)\|\leqslant\delta_k$, $\|x_k(0)-x_0\|=r_0$ *и* $\delta_k\leqslant\|x_k(t)-x_0\|\leqslant r_0$ *при* $t_k\leqslant t\leqslant 0$, *где* $\delta_k\to 0$ *при* $k\to\infty$. *Тогда множество значений* $\{x_k(t): t_k\leqslant t\leqslant 0,\ k=1,2,...\}$ *решений* $x_k(t)$ *компактно в* C^1_*.

Теорема 3. *Пусть уравнение (1) имеет решение* $x(t,s)=p\big(t,y(s)\big)$ *такое, что* $\|x(t,s)\|\leqslant R_1$, $t\leqslant 0$. *Тогда множество предельных точек решения* $x(t,s)$ *при* $t\to-\infty$ *является критическими точками функционала (2).*

Теорема 4. *Пусть изолированная критическая точка* x_0 *является локальным минимумом для функционала (1) в* C^1_*. *Тогда стационарное решение* $x(t)=x_0$ *уравнения (1) асимптотически устойчиво по Ляпунову при* $t\to+\infty$ *и наоборот, если критическая точка* x_0 *– асимптотически устойчива по Ляпунову при* $t\to+\infty$, *то она является изолированной критической точкой и точкой локального минимума функционала (2).*

Теорема 5. *Пусть* $G(0)=0$ *и* $x_0=0$ *является единственной критической точкой функционала (2) в шаре* $\|x\|\leqslant R_1$. *Тогда уравнение (1) не имеет ненулевых решений* $x(t)$, *удовлетворяющих условию* $\|x(t)\|\leqslant R_1$, $t\in\mathbb{R}^1$.

Литература

1. Бабаджанов Ш. Ш. *Градиентно подобное отображение основного функционала вариационного исчисления в банаховом пространстве* C^1_* // Интеллектуально-информационные технологии и интеллектуальный бизнес (ИНФОС-2021). Материалы Двенадцатой Международной научно-технической конференции (29–30 июня 2021). Вологда, 2021. С. 188–192.

ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ ПО ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ОТРАЖАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ

М.С. Белокурский

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x}=X(t,x),\quad t\in\mathbb{R},\quad x=\,(x_1,\ldots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n, \tag{1}$$