Исключая из системы (1) a и b, получим систему

$$\begin{cases} x'' = \dfrac{1}{2}\dfrac{x'^2}{x} - 2x^2 + \dfrac{3}{2}xy^2, \\ y'' = -6xy + 2y^3, \end{cases} \tag{3}$$

резонансы которой равны -1, -2, 4, 5. Легко проверить, что уравнения системы (1) являются первыми интегралами системы (3). При этом коэффициенты a и b будут произвольными постоянными интегрирования системы (3), отвечающими соответственно резонансам 4, 5.

Из работы [1] следует, что верна

Теорема 1. *Общее решение системы (1) является мероморфным.*

Имеет место

Теорема 2. *Упрощенная для (1) система*

$$\begin{cases} xy'^2 - 2x'^2 = xy^4 - 6x^2y^2 + 4x^3, \\ x'^2y - 2xx'y' = 4x^3y - x^2y^3 \end{cases} \tag{4}$$

имеет общее решение

$$x = \frac{1}{(t-c_1)(t-c_2)}, \qquad y = \pm\left(\frac{1}{t-c_1} + \frac{1}{t-c_2}\right), \tag{5}$$

где c_1, c_2 *– произвольные постоянные.*

Лемма. *Функции (5) удовлетворяют условию*

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{4}{x} = C, \;\; C = (c_1 - c_2)^2, \tag{6}$$

а значит, (6) является интегралом системы (4).

Литература

1. Бибило Е. Р., Мартынов И. П. *Мероморфность решений одного класса систем дифференциальных уравнений* // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2014. № 3(180). С. 54–58.

СВОЙСТВО ПЕНЛЕВЕ ДЛЯ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Т.Н. Ванькова, Е.Е. Кулеш, В.М. Пецевич

Целью данной работы является поиск необходимых и достаточных условий наличия свойства Пенлеве у решений системы двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} x'^2 &= (\alpha_1 x + \alpha_2)x(y + \alpha_3)^2, \\ y'^2 &= x(y^2 + \beta_1 y + \beta_2), \end{aligned} \tag{1}$$

где $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$, α_i, β_j – аналитические функции переменной t при условии $\beta_2 = \alpha_3^2$.

Запись $P \neq 0$ означает, что P не обращается в нуль в некоторой области D.

Система (1) является частным случаем системы

$$\begin{aligned}
&x'^2 = (a_{24}x^4 + a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20})\, y^2 + \\
&\quad + (a_{14}x^4 + a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10})\, y + a_{04}x^4 + a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00}, \\
&y'^2 = (b_{41}y^4 + b_{31}y^3 + b_{21}y^2 + b_{11}y + b_{01})x + b_{40}y^4 + b_{30}y^3 + b_{20}y^2 + b_{10}y + b_{00}
\end{aligned} \tag{2}$$

с аналитическими по t коэффициентами, где

$$|a_{24}| + |a_{23}| + |a_{22}| + |a_{21}| + |a_{20}| \neq 0, \quad |b_{41}| + |b_{31}| + |b_{21}| + |b_{11}| + |b_{01}| \neq 0.$$

Система (2), когда $b_{41} = b_{31} = b_{21} = b_{11} = 0$, $b_{01} \neq 0$, рассматривалась в [1]. Случай, когда $b_{41} = b_{31} = b_{21} = 0$, $b_{11} \neq 0$, рассматривался в [2]. Случай, когда $|b_{41}| + |b_{31}| \neq 0$, рассматривался в [3].

Система (1) является одной из 7 систем, которые являются необходимыми условиями наличия свойства Пенлеве у системы

$$\begin{aligned}
&x'^2 = (a_{24}x^4 + a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20})\, y^2 + \\
&\quad + (a_{14}x^4 + a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10})\, y + a_{04}x^4 + a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00}, \\
&y'^2 = (y^2 + b_{11}y + b_{01})x + b_{40}y^4 + b_{30}y^3 + b_{20}y^2 + b_{10}y + b_{00}
\end{aligned}$$

с аналитическими по t коэффициентами, где $|a_{24}| + |a_{23}| + |a_{22}| + |a_{21}| + |a_{20}| \neq 0$ [4].

Исключая из системы (1) компоненту x, относительно компоненты y построим дифференциальное уравнение. Используя метод малого параметра и некоторые леммы из [5], [6], получим дополнительные условия на коэффициенты системы (1).

Построив уравнение относительно компоненты x и используя метод резонансов, тест Пенлеве, метод сравнения полученных уравнений с уравнениями, аналитические свойства решений которых известны, устанавливаем, что справедлива

Теорема. *Для того, чтобы дифференциальная система (1) обладала свойством Пенлеве, необходимо и достаточно, чтобы она дробно-линейным преобразованием x, y и аналитической заменой независимой переменной t приводилась к одному из видов:*

$$\begin{aligned}
&x'^2 = K_1(x + K_2)x(y + \alpha_3)^2, \qquad && x'^2 = K_1 e^{K_2 t} x(y + \alpha_3)^2, \\
&y'^2 = x(y + \alpha_3)^2; && y'^2 = x(y + \alpha_3)^2,
\end{aligned}$$

где $K_1 \neq 0$, K_2 – некоторые постоянные, α_3 – аналитическая функция переменной t.

Литература

1. Ванькова Т. Н., Детченя Л. В., Пецевич В. М., Селивёрстова А. О. *Об одном классе систем дифференциальных уравнений второго порядка без подвижных критических особенностей* // Проблемы физики, математики и техники. 2018. № 4(37). С. 62–65.

2. Белько О. Н., Ванькова Т. Н., Пецевич В. М. *Об одном классе систем дифференциальных уравнений второго порядка со свойством Пенлеве* // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2020. Т. 10. № 3. С. 42–49.

3. Детченя Л. В., Кулеш Е. Е., Пецевич В. М. *Необходимые условия наличия свойства Пенлеве для системы дифференциальных уравнений второго порядка второй степени специального вида* // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2020. Т. 10. № 2. С. 30–35.

4. Детченя Л. В., Кулеш Е. Е., Пецевич В. М. *Необходимые условия наличия свойства Пенлеве у дифференциальной системы второго порядка* // Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям, посвящ. 100-летию со дня рождения проф. Ю.С. Богданова: материалы Междунар. математич. конф., Минск, 1-4 июля 2021 г. Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 2021. С. 59–60.

5. Пецевич В. М., Пронько В. А. *Необходимые условия наличия свойства Пенлеве у системы двух дифференциальных уравнений второй степени* // Проблемы физики, математики и техники. 2018. № 2(35). С. 69–75.

6. Пецевич В. М., Шевченя Д. Н. *Свойство Пенлеве для дифференциальной системы второго порядка* // Проблемы физики, математики и техники. 2016. № 1(26). С. 48–51.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ОБОБЩЕННОЙ ИЕРАРХИИ ВТОРОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

В.И. Громак

Известно, что уравнения Пенлеве $(P_1 - P_6)$, которые являются решением классификационной проблемы относительно свойства Пенлеве для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, в общем случае определяют новые трансцендентные функции. Эти функции находят приложения как в различных математических проблемах, так и в различных вопросах физики, математической физики и играют, по сути, такую же роль в нелинейных проблемах как и классические специальные функции в линейных проблемах. В этой связи в настоящее время существует определенный интерес в изучении иерархий уравнений Пенлеве, которые являются бесконечными последовательностями нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих единую дифференциально–алгебраическую структуру, при этом первыми членами таких иерархий являются уравнения Пенлеве. Уравнения иерархий, как и сами уравнения Пенлеве, при специальных значениях параметров имеют специальные классы решений, выражающиеся через классические трансцендентные функции, а также алгебраические или даже рациональные решения. При этом для рациональных решений возникает задача представления их через специальные полиномы [1–7].

Известно, что рациональные решения обобщенных иерархий второго уравнения Пенлеве

$$\widetilde{P}_2^{[2N]} \equiv (D+2w)\,\widetilde{L}_N[w'-w^2] - zw - \alpha = 0, \quad D = \frac{d}{dz}, \quad w = w(z), \quad N = 1,2,..., \qquad (1)$$

и модифицированного второго уравнения Пенлеве (обобщенная иерархия уравнения P_{34})

$$\Psi'' = \frac{(\Psi')^2}{2\Psi} - 2q\Psi - \frac{\sigma^2}{2\Psi} = 0, \quad q(z) := w'(z) - w(z)^2, \quad \Psi(q(z)) := \widetilde{L}_N[q] - z/2, \qquad (2)$$

где оператор $\widetilde{L}_N$ определяется рекуррентным соотношением

$$\widetilde{L}_{N+1}[u] = D^{-1}\big((D^3 + (4u+\beta_N)D + 2u_z)\widetilde{L}_N[u]\big),$$

$$\widetilde{L}_1[u] = u, \quad u = u(z)$$

и α, β_N – параметры, можно определить через специальные полиномиальные определители (детерминантное представление Jacobi-Trudi). При этом рациональные решения $w^{[N]}(z,\alpha,\beta)$, $q^{[N]}(z,\sigma,\beta)$, $\sigma = \alpha - 1/2$, существуют только при целом α, единственны при фиксированном β и при $\alpha = m \in \mathbb{N}$ справедлива

Теорема 1. *Рациональное решение N-го уравнения иерархий (1), (2) может быть представлено как*

$$w^{[N]}(z,\pm m,\beta) = \pm D\left\{\ln(\tau_{m-1}^{[N]}/\tau_m^{[N]})\right\}, \quad q^{[N]}(z,\pm(m+1/2),\beta) = 2D^2\left\{\ln(\tau_m^{[N]})\right\},$$