Литература

1. Мироненко В. И. *Классы систем с совпадающими отражающими функциями* // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. 20. № 12. С. 2173–2176.

2. Мироненко В. И. *Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем.* Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2004.

3. Белокурский М. С. *Дробно-линейная отражающая функция* // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. 2021. № 6(129). С. 84–87.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА С ПАРАМЕТРОМ

А.Н. Бондарев

Исследуется задача

$$\frac{dX}{dt} = \lambda A(t)XC_1(t) + XB_1(t) + \lambda^2 C_2(t)XB_2(t) + F(t), \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{k} M_i X(t_i,\lambda) = 0, \quad 0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = \omega, \tag{2}$$

где $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$, A, B_j, C_j, F – непрерывные по $t \in I$ матрицы-функции соответствующих размерностей, M_i – заданные постоянные $(n\times n)$-матрицы; $\lambda \in \mathbb{R}$, $I = [0,\omega]$, $\omega > 0$, $j = 1,2$.

В предлагаемой работе, являющейся обобщением и развитием [1, 2], по методу [3, гл. I] получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2), алгоритм построения решения и дана оценка области его возможного расположения. Исследование задачи (1), (2) выполнено в конечномерной банаховой алгебре $\mathfrak{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_C = \max\limits_{t\in I}\|X(t,\lambda)\|$, где $\|\cdot\|$ – определенная норма матрицы в этой алгебре.

Примем следующие обозначения:

$$\varepsilon = |\lambda|, \quad m_i = \|M_i\|, \quad v_i = \|V_i\|, \quad \gamma = \|\Phi^{-1}\|, \quad \alpha = \max_{t\in I}\|A(t)\|, \quad \beta_2 = \max_{t\in I}\|B_2(t)\|,$$
$$c_j = \max_{t\in I}\|C_j(t)\|, \quad h = \max_{t\in I}\|F(t)\|, \quad \mu_1 = \max_{t\in I}\|V(t)\|, \quad \mu_2 = \max_{t\in I}\|V^{-1}(t)\|,$$
$$q(\varepsilon) = q_1\varepsilon^2 + q_2\varepsilon, \quad N = \gamma\mu_1\mu_2\omega h\sum_{i=1}^{k} m_i v_i,$$

где $q_1 = \gamma\mu_1\mu_2\beta_2 c_2\omega\sum\limits_{i=1}^{k} m_i v_i$, $q_2 = \gamma\mu_1\mu_2\alpha c_1\omega\sum\limits_{i=1}^{k} m_i v_i$, Φ – линейный матричный оператор типа [4], $\Phi Y \equiv \sum\limits_{i=1}^{k} M_i Y V_i$; $V_i = V(t_i)$, $V(t)$ – фундаментальная матрица уравнения $dV/dt = VB_1(t)$.

Теорема. *Пусть оператор Φ однозначно обратим, при этом $q(\varepsilon) < 1$. Тогда задача (1), (2) однозначно разрешима; ее решение $X(t,\lambda)$ представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условию (2), при этом справедлива оценка $\|X\|_C \leqslant N/(1-q(\varepsilon))$.*

Вместо задачи (1), (2) рассмотрено эквивалентное ей интегральное уравнение

$$X(t,\lambda) = \left(\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} [\lambda A(\tau)X(\tau)C_1(\tau) + \lambda^2 C_2(\tau)X(\tau)B_2(\tau) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + F(\tau)]\, V^{-1}(\tau)\, d\tau\, V_i\right\}\right) V(t), \qquad (3)$$

исследование разрешимости которого выполнено с помощью принципа сжимающих отображений (см., например, [5, с. 605]).

Для построения решения предложен алгоритм

$$X_p(t,\lambda) = \left(\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} [\lambda A(\tau)X_{p-1}(\tau,\lambda)C_1(\tau) + \lambda^2 C_2(\tau)X_{p-1}(\tau,\lambda)B_2(\tau) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + F(\tau)]\, V^{-1}(\tau)\, d\tau\, V_i\right\}\right) V(t), \quad p = 1, 2, \ldots, \qquad (4)$$

где $X_0(t,\lambda)$ – произвольная непрерывная матричная функция.

Доказано, что последовательность $\{X_s(t,\lambda)\}_0^\infty$, построенная по алгоритму (4), сходится равномерно по $t \in I$ к решению интегрального уравнения (3), при этом получены оценки

$$\|X - X_s\|_C \leqslant \frac{q(\varepsilon)^s}{1-q(\varepsilon)}\|X_1 - X_0\|_C,\ s = 0, 1, 2, \ldots; \quad \|X\|_C \leqslant \|X_0\|_C + \frac{\|X_1 - X_0\|_C}{1-q(\varepsilon)}.$$

Из оценки для $\|X\|_C$ при $X_0 = 0$ следует оценка из теоремы.

Решение интегрального уравнения (3) построено также на основе метода малого параметра Пуанкаре–Ляпунова в виде ряда

$$X(t,\lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s X_s(t), \qquad (5)$$

где

$$X_0(t) = \left(\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} F(\tau)V^{-1}(\tau)\, d\tau\, V_i\right\}\right) V(t),$$

$$X_1(t) = \left(\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} A(\tau)X_0(\tau)C_1(\tau)V^{-1}(\tau)\, d\tau\, V_i\right\}\right) V(t),$$

$$X_{p+1}(t) = \left(\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} [A(\tau)X_p(\tau)C_1(\tau) + C_2(\tau)X_{p-1}(\tau)B_2(\tau)]\, V^{-1}(\tau)\, d\tau\, V_i\right\}\right) V(t),$$

$$p = 1, 2, \ldots .$$

Установлено, что ряд (5) сходится равномерно по $t \in I$ при $|\lambda| < 2/(q_2 + \sqrt{q_2^2 + 4q_1})$.

Литература

1. Бондарев А. Н., Лаптинский В. Н. *Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае сильного вырождения краевых условий* // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 6. С. 776–784.

2. Бондарев А. Н., Лаптинский В. Н. *Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае слабого вырождения краевых условий* // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 423–427.

3. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: ИМ НАН Беларуси, 1998.

4. Murty K. N., Howell G. W., Sivasundaram S. *Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness* // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1992. V. 167. P. 505–515.

5. Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1977.

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ЛЯПУНОВА-БОГДАНОВА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДВУМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В.Т. Борухов, О.М. Кветко

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = -y + P(x,y), \quad \dot{y} = x + Q(x,y), \tag{1}$$

где $P, Q \in \mathbb{R}[x,y]$, $\deg P \geqslant 2$, $\deg Q \geqslant 2$. Напомним, что отличная от константы и достаточно гладкая в некоторой окрестности U точки (0,0) функция $V(x,y)$ назвается *первым интегралом системы* (1), если выполняется условие

$$(\mathfrak{L}V)(x,y) = 0 \quad \forall x, y \in U.$$

Здесь

$$L := (-y+P)\frac{\partial}{\partial x} + (x+Q)\frac{\partial}{\partial y}$$

– оператор Лиувилля системы (1). Нас интересуют полиномиальные первые интегралы Пуанкаре степени m, т.е. интегралы вида

$$V_m(x,y) = \sum_{k=2}^{m} H_k(x,y), \quad (m < \infty), \tag{2}$$

где $H_2(x,y) = x^2 + y^2$, $H_k(x,y)$ $(k = \overline{3,m})$ – однородные вещественные полиномы степени $\deg H_k = k$, $H_m \neq 0$.

Явные условия существования полиномиальных первых интегралов для квадратичных и кубических систем представлены в работе [1]. В [2] приводятся условия существования полиномиальных первых интегралов для общего класса полиномиальных дифференциальных систем. Однако эти условия сводятся к вычислению рангов матриц больших размерностей.

В данном сообщении рассматривается алгоритм, позволяющий последовательно, полагая $m = 2, 3, \dots$, выявить наличие или отсутствие интегралов вида (2) для заданной системы (1).

Обозначим

$$F_{kl}(x,y) = (Lv_{kl})(x,y),$$