Литература

1. Бондарев А. Н., Лаптинский В. Н. *Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае сильного вырождения краевых условий* // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 6. С. 776–784.
2. Бондарев А. Н., Лаптинский В. Н. *Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае слабого вырождения краевых условий* // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 423–427.
3. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: ИМ НАН Беларуси, 1998.
4. Murty K. N., Howell G. W., Sivasundaram S. *Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness* // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1992. V. 167. P. 505–515.
5. Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1977.

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ЛЯПУНОВА-БОГДАНОВА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДВУМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В.Т. Борухов, О.М. Кветко

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = -y + P(x,y), \quad \dot{y} = x + Q(x,y), \tag{1}$$

где $P, Q \in \mathbb{R}[x,y]$, $\deg P \geqslant 2$, $\deg Q \geqslant 2$. Напомним, что отличная от константы и достаточно гладкая в некоторой окрестности U точки (0,0) функция $V(x,y)$ назвается *первым интегралом системы* (1), если выполняется условие

$$(\mathfrak{L}V)(x,y) = 0 \quad \forall x, y \in U.$$

Здесь

$$L := (-y+P)\frac{\partial}{\partial x} + (x+Q)\frac{\partial}{\partial y}$$

– оператор Лиувилля системы (1). Нас интересуют полиномиальные первые интегралы Пуанкаре степени m, т.е. интегралы вида

$$V_m(x,y) = \sum_{k=2}^{m} H_k(x,y), \quad (m < \infty), \tag{2}$$

где $H_2(x,y) = x^2 + y^2$, $H_k(x,y)$ $(k = \overline{3,m})$ – однородные вещественные полиномы степени $\deg H_k = k$, $H_m \neq 0$.

Явные условия существования полиномиальных первых интегралов для квадратичных и кубических систем представлены в работе [1]. В [2] приводятся условия существования полиномиальных первых интегралов для общего класса полиномиальных дифференциальных систем. Однако эти условия сводятся к вычислению рангов матриц больших размерностей.

В данном сообщении рассматривается алгоритм, позволяющий последовательно, полагая $m = 2, 3, \ldots$, выявить наличие или отсутствие интегралов вида (2) для заданной системы (1).

Обозначим

$$F_{kl}(x,y) = (Lv_{kl})(x,y),$$

где $v_{kl}(x,y) = x^k y^l$, $k+l \geqslant 3$, и определим подпространство

$$\mathfrak{F}_m = \operatorname{span}\{F_{kl}\}_{3\leqslant k+l\leqslant m} \subset \mathbb{R}[x,y].$$

Лемма. *Система (1) допускает первый полиномиальный интеграл Пуанкаре степени* $\leqslant m$ *тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$F_{20} + F_{02} \in \mathfrak{F}_m. \tag{3}$$

Задача (3) о принадлежности полинома $F_{20}+F_{02}$ подпространству $\mathfrak{F}_m$ решается с помощью общего алгоритма из [3] построения базиса Ляпунова для фундированного функционала Ляпунова-Богданова. При этом функционал Ляпунова-Богданова λ_m задаётся соотношениями

$$\lambda_m(0) = -\infty, \quad \lambda_m(f) = \operatorname{multideg} f, \quad \forall f \in \mathfrak{F}_m \diagdown \{0\},$$

где мультистепень полинома f определяется тем или иным мономиальным порядком [4, 5].

Приводятся примеры полиномиальных интегралов, полученные с помощью предложенного подхода.

Литература

1. Gine J. *Polynomial first integrals via the Poincare series* // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2005. V. 184. № 2. P. 428–441.

2. Борухов В. Т., Кветко О. М. *Вложимость нелинейных дифференциальных систем в линейные системы и полиномиальные первые интегралы* // Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация. Материалы международной научной конфференции, посвящённой 100-летию со дня рождения академика Е. А. Барбашина, Минск, 24-29 сент. 2018 г. Белорус. гос. ун-т – Минск: БГУ, 2018. С. 81–82.

3. Борухов В. Т., Кветко О. М. *Фундированные функционалы Ляпунова-Богданова* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 1. С. 31–40.

4. Cox D., Little J., O'Shea *Ideals, Varieties and Algrithms.* Springer-Verlag, 1991.

5. Хованский А. Г., Чулков С. П. *Геометрия полугруппы* $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ *. Приложения к комбинаторике, алгебре и дифференциальным уравнениям.* М.: МЦНМО, 2006.

РАЗРЕШИМОСТЬ И ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВАЛЛЕ–ПУССЕНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.И. Кашпар

Рассмотрим краевую задачу [1–3]

$$\frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2} = \mathbf{C}_1(t)\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{C}_2(t) + \mathbf{A}(t)\frac{d\mathbf{X}}{dt} + \frac{d\mathbf{X}}{dt}\mathbf{B}(t) + \mathbf{F}\left(t, \mathbf{X}, \frac{d\mathbf{X}}{dt}\right), \tag{1}$$

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{M}, \quad \mathbf{X}(\omega) = \mathbf{N}, \tag{2}$$

где

$$(t,\mathbf{X}) \in I \times \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C}_i \in \mathbb{C}\left(I,\, \mathbb{R}^{n\times n}\right), \quad \mathbf{F} \in \mathbb{C}\left(D, \mathbb{R}^{n\times n}\right),$$

$$D = \{(t,\mathbf{X},\mathbf{Y}) : t \in I,\ \|\mathbf{X}\| < \tilde{\rho}_1,\ \|\mathbf{Y}\| < \tilde{\rho}_2\},$$