где $v_{kl}(x,y) = x^k y^l$, $k+l \geqslant 3$, и определим подпространство

$$\mathfrak{F}_m = \operatorname{span}\{F_{kl}\}_{3\leqslant k+l\leqslant m} \subset \mathbb{R}[x,y].$$

Лемма. *Система (1) допускает первый полиномиальный интеграл Пуанкаре степени* $\leqslant m$ *тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$F_{20} + F_{02} \in \mathfrak{F}_m. \tag{3}$$

Задача (3) о принадлежности полинома $F_{20}+F_{02}$ подпространству $\mathfrak{F}_m$ решается с помощью общего алгоритма из [3] построения базиса Ляпунова для фундированного функционала Ляпунова-Богданова. При этом функционал Ляпунова-Богданова λ_m задаётся соотношениями

$$\lambda_m(0) = -\infty, \quad \lambda_m(f) = \operatorname{multideg} f, \quad \forall f \in \mathfrak{F}_m \diagdown \{0\},$$

где мультистепень полинома f определяется тем или иным мономиальным порядком [4, 5].

Приводятся примеры полиномиальных интегралов, полученные с помощью предложенного подхода.

Литература

1. Gine J. *Polynomial first integrals via the Poincare series* // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2005. V. 184. № 2. P. 428–441.
2. Борухов В. Т., Кветко О. М. *Вложимость нелинейных дифференциальных систем в линейные системы и полиномиальные первые интегралы* // Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация. Материалы международной научной конфференции, посвящённой 100-летию со дня рождения академика Е. А. Барбашина, Минск, 24-29 сент. 2018 г. Белорус. гос. ун-т – Минск: БГУ, 2018. С. 81–82.
3. Борухов В. Т., Кветко О. М. *Фундированные функционалы Ляпунова-Богданова* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 1. С. 31–40.
4. Cox D., Little J., O'Shea *Ideals, Varieties and Algrithms.* Springer-Verlag, 1991.
5. Хованский А. Г., Чулков С. П. *Геометрия полугруппы* $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$. *Приложения к комбинаторике, алгебре и дифференциальным уравнениям.* М.: МЦНМО, 2006.

РАЗРЕШИМОСТЬ И ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВАЛЛЕ–ПУССЕНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.И. Кашпар

Рассмотрим краевую задачу [1–3]

$$\frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2} = \mathbf{C}_1(t)\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{C}_2(t) + \mathbf{A}(t)\frac{d\mathbf{X}}{dt} + \frac{d\mathbf{X}}{dt}\mathbf{B}(t) + \mathbf{F}\left(t, \mathbf{X}, \frac{d\mathbf{X}}{dt}\right), \tag{1}$$

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{M}, \quad \mathbf{X}(\omega) = \mathbf{N}, \tag{2}$$

где

$$(t,\mathbf{X}) \in I \times \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C}_i \in \mathbb{C}\left(I, \mathbb{R}^{n\times n}\right), \quad \mathbf{F} \in \mathbb{C}\left(D, \mathbb{R}^{n\times n}\right),$$
$$D = \{(t,\mathbf{X},\mathbf{Y}) : t \in I,\ \|\mathbf{X}\| < \tilde{\rho}_1,\ \|\mathbf{Y}\| < \tilde{\rho}_2\},$$

$$\mathbf{Y} = d\mathbf{X}/dt, \quad I \in [0,\omega], \quad 0 < \tilde{\rho}_i \leqslant \infty \ \ (i=1,2),$$

$\mathbf{M}, \mathbf{N}$ —заданные вещественные матрицы. Предположим также, что функция $\mathbf{F}(t,\mathbf{X},\mathbf{Y})$ удовлетворяет относительно $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ в области D условию Липшица (локально).

В предлагаемой работе, являющейся обобщением и развитием [1–3], на основе применения метода [4] получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости и алгоритм построения решения задачи (1), (2).

Введем следующие обозначения:

$$\widetilde{\mathbf{F}}(t,\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mathbf{C}_1(t)\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{C}_2(t) + \mathbf{F}\big(t,\mathbf{X},\mathbf{Y}\big),$$

$$\gamma = \left\|\Phi^{-1}\right\|, \quad \widetilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{UV}} = \mathbf{M} + \mathbf{P}_{\mathbf{UV}} + \mathcal{L}_1(0,0), \quad \widetilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{UV}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}} + \mathcal{L}_2(0,0),$$

$$c_i = \max_t \|\mathbf{C}_i(t)\|, \quad h_1 = \max_t \left\|\widetilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{UV}}(t)\right\|, \quad h_2 = \max_t \left\|\widetilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{UV}}(t)\right\|,$$

$$\lambda_U = \max_{0\leqslant s\leqslant\tau\leqslant\omega} \left\|\mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(s)\right\|, \quad \lambda_V = \max_{0\leqslant s\leqslant\tau\leqslant\omega} \left\|\mathbf{V}(s)\mathbf{V}^{-1}(\tau)\right\|,$$

$$G = \left\{(t,\ \mathbf{X},\ \mathbf{Y}) : t\in I,\ \|\mathbf{X}\| \leqslant \rho_1,\ \|\mathbf{Y}\| \leqslant \rho_2\right\},$$

$$p_1 = \frac{1}{3}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\,\omega^3(L_1+c_1+c_2), \quad p_2 = \frac{1}{2}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\,\omega^2(L_1+c_1+c_2),$$

$$q_1 = \frac{1}{3}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\,\omega^3 L_2, \quad q_2 = \frac{1}{2}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\,\omega^2 L_2,$$

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{X}\|_C \\ \|\mathbf{Y}\|_C \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix},$$

где $t\in I,\ 0<\rho_i<\tilde{\rho}_i\ (i=1,2)$; $\mathbf{U}(t)$, $\mathbf{V}(t)$ – интегральные матрицы уравнений

$$d\mathbf{U}/dt = \mathbf{A}(t)\mathbf{U} \ \ (\mathbf{U}(0)=\mathbf{E}_n), \quad d\mathbf{V}/dt = \mathbf{V}\mathbf{B}(t) \ \ (\mathbf{V}(0)=\mathbf{E}_m),$$

$\mathbf{E}_k$ – единичная матрица порядка k;

$$\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t) = \int_0^t \mathbf{U}(\tau)\big(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\big)\mathbf{V}(\tau)\mathbf{d}\tau, \quad \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t) = \mathbf{U}(t)\big(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\big)\mathbf{V}(t);$$

$\mathbf{\Phi}$ – линейный оператор [1–3],

$$\mathbf{\Phi}\mathbf{Z}(t) = \int_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\mathbf{Z}(t)\mathbf{V}(\tau)d\tau, \quad \mathbf{Z}(t) = \mathbf{U}^{-1}(t)\mathbf{Y}(t)\mathbf{V}^{-1}(t);$$

$L_i = L_i(\rho_1,\rho_2)$ – постоянные Липшица для $\mathbf{F}\big(t,\mathbf{X},\mathbf{Y}\big)$ в области G; $\|\mathbf{X}\|_C = \max_t \|\mathbf{X}(t)\|$ – норма непрерывной матричной функции в конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$, $\|\cdot\|$ – определенная норма матрицы в этой алгебре, например, любая из норм, приведенных в [5, с. 21]; $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ – интегральные операторы, определяемые на основе интегральной задачи, эквивалентной (1),

$$\mathbf{X} = \mathbf{M} + \mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathcal{L}_1(\mathbf{X},\mathbf{Y}), \qquad \mathbf{Y} = \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathcal{L}_2(\mathbf{X},\mathbf{Y}). \tag{3}$$

Интегральная задача (3) в явном виде дается соотношениями

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{M} + \int_0^{\mathbf{t}} \mathbf{U}(\tau)\mathbf{\Phi^{-1}}\big((\mathbf{N}-\mathbf{M})\big)\mathbf{V}(\tau)\mathbf{d}\tau +$$

$$+\int\limits_0^t \mathbf{U}(\varphi)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int\limits_0^\omega\left(\int\limits_\tau^\varphi \mathbf{K_U}(\tau,s)\widetilde{\mathbf{F}}\big(s,\mathbf{X}(s),\mathbf{Y}(s)\big)\mathbf{K_V}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(\varphi)d\varphi, \qquad (4)$$

$$\mathbf{Y}(t)=\mathbf{U}(t)\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\right)\mathbf{V}(t)+$$

$$+\mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int\limits_0^\omega\left(\int\limits_\tau^t \mathbf{K_U}(\tau,s)\widetilde{\mathbf{F}}\big(s,\mathbf{X}(s),\mathbf{Y}(s)\big)\mathbf{K_V}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(t). \qquad (5)$$

Теорема. *Пусть оператор* $\mathbf{\Phi}$ *однозначно обратим и выполнены неравенства*

$$p_1\rho_1+q_1\rho_2+h_1\leqslant\rho_1,\quad p_2\rho_1+q_2\rho_2+h_2\leqslant\rho_2,\quad p_1+q_2<1.$$

Тогда задача (1), (2) однозначно разрешима в области G*, при этом справедлива оценка* $\mathbf{Z}\leqslant(\mathbf{E}-\mathbf{P})^{-1}\mathbf{H}$.

Замечание. В случае, когда $\mathbf{A}(t)\equiv 0$, $\mathbf{B}(t)\equiv 0$, $\mathbf{C}_i(t)\equiv 0$, имеет место следствие данной теоремы, из которого при $\rho_2=4\rho_1/\omega$ вытекает теорема 4.1 [6, с. 497]. В [1] дано применение полученных результатов к стационарной задаче об определении распределения температуры в круговой (продольно неограниченной) цилиндрической оболочке (стенке).

Для построения решения задачи (1), (2) разработан алгоритм классического типа (см., например, [7, с. 605]), который применительно к операторной системе (3) имеет вид

$$\mathbf{X}_{k+1}=\mathbf{M}+\mathbf{P_{UV}}(t)+\mathcal{L}_1(\mathbf{X}_k,\mathbf{Y}_k),\quad \mathbf{Y}_{k+1}=\mathbf{Q_{UV}}(t)+\mathcal{L}_2(\mathbf{X}_k,\mathbf{Y}_k),\quad k=0,\,1,\,2,\,\ldots, \qquad (6)$$

где $\mathbf{X_0}(t),\mathbf{Y}_0(t)$ – произвольные матрицы класса $\mathbb{C}\left(I,\,\mathbb{R}^{n\times n}\right)$, принадлежащие множеству $G=\{(\mathbf{X}(t),\,\mathbf{Y}(t)):\|\mathbf{X}\|_C\leqslant\rho_1,\|\mathbf{Y}\|_C\leqslant\rho_2\}$.

Алгоритм (6) для интегральной задачи (4), (5) имеет вид

$$\mathbf{X}_{k+1}(t)=\mathbf{M}+\mathbf{P_{UV}}(t)+$$

$$+\int\limits_0^t\mathbf{U}(\varphi)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int\limits_0^\omega\left(\int\limits_\tau^\varphi\mathbf{K_U}(\tau,s)\widetilde{\mathbf{F}}\big(s,\mathbf{X}_k(s),\mathbf{Y}_k(s)\big)\mathbf{K_V}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(\varphi)d\varphi,\ k=0,1,2,\ldots,$$

$$\mathbf{Y}_{k+1}(t)=\mathbf{Q_{UV}}(t)+\mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int\limits_0^\omega\left(\int\limits_\tau^t\mathbf{K_U}(\tau,s)\widetilde{\mathbf{F}}\big(s,\mathbf{X}_k(s),\mathbf{Y}_k(s)\big)\mathbf{K_V}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(t).$$

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости данного алгоритма, а также получены соответствующие оценки.

Литература

1. Лаптинский В. Н., Кашпар А. И. *Конструктивный анализ краевой задачи Валле-Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка.* Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2016. (Препринт / Ин-т технол. металлов Беларуси; № 40).

2. Кашпар А. И., Лаптинский В. Н. *О разрешимости задачи Валле-Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка* // XII Белорусская математическая конференция: Тез. докл. Междунар. науч. конф. Минск, 5—10 сентября 2016 г. Ч. 2. Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2016. С. 32–33.

3. Кашпар А. И., Лаптинский В. Н. *Разрешимость и построение решения краевой задачи Валле-Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка* // Дифференцальные уравнения. 2020. Т. 56. № 5. С. 570—583.

4. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.

5. Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М.: Наука, 1967.

6. Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М.: Мир, 1970.

7. Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1977.

ВОЗМУЩЕННАЯ ГАМИЛЬТОНОВАЯ СИСТЕМА С ЕДИНСТВЕННЫМ ПРЕДЕЛЬНЫМ ЦИКЛОМ

А.В. Кузьмич

Рассматривалась автономная возмущенная гамильтоновая дифференциальная система на плоскости

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y^{2n-1} = P(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= -x^{2q-1} + \mu \sum_{i=0}^{n} h_i(x,\mu) y^i = Q(x,y), \end{aligned} \tag{1}$$

зависящая от действительного параметра $\mu \in I \subset \mathbb{R}$, $0 \in I$, и натуральных параметров n, q. Функции $h_i : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}$, $i = \overline{0,n}$, непрерывны по двум аргументам и $h_n(x,\mu) \neq 0$.

Для определения числа и расположения предельных циклов в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ применялся обобщенный метод Дюлака [1], который заключается в нахождении функции Дюлака-Черкаса $\Psi(x,y) \in C^1(\Omega)$ и числа $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, удовлетворяющих неравенству

$$\Phi \equiv k\Psi \operatorname{div} X + \frac{\partial \Psi}{\partial x} P + \frac{\partial \Psi}{\partial y} Q > 0 \, (< 0), \quad (x,y) \in \Omega, \quad X = (P,Q).$$

Для выделения класса систем вида (1), имеющих не более одного предельного цикла во всей фазовой плоскости, функция Ψ применялась в виде

$$\Psi(x,y) = \frac{n}{q} c x^{2q} + c y^{2n} - a, \; a, c \in \mathbb{R}^{>0}. \tag{2}$$

В результате получен следующий результат

Теорема. *Система*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y^{2n-1}, \\ \frac{dy}{dt} &= -x^{2q-1} + \mu \Big(\frac{n}{q} c x^{2q} - a \Big)^{2l-1} y^n \end{aligned} \tag{3}$$

имеет функцию Дюлака-Черкаса в виде полинома (2) для всех $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ и при $0 \neq \mu \in \mathbb{R}$, $q, n, l \in \mathbb{N}$, n – нечетное, $a, c \in \mathbb{R}^{>0}$. Таким образом, при указанных условиях система (3) имеет не более одного предельного цикла во всей фазовой плоскости. Причем если предельный цикл существует, то является устойчивым (неустойчивым) при $\mu < 0$ $(\mu > 0)$.

Для проверки существования предельного цикла выполняется второй шаг, который заключается в построении дополнительной замкнутой трансверсальной кривой, окружающей замкнутую кривую, задаваемую уравнением $\Psi = 0$. Требуемая кривая