и

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (a_{2k} - b_{2k})\lambda^{n-2k} = 0, \\ \sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (a_{2k+1} - b_{2k+1})\lambda^{n-2k-1} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

имеет по крайней мере, одно решение в виде $\lambda = \alpha \pm \beta i$, в котором одно из α или β равно нулю. Тогда решение задачи (1) существует.

Действительно, если имеется решение относительно λ. Если $\lambda = \lambda_1$ решение системы (4) и $\lambda = \lambda_2$ решение системы (5), то, как видно из этих систем, $\lambda = -\lambda_1$ и $\lambda = -\lambda_2$ тоже являются соответствующими решениями этих систем. А это обеспечит существование решений (2), удовлетворяющих условию $u(t) = u(-t)$ и (3) удовлетворяющие условию $\vartheta(t) = -\vartheta(-t)$.

Таким образом, получается общее решение уравнения (1) в виде $x(t) = u(t) + \vartheta(t)$.

Например, для уравнения

$$2x''(t) + x''(-t) + x(t) + 2x(-t) = 0 \tag{6}$$

имеем $u(t) = C_1 \cos t$ и $\vartheta(t) = C_2 \left(e^t - e^{-t}\right)$. Тогда общее решение уравнения (6) имеет вид: $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \left(e^t - e^{-t}\right)$.

Для уравнения

$$2x'''(t) + x'''(-t) + 2x''(t) + x''(-t) + 2x'(t) + x'(-t) + 2x(t) + x(-t) = 0 \tag{7}$$

имеем $u(t) = C_1 \cos t, \quad \vartheta(t) = C_2 \sin t$. Тогда общее решение уравнения (7) имеет вид:

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Литература

1. Норкин С. Б. *Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом.* М.: Наука. 1965.

2.Абрегов М. Х., Канчукоев В. З., Шарданова М. А. *Краевая задача первого рода для линейного дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом на симметричном отрезке* // Международный научно-исследовательский журнал. 2016. В. №5(47). Ч. 5.

ОБ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ С УСЛОВИЯМИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА

В.Н. Лаптинский

Изучается задача отыскания $x \in \mathbb{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ из совокупности соотношений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \tag{1}$$

$$\int\limits_0^{\omega} \Psi_i(\tau)x(\tau)d\tau = \mu_i, \tag{2}$$

где $A \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $f \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^n)$, $\Psi_i \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $\mu_i \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1,k}$; $I = [0,\omega]$, $\omega > 0$. Соотношение (2) при $k = \infty$ является интегральным условием типа [1, с. 264];

более широкий круг таких условий описан в [2, гл. IX, §5]. Вводятся также матрицы $\Phi_i \in \mathbb{C}^1(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, возможно, базисного типа [3, гл. 4], в частности, $\Phi_i(t) = \Psi_i(t)$.

В предлагаемой работе конструктивный метод [3, гл. 4] развит на основе [4, 5] применительно к задаче (1), (2). Сначала определяется принципиальная структура искомого решения. Пусть эта задача разрешима. Для возможных решений класса $\mathbb{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ системы (2) с помощью подхода [4, 5] при выполнении условия невырожденности матриц, определяемых далее по тексту, получено выражение типа [3, гл. 4]

$$x(t) = y(t) + \int\limits_0^\omega Q(t,\tau) y(\tau)\, d\tau + q(t), \tag{3}$$

где $y(t)$ – вспомогательная функция, аналогичная [3, гл. 4], вырожденное ядро $Q(t,\tau)$ представлено через $\Phi_i(t)$, $\Psi_i(t)$ на основе алгоритма

$$Q_{j+1}(t,\tau) = Q_j(t,\tau) - \left[\Phi_{j+1}(t) + \int\limits_0^\omega Q_j(t,s)\Phi_{j+1}(s)\, ds\right] \left(\widetilde{\Psi_{j+1} R_{j+1}}\right)^{-1} \times$$

$$\times \left[\Psi_{j+1}(\tau) + \int\limits_0^\omega \Psi_{j+1}(s) Q_j(s,\tau)\, ds\right], \quad j = \overline{0, k-1},$$

тильдой сверху обозначен интеграл по промежутку I.

Функция $y(t)$ поэтапно в рамках соотвествующего алгоритма доопределяется с сохранением произвола при построении функций $Q_m(t,\tau)$, $q_m(t)$ так, что $Q_0(t,\tau) = 0$, $q_0(t) = 0$, $Q(t,\tau) = Q_k(t,\tau)$, $q(t) = q_k(t)$, $y(t) = y_k(t)$,

$$R_{j+1}(t) = \Phi_{j+1}(t) + \int\limits_0^\omega Q_j(t,\tau)\Phi_{j+1}(\tau)\, d\tau,$$

$$q_{j+1}(t) = q_j(t) + \delta_{j+1}(t) + \int\limits_0^\omega Q_j(t,\tau)\delta_{j+1}(\tau) d\tau,$$

где

$$\delta_{j+1}(t) = \Phi_{j+1}(t) \left(\widetilde{\Psi_{j+1} R_{j+1}}\right)^{-1} \left(\mu_{j+1} - \int\limits_0^\omega \Psi_j(\tau) q_j(\tau) d\tau\right),$$

при этом предполагается

$$\det \widetilde{\Psi_{j+1} R_{j+1}} \neq 0, \quad j = \overline{0, k-1}. \tag{4}$$

Соотношение (3) принимается за основу как представление типа [3, гл. 4] решения задачи (1), (2). С помощью [3, гл. 3] установлено, что задача (1), (2) в представлении (3) эквивалентна интегральной задаче

$$y(t) = \int\limits_0^\omega \mathcal{K}(t,\tau) y(\tau)\, d\tau + p(t), \tag{5}$$

где

$$\mathcal{K}(t,\tau) = U(t)Q(0,\tau) - Q(t,\tau), \quad p(t) = U(t)\left[y_0 + q_0 + \int\limits_0^t U^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau\right] - q(t);$$

$y_0 = y(0)$, $q_0 = q(0)$, $U(t)$ $(U(0) = E)$ – фундаментальная матрица однородного уравнения в (1).

Введём следующие обозначения:

$$b = \max_{t\in I}\int\limits_0^\omega \|Q(t,\tau)\|\,d\tau, \;\; a = \max_{t\in I}\int\limits_0^\omega \|\mathcal{K}(t,\tau)\|\,d\tau, \;\; h = \max_{t\in I}\|p(t)\|, \;\; \sigma = \max_{t\in I}\|q(t)\|,$$

где $\|\cdot\|$ – любая из норм, приведенных в [6, с. 21].

Лемма. *При выполнении условия $a < 1$ решение уравнения (5) существует и единственно, при этом справедлива оценка* $\|y(t)\| \leqslant \dfrac{h}{1-a}$.

Теорема. *Пусть $a < 1$ и выполнено условие (4). Тогда решение задачи (1), (2) в представлении (3) существует и единственно, при этом справедлива оценка*

$$\|x(t)\| \leqslant \frac{(1+b)h}{1-a} + \sigma.$$

Для построения решения используется классический метод последовательных приближений (см., например, [1, с. 605]).

Замечание. Применение метода Гаусса к системе (2) на основе

$$x(t) = \sum_{i=1}^k \Phi_i(t)c_i + y(t)$$

приводит к её решению типа (3) с более сложным алгоритмом построения векторов c_i.

Литература

1. Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1977.

2. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскнер А. Г. *Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.* М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.

3. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: ИМ НАН Беларуси, 1998.

4. Лаптинский В. Н. *К методике решения одной задачи теории гильбертовых пространств* // IX Белорусская матем. конф.: тез. докл. междунар. конф. Гродно: ГрГУ, 2004. Ч. 1. С. 81–82.

5. Лаптинский В. Н. *Об одной задаче теории векторных пространств* // X Белорусская матем. конф.: тез. докл. междунар. науч. конф., Минск, 3–-7 ноября 2008 г. / Нац. акад. наук Беларуси. Ин-т матем. Минск, 2008. Ч. 3. С. 65–66.

6. Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М.: Наука, 1967.

К АНАЛИЗУ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА–РИККАТИ С ПАРАМЕТРОМ

О.А. Маковецкая

В конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_{\mathbb{C}} = \max\limits_t \|X(t)\|$ исследуется краевая задача [1, 2]

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + XQ(t)X + \lambda F(t,X), \tag{1}$$