где $X_0 = 0$, $X_1 = -\lambda\Phi^{-1}\int\limits_0^\omega F(\tau,0)\,d\tau$; очевидно $\|X_1\| \leqslant \rho$ при $|\lambda| < \varepsilon_0$.

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма (3), при этом получена оценка

$$\|X - X_{k+1}\|_{\mathbb{C}} \leqslant \frac{q\|x_{k+1} - X_k\|_{\mathbb{C}} + p\|X_k - X_{k-1}\|_{\mathbb{C}}}{1-q}, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots, \tag{4}$$

где

$$p = \frac{1}{2}\gamma(\alpha+\beta)^2\omega^2 + \gamma\omega(2\delta\rho + \varepsilon L).$$

Оценка (4) дополнена следующими оценками

$$\|X_1\|_{\mathbb{C}} \leqslant \varepsilon\gamma\omega h;$$

$$\|X_2 - X_1\|_{\mathbb{C}} \leqslant \frac{1}{2}\gamma(\alpha+\beta)\omega^2[(\alpha+\beta)\rho + \varepsilon h] + \gamma\omega(\delta\rho^2 + \varepsilon L\rho),$$

которые позволяют выразить оценку (4) через исходные данные задачи.

Для иллюстрации применения полученных результатов рассмотрена модельная задача при $n = 2$.

**Замечание.** В [6] приведен алгоритм с неявной вычислительной схемой. Он неудобен тем, что при построении приближений на каждом шаге итерации следует решать соответствующее интегральное уравнение.

**Литература**

1. Маковецкая О. А. // Весцi Нацыянальнай акадэмii навук Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2014. № 1. С. 43–50.

2. Лаптинский В. Н., Маковецкая О. А. // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 7. С. 937–946.

3. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998.

4. Лаптинский В. Н., Маковецкий И. И., Пугин В. В. *Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати.* Могилев: БРУ, 2012.

5. Лаптинский В. Н. // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1997. № 4. С. 14–18.

6. Murty K. N., Howell G. W., Sivasundaram S.// Journal of mathematical analysis and applications. 1992. V. 167. P. 505–515.

7. Маковецкая О. А. *К конструктивному анализу периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова–Риккати с параметром* // Материалы междунар. науч. конф. «Еругинские чтения–2019». Минск, 2019. Т. 1. С. 83–84.

8. Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М.: Наука, 1967.

## ОТРАЖАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ И ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ПЕРВОГО ИНТЕГРАЛА

**В.И. Мироненко, В.В. Мироненко**

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

с непрерывно дифференцируемой правой частью и общим решением в форме Коши $\varphi(t;\, t_0, x_0)$. Для нее определена *отражающая функция* $F(t,x) := \varphi(-t;\, t,x)$ [1].

Если $F(t,x)$ – отражающая функция системы (1), то для любого решения $x(t)$ этой системы, определенного на симметричном интервале $(-\alpha,\,\alpha)$, верно тождество $F\big(t,x(t)\big)\equiv x(-t)$. Благодаря этому знание отражающей функции $F(t,x)$ системы (1) позволяет найти начальные данные $x(\omega)$ краевой задачи $G\big(\omega,x(\omega),x(-\omega)\big)=0$ из уравнения $G\Big(\omega,x(\omega),F\big(\omega,x(\omega)\big)\Big)=0$ и определить характер устойчивости решений этой задачи.

Дифференцируемая функция $F(t,x)$ является отражающей функцией системы (1) тогда и только тогда, когда она является решением задачи Коши

$$\frac{\partial F.}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}X(t,x)+X(-t,F)=0,\;\; F(0,x)\equiv x.$$

В частности, если $X(t,x)$ нечетна по $t$, то отражающая функция системы (1)

$$F(t,x)\equiv x$$

и все решения $x(t)$, $x(0)=x_0\in D$, системы (1) представляют собой четные вектор-функции.

Если $U(t,x)$ – первый интеграл дифференциальной системы (1) с отражающей функцией $F(t,x)$, то для любого решения $x(t)$, $x(0)=x_0$, этой системы справедливо соотношение $U\big(t,x(t)\big)\equiv\mathrm{const}$ и, значит, верно тождество $U\big(-t,F(t,x)\big)\overset{t,x}{\equiv}U(t,x)$.

Дифференцируемую функцию $U(t,x)$, отличную от постоянной и обладающую свойством $U\big(t,x(t)\big)\overset{t,x}{\equiv}U\big(-t,x(-t)\big)$, естественно рассматривать, как обобщение первого интеграла.

**Теорема 1.** *Пусть для дифференцируемых функций* $U(t,x):=\big(U_1(t,x),\ldots,U_r(t,x)\big)$, $r\in\mathbb{N}$, *выполнены тождества*

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial U(t,x)}{\partial x}X(t.x)\equiv f_{od}(t,U(t,x)),$$

*где* $f_{od}(t,U)$ *– нечетна по* $t$. *Тогда для отражающей функции* $F(t,x)$ *дифференциальной системы (1) выполнено тождество* $U\big(-t,F(t,x)\big)\equiv U(t,x)$, *а для каждого решения* $x(t)$, $t\in(-\alpha,\,\alpha)$, *системы (1) тождество* $U\big(-t,x(-t)\big)\equiv U\big(t,x(t)\big)$.

**Следствие.** *Пусть для* $2\omega$*-периодической дифференциальной системы (1) существуют функции* $U(t,x):=\big(U_1(t,x),...,U_r(t,x)\big)$, *удовлетворяющие условиям теоремы 1. Тогда отображение Пуанкаре* $\Pi(x):=F(-\omega,x)=\varphi(\omega;\,-\omega,x)$ *на периоде* $[-\omega,\,\omega]$ *удовлетворяет соотношению* $U\big(\omega,\Pi(x)\big)\equiv U(-\omega,x)$.

**Теорема 2.** *Пусть для дифференцируемых функций* $X_0(\rho,\cos\varphi)$ *и* $X_1(\rho,\cos\varphi)$ *существуют дифференцируемые функции* $U(\rho,\cos\varphi)$ *и* $V(\rho,\cos\varphi)$, *удовлетворяющие соотношениям*

$$\frac{\partial U}{\partial\rho}X_0+UVcos\varphi+U\left(\frac{\partial V}{\partial\rho}X_1-\frac{\partial V}{\partial c}\right)(1-\cos^2\varphi)\equiv 0,$$
$$\frac{\partial U}{\partial\rho}X_1-\frac{\partial U}{\partial c}+U\frac{\partial V}{\partial\rho}X_0=Uf(Ue^{v\sin\varphi},\cos\varphi),$$

*где* $\dfrac{\partial U}{\partial\rho}$ *и* $\dfrac{\partial V}{\partial c}$ *– частные производные от функций* $U(\rho,\cos\varphi)$ *и* $V(\rho,\cos\varphi)$ *по* $\cos\varphi$, *а* $f(x_1,x_2)$ *– непрерывная функция двух переменных.*

*Тогда отражающая функция* $F(\rho,\varphi)$ *уравнения* $\dfrac{d\rho}{d\varphi} = X_0(\rho,\cos\varphi)+X_1(\rho,\cos\varphi)\sin\varphi$ *удовлетворяет тождеству*

$$U(F,\cos\varphi)e^{-V(F,\cos\varphi)\sin\varphi} = U(\rho,\cos\varphi)e^{V(\rho,\cos\varphi)\sin\varphi}.$$

Теорема 2 при выполнении ее условий позволяет решить проблему центра-фокуса. При нахождении функций $U$, $V$ разумно иногда определить вначале функцию $V$ как первый интеграл уравнения $\dfrac{d\rho}{dc} = -X_1(\rho,c)$.

Эта теорема допускает обобщение и на системы произвольной размерности.

**Литература**

1. Мироненко В. И. *Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений.* Минск: Университетское, 1986.

## АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ (ДВУСТОРОННЯЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ)

**Д.В. Роголев**

Исследуется краевая задача типа [1, 2]

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= G_1(t,X,Y),\\ \frac{dY}{dt} &= G_2(t,X,Y),\end{aligned} \tag{1}$$

$$X(0) = X(\omega), \quad Y(0) = Y(\omega), \tag{2}$$

где

$$G_1(t,X,Y) = A_1(t)X + XB_1(t) + XS_1(t)X + XS_2(t)Y + YC(t)Y + F_1(t),$$
$$G_2(t,X,Y) = A_2(t)Y + YB_2(t) + YP_1(t)X + YP_2(t)Y + XQ(t)X + F_2(t)$$

с коэффициентами класса $\mathbb{C}\left(I,\, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $(t,X,Y)\in I\times\mathbb{R}^{n\times n}\times\mathbb{R}^{n\times n}$; $I=[0,\omega]$, $\omega>0$.

Введены следующие обозначения:

$$D = \{(t,X,Y)\colon t\in I,\ \|X\|\leqslant\rho_1,\ \|Y\|\leqslant\rho_2\}, \quad M_i = \int\limits_0^\omega A_i(\tau)d\tau, \quad N_i = -\int\limits_0^\omega B_i(\tau)d\tau,$$

$$\gamma_i = \left\|\Phi_i^{-1}(\omega)\right\|, \quad \alpha_i = \max_{t\in I}\|A_i(t)\|, \quad \beta_i = \max_{t\in I}\|B_i(t)\|, \quad \delta_i = \max_{t\in I}\|S_i(t)\|,$$

$$\mu_i = \max_{t\in I}\|P_i(t)\|, \quad \sigma = \max_{t\in I}\|C(t)\|, \quad \nu = \max_{t\in I}\|Q(t)\|, \quad h_i = \max_{t\in I}\|F_i(t)\|,$$

$$\varphi_1(\rho_1,\rho_2) = \gamma_1\left\{\frac12(\alpha_1+\beta_1)\left[(\alpha_1+\beta_1)\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2+\sigma\rho_2^2+h_1\right]\omega^2+\right.$$
$$\left.+\left(\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2+\sigma\rho_2^2+h_1\right)\omega\right\},$$

$$\varphi_2(\rho_1,\rho_2) = \gamma_2\left\{\frac12(\alpha_2+\beta_2)\left[(\alpha_2+\beta_2)\rho_2+\nu\rho_1^2+\mu_1\rho_1\rho_2+\mu_2\rho_2^2+h_2\right]\omega^2+\right.$$
$$\left.+\left(\nu\rho_1^2+\mu_1\rho_1\rho_2+\mu_2\rho_2^2+h_2\right)\omega\right\},$$