*Тогда отражающая функция* $F(\rho,\varphi)$ *уравнения* $\dfrac{d\rho}{d\varphi}=X_0(\rho,\cos\varphi)+X_1(\rho,\cos\varphi)\sin\varphi$ *удовлетворяет тождеству*

$$U(F,\cos\varphi)e^{-V(F,\cos\varphi)\sin\varphi}=U(\rho,\cos\varphi)e^{V(\rho,\cos\varphi)\sin\varphi}.$$

Теорема 2 при выполнении ее условий позволяет решить проблему центра-фокуса. При нахождении функций $U$, $V$ разумно иногда определить вначале функцию $V$ как первый интеграл уравнения $\dfrac{d\rho}{dc}=-X_1(\rho,c)$.

Эта теорема допускает обобщение и на системы произвольной размерности.

**Литература**

1. Мироненко В. И. *Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений.* Минск: Университетское, 1986.

## АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ (ДВУСТОРОННЯЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ)

**Д.В. Роголев**

Исследуется краевая задача типа [1, 2]

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt}&=G_1(t,X,Y),\\ \frac{dY}{dt}&=G_2(t,X,Y),\end{aligned}\tag{1}$$

$$X(0)=X(\omega),\quad Y(0)=Y(\omega),\tag{2}$$

где

$$G_1(t,X,Y)=A_1(t)X+XB_1(t)+XS_1(t)X+XS_2(t)Y+YC(t)Y+F_1(t),$$
$$G_2(t,X,Y)=A_2(t)Y+YB_2(t)+YP_1(t)X+YP_2(t)Y+XQ(t)X+F_2(t)$$

с коэффициентами класса $\mathbb{C}\left(I,\,\mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $(t,X,Y)\in I\times\mathbb{R}^{n\times n}\times\mathbb{R}^{n\times n}$; $I=[0,\omega]$, $\omega>0$.

Введены следующие обозначения:

$$D=\{(t,X,Y)\colon t\in I,\ \|X\|\leqslant\rho_1,\ \|Y\|\leqslant\rho_2\},\quad M_i=\int\limits_0^\omega A_i(\tau)d\tau,\quad N_i=-\int\limits_0^\omega B_i(\tau)d\tau,$$

$$\gamma_i=\left\|\Phi_i^{-1}(\omega)\right\|,\quad \alpha_i=\max_{t\in I}\|A_i(t)\|,\quad \beta_i=\max_{t\in I}\|B_i(t)\|,\quad \delta_i=\max_{t\in I}\|S_i(t)\|,$$

$$\mu_i=\max_{t\in I}\|P_i(t)\|,\quad \sigma=\max_{t\in I}\|C(t)\|,\quad \nu=\max_{t\in I}\|Q(t)\|,\quad h_i=\max_{t\in I}\|F_i(t)\|,$$

$$\begin{aligned}\varphi_1(\rho_1,\rho_2)=\gamma_1\Big\{&\frac12(\alpha_1+\beta_1)\left[(\alpha_1+\beta_1)\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2+\sigma\rho_2^2+h_1\right]\omega^2+\\&+\left(\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2+\sigma\rho_2^2+h_1\right)\omega\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(\rho_1,\rho_2)=\gamma_2\Big\{&\frac12(\alpha_2+\beta_2)\left[(\alpha_2+\beta_2)\rho_2+\nu\rho_1^2+\mu_1\rho_1\rho_2+\mu_2\rho_2^2+h_2\right]\omega^2+\\&+\left(\nu\rho_1^2+\mu_1\rho_1\rho_2+\mu_2\rho_2^2+h_2\right)\omega\Big\},\end{aligned}$$

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi\,(\rho) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\rho_1, \rho_2) \\ \varphi_2(\rho_1, \rho_2) \end{pmatrix}, \quad A = \varphi'(\rho),$$

где $\rho_i > 0$, $\Phi_i$ – линейные операторы, $\Phi_i Z = M_i Z - Z N_i$, $\varphi'(\rho)$ – матрица Якоби для $\varphi(\rho)$; $Z = \{X, Y\}$, $i = 1, 2$.

В настоящей работе, являющейся обобщением и развитием [1–3], на основе применения метода [4, гл. 3] получена

**Теорема.** *Пусть выполнены следующие условия:*

*1)* $\sigma(M_i) \cap \sigma(N_i) = \varnothing$ $(i = 1, 2)$ ($\sigma(K)$ *– множество характеристических чисел матрицы* $K$);

*2)* $\varphi(\rho) \leqslant \rho$;

*3)* $a_{11} < 1$, $\det(E - A) > 0$, *где* $E = \mathrm{diag}(1, 1)$.

*Тогда задача* (1), (2) *однозначно разрешима в области* $D$.

Выведен алгоритм построения решения, основанный на неявной вычислительной схеме типа [4, гл. 3] и имеющий в дифференциальной форме вид

$$\frac{dX_{k+1}}{dt} = G_1(t, X_k, Y_k), \tag{3}$$

$$\frac{dY_{k+1}}{dt} = G_2(t, X_k, Y_k), \tag{4}$$

$$X_{k+1}(0) = X_{k+1}(\omega), \tag{5}$$

$$Y_{k+1}(0) = Y_{k+1}(\omega), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

где в качестве начального приближения $\big(X_0, Y_0\big)$ приняты постоянные матрицы, определяемые из условий (5), (6) для приближения $\big(X_1(t), Y_1(t)\big)$ соответственно:

$$\int\limits_0^\omega G_1(\tau, X_0, Y_0)d\tau = 0, \quad \int\limits_0^\omega G_2(\tau, X_0, Y_0)d\tau = 0.$$

С помощью конструктивного регуляризатора [4, гл. 3] на основе (3)–(6) получено рекуррентное интегральное соотношение для вычисления функций $X_k(t)$, $Y_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$,

$$X_k(t) = \Phi_1^{-1}\Bigg\{\int\limits_0^t \Bigg(\int\limits_0^\tau A_1(\sigma)d\sigma\Bigg) G_1(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau))d\tau -$$
$$- \int\limits_t^\omega \Bigg(\int\limits_\tau^\omega A_1(\sigma)d\sigma\Bigg) G_1(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau))\,d\tau +$$
$$+ \int\limits_0^t G_1(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)) \Bigg(\int\limits_0^\tau B_1(\sigma)d\sigma\Bigg)d\tau -$$
$$- \int\limits_t^\omega G_1(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)) \Bigg(\int\limits_\tau^\omega B_1(\sigma)d\sigma\Bigg)d\tau -$$
$$- \int\limits_0^\omega \left[G_1(\tau, X_k(\tau), Y_k(\tau)) - A_1(\tau)X_k(\tau) - X_k(\tau)B_1(\tau)\right]d\tau\Bigg\},$$

$$Y_k(t) = \Phi_2^{-1}\left\{\int\limits_0^t \left(\int\limits_0^\tau A_2(\sigma)\,d\sigma\right) G_2(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau))\,d\tau - \right.$$

$$-\int\limits_t^\omega \left(\int\limits_\tau^\omega A_2(\sigma)d\sigma\right) G_2(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau))d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t G_2(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)) \left(\int\limits_0^\tau B_2(\sigma)d\sigma\right) d\tau -$$

$$-\int\limits_t^\omega G_2(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)) \left(\int\limits_\tau^\omega B_2(\sigma)\,d\sigma\right) d\tau -$$

$$\left. -\int\limits_0^\omega \left[G_2(\tau, X_k(\tau), Y_k(\tau)) - A_2(\tau)Y_k(\tau) - Y_k(\tau)B_2(\tau)\right] d\tau \right\}.$$

Исследованы вопросы сходимости, скорости сходимости предложенного алгоритма, при этом получены соответствующие оценки погрешностей приближённых решений.

**Литература**


1. Лаптинский В. Н., Роголев Д. В. *Конструктивные методы построения решения периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений типа Риккати* // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 10. С. 1412–1420.

2. Лаптинский В. Н., Роголев Д .В. *К конструктивному анализу периодической краевой задачи для системы матричных уравнений Риккати* // Третья междунар. науч. конф. «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения»: тез. докл., Брест, 17–22 сент. 2012 г. Брест: БрГУ, 2012. С. 66.

3. Роголев Д. В. *Анализ периодической краевой задачи для системы матричных уравнений типа Риккати* // Веснік Магілёўскага дзярж. ун-та імя А.А.Куляшова. Сер. В. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). 2011. № 1(37). Могилёв: МГУ, 2011. С. 4–19.

4. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: ИМ НАН Беларуси, 1998.


## ИНВАРИАНТЫ СИСТЕМЫ $\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{e}(\mathbf{x})\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{c}(\mathbf{x})\mathbf{y}^2$ И ЕЕ ИЗОХРОННОСТЬ

**А.Е. Руденок**

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -e(x)y, \quad \dot{y} = a(x) + c(x)y^2, \tag{1}$$

где $e(x)$, $a(x)$, $c(x)$ – голоморфные в окрестности $x = 0$ функции, $e(0) = 1$, $a(0) = 0$, $a'(0) = 1$. Две системы вида (1) будем называть *эквивалентными*, если существует преобразование вида

$$x \to F(x), \quad y \to yG(x), \tag{2}$$

переводящее системы одну в другую. Для системы (1) введем функции $B(x)$, $h(x)$ по формулам:

$$h(x) = 2\bigl(-1 + a(x)c(x) + e(x)a'(x)\bigr), \quad B(x) = a(x)e(x)h'(x). \tag{3}$$