6. Пецевич В. М., Шевченя Д. Н. *Свойство Пенлеве для дифференциальной системы второго порядка* // Проблемы физики, математики и техники. 2016. № 1(26). С. 48–51.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ОБОБЩЕННОЙ ИЕРАРХИИ ВТОРОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

В.И. Громак

Известно, что уравнения Пенлеве $(P_1 - P_6)$, которые являются решением классификационной проблемы относительно свойства Пенлеве для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, в общем случае определяют новые трансцендентные функции. Эти функции находят приложения как в различных математических проблемах, так и в различных вопросах физики, математической физики и играют, по сути, такую же роль в нелинейных проблемах как и классические специальные функции в линейных проблемах. В этой связи в настоящее время существует определенный интерес в изучении иерархий уравнений Пенлеве, которые являются бесконечными последовательностями нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих единую дифференциально–алгебраическую структуру, при этом первыми членами таких иерархий являются уравнения Пенлеве. Уравнения иерархий, как и сами уравнения Пенлеве, при специальных значениях параметров имеют специальные классы решений, выражающиеся через классические трансцендентные функции, а также алгебраические или даже рациональные решения. При этом для рациональных решений возникает задача представления их через специальные полиномы [1–7].

Известно, что рациональные решения обобщенных иерархий второго уравнения Пенлеве

$$\widetilde{P}_2^{[2N]} \equiv (D+2w)\,\widetilde{L}_N[w' - w^2] - zw - \alpha = 0, \quad D = \frac{d}{dz}, \quad w = w(z), \quad N = 1, 2, ..., \tag{1}$$

и модифицированного второго уравнения Пенлеве (обобщенная иерархия уравнения P_{34})

$$\Psi'' = \frac{(\Psi')^2}{2\Psi} - 2q\Psi - \frac{\sigma^2}{2\Psi} = 0, \quad q(z) := w'(z) - w(z)^2, \quad \Psi(q(z)) := \widetilde{L}_N[q] - z/2, \tag{2}$$

где оператор $\widetilde{L}_N$ определяется рекуррентным соотношением

$$\widetilde{L}_{N+1}[u] = D^{-1}\big((D^3 + (4u+\beta_N)D + 2u_z)\widetilde{L}_N[u]\big),$$

$$\widetilde{L}_1[u] = u, \quad u = u(z)$$

и α, β_N – параметры, можно определить через специальные полиномиальные определители (детерминантное представление Jacobi-Trudi). При этом рациональные решения $w^{[N]}(z,\alpha,\beta)$, $q^{[N]}(z,\sigma,\beta)$, $\sigma = \alpha - 1/2$, существуют только при целом α, единственны при фиксированном β и при $\alpha = m \in \mathbb{N}$ справедлива

Теорема 1. *Рациональное решение N-го уравнения иерархий (1), (2) может быть представлено как*

$$w^{[N]}(z, \pm m, \beta) = \pm D\left\{\ln(\tau_{m-1}^{[N]}/\tau_m^{[N]})\right\}, \quad q^{[N]}(z, \pm(m+1/2), \beta) = 2D^2\left\{\ln(\tau_m^{[N]})\right\},$$

где полиномиальная τ-функция $\tau_m^{[N]}(z)$ есть $(m \times m)$-определитель

$$\tau_m^{[N]} = \begin{vmatrix} p_m^{[N]}(z) & p_{m+1}^{[N]}(z) & \dots & p_{2m-1}^{[N]}(z) \\ p_{m-2}^{[N]}(z) & p_{m-1}^{[N]}(z) & \dots & p_{2m-3}^{[N]}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{-m+2}^{[N]}(z) & p_{-m+3}^{[N]}(z) & \dots & p_1^{[N]}(z) \end{vmatrix},$$

где полиномы $p_m^{[N]}(z)$ $\left(p_m^{[N]}(z) = 0\right.$ для $\left.m < 0\right)$ определяются образующей функцией $\Phi(z,\lambda)$ формального параметра λ

$$\Phi(z,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^{[N]}(z)\lambda^k, \quad \Phi(z,\lambda) = \exp\left(z\lambda - \sum_{l=1}^{N} \frac{4^l s_{N-l}}{2l+1}\lambda^{2l+1}\right),$$

где $s_0 = 1$; s_l, $l = 1,\dots,N-1$, – основные симметрические полиномы параметров β_1, $\dots$, β_{N-1}. Если $\alpha = m = 0$, то $w^{[N]}(z,0,\beta) = 0$, $w^{[N]}(z,\pm1,\beta) = \mp 1/z$, $q^{[N]}(z,\pm1/2,\beta) = -2/z^2$.

Справедлива

Теорема 2. *Полиномы $p_m^{[N]}(z)$ удовлетворяют линейному разностному уравнению порядка $2N+1$ и линейному дифференциальному уравнению*

$$(4^N D^{2N+1} + 4^{N-1}s_1 D^{2N-1} + \dots + 4^{N-2}s_{N-1}D^3 - zD + m)p_m^{[N]} = 0, \tag{3}$$

где $s_0 = 1$; s_j, $j = 1,\dots,N-1$, – основные симметрические полиномы параметров β_1, β_2, $\dots$, β_{N-1}, $N = 2,3,\dots$.

Заметим, что в случае $s_1 = s_2 = \dots = s_{N-1} = 0$, что соответствует стационарной иерархии $P_{34}^{[2N]}$, уравнение (3) имеет вид

$$(4^N D^k - zD + m)p_m^{[N]} = 0, \quad k = 2N+1, \tag{4}$$

для которого единственная особая точка $z = \infty$ является иррегулярной. Общее решение уравнения (4) имеет вид

$$p_m^{[N]} =$$

$$= c_1 \cdot {}_1F_{2N}\left(-\frac{m}{k}; \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}; \varsigma\right) + c_2 z \cdot {}_1F_{2N}\left(\frac{1-m}{k}; \frac{2}{k}, \frac{3}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, \frac{k+1}{k}; \varsigma\right) +$$

$$+ \dots + c_k z^{k-1} \cdot {}_1F_{2N}\left(\frac{k-1-m}{k}; \frac{k+1}{k}, \frac{k+2}{k}, \dots, \frac{2k-1}{k}; \varsigma\right), \tag{5}$$

где $\varsigma = z^k(2k)^{-2N}$, c_k – произвольные постоянные, а ${}_1F_q\left(a; b_1, b_2, \dots, b_q; \varsigma\right)$ – обобщенная гипергеометрическая функция, определяемая

$${}_1F_q\left(a; b_1, b_2, \dots, b_q; \varsigma\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(a)_j}{(b_1)_j \cdot (b_2)_j \cdot \dots \cdot (b_q)_j} \frac{\zeta^j}{j!},$$

где $(a)_j = a(a+1)\dots(a+j-1) = \Gamma(a+j)/\Gamma(a)$ и $\Gamma(\cdot)$ – гамма функция. Если $m \in \in \mathbb{Z}^+$, как в нашем случае, то одна из гипергеометрических функций, входящих в (5), обращается в полином по z, так как в этом случае функция

$${}_1F_{2N}\left(-m; b_1, b_2, \dots, b_{2N}; z^k(2k)^{-2N}\right)$$

есть полином z, который и определяет полином $p_m^{[N]}(z)$. Заметим, что при $N = 1$ уравнение (4) с общим решением (5) в этом случае получены в [2].

Литература

1. Kajiwara K., Ohta Y. *Determinant structure of the rational solutions for the Painlevé II equation* // J. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 4393–4704.

2. Clarkson P. A. *Painlevé equations – nonlinear special functions.* Lect. Notes in Math. Springer-Verlag. 2006. V. 1883. P. 331–411.

3. Gromak V. I., Laine I., Shimomura S. *Painlevé Differential Equations in the Complex Plane* // De Gruyter. Studies in Mathematics. V. 28. Berlin; New-York, 2002.

4. Демина М. В., Кудряшов Н. А. *Специальные полиномы и рациональные решения иерархии второго уравнения Пенлеве* // Теоретическая и математическая физика. 2007. Т. 153. № 1. С. 58–67.

5. Bobrova I. *On symmetries of the non-stationary $P_{II}^{(n)}$ hierarchy and their applications* // arXiv: 2010.10617v2 [nlin.SI].

6. Громак В. И. *Аналитические свойства решений уравнений обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1017–1033.

7. Громак В. И. *О свойствах решений уравнений обобщенной иерархии уравнения P_{34}* // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 2. С. 153–163.

О МЕРОМОРФНЫХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ СО ВТОРЫМ УРАВНЕНИЕМ ПЕНЛЕВЕ

Е.В. Громак

В работе рассматриваются аналитические свойства решений линейных уравнений второго порядка с потенциалом, зависящим от мероморфных решений второго уравнения Пенлеве. Методом Фробениуса установлены достаточные условия мероморфности общего решения. Установлена интегрируемость в рациональных функциях линейного уравнения второго порядка с потенциалом, связанным с рациональными решениями второго уравнения Пенлеве.

Известно, что решения второго уравнения Пенлеве

$$w'' = 2w^3 + zw + \alpha \tag{1}$$

являются мероморфными фукциями [1, 2]. Одним из основных инструментов исследования аналитических свойств решений $w_\alpha = w(z,\alpha)$ уравнения (1) является преобразование Беклунда, которое позволило, в частности, доказать трансцендентность уравнения (1), а также разбить множество решений на три класса: 1. Рациональные решения; 2. Решения Эйри; 3. Трансцендентные решения, т.е. решения, не входящие в первые два класса [3].

Рациональные решения существуют только при $\alpha \in \mathbb{Z}$. Они порождаются тривиальным решением $w = 0$ при $\alpha = 0$ и последовательным применением к нему преобразования Беклунда. При каждом $\alpha \in \mathbb{Z}$ рациональное решение единственно и имеет структуру

$$w(z) = \frac{Q'_{n-1}(z)}{Q_{n-1}(z)} - \frac{Q'_n(z)}{Q_n(z)}, \quad \alpha = n \in \mathbb{N},$$

где полиномы Яблонского-Воробьева $Q_n = Q_n(z)$ определяются рекуррентным соотношением [4, 5]

$$Q_{n+1}Q_{n-1} = zQ_n^2 - 4\big(Q_nQ''_n - (Q'_n)^2\big), \quad Q_0 = 1, \quad Q_1 = z.$$

Для $\alpha = -n,\ n \in \mathbb{N}$, рациональное решение $w_{-n}(z) = -w_n(z)$ и $w = 0$ для $\alpha = 0$. Каждое рациональное решение имеет $l_+ = \alpha(\alpha-1)/2$ и $l_- = \alpha(\alpha+1)/2,\ \alpha \in \mathbb{Z}_+$, полюсов с вычетом 1 и -1 соответственно.