Теорема 1. *Если функции* h, B, *определенные формулами (3), связаны функциональным соотношением*

$$B(x) = K\big(h(x)\big), \tag{4}$$

то функция K *является инвариантом системы (1) при преобразованиях (2).*

Теорема 2. *Если для некоторой изохронной системы (1) функции (3) связаны соотношением (4), то любая другая система вида (1), у которой функции (3) связаны тем же соотношением* K, *изохронная.*

Теорема 3. *Если для системы (1)* $h(x) = 0$, *то система (1) изохронная и имеет вид*

$$\dot{x} = -e(x)y, \quad \dot{y} = a(x) + \frac{1 - e(x)a'(x)}{a(x)}y^2.$$

Теорема 4. *Если для системы (1)*

$$B(x) = \frac{1}{3}h(x)\big(3 + 2h(x)\big), \tag{5}$$

то она изохронная.

Доказательство. Система

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = \frac{x(1-kx)\,(1-2kx+2k^2x^2)}{(1-2kx)^3},$$

$k \in \mathbb{R}$, изохронная [1], и ее функции (3) связаны соотношением (5).

Теорема 5. *Система*

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = \frac{r(x)\big(1 + r(x)\big)^3}{r'(x)} + \left(-\frac{3r'(x)}{1 + r(x)} + \frac{r''(x)}{r'(x)}\right)y^2, \tag{6}$$

$r(x) = k\,x + \ldots$, $k \in \mathbb{R}$, *изохронная.*

Доказательство. Система

$$\dot{x} = -(1+kx)^3y, \quad \dot{y} = x$$

$k \in \mathbb{R}$, изохронная [2], а функции (3) этой системы и функции (3) системы (6) связаны одним и тем же соотношением (4).

Литература

1. Руденок А. Е. *Системы Льенара с центром и изохронным центром* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 1. С. 70–83.

2. Волокитин Е. П, Иванов В. В. *Изохронность и коммутируемость полиномиальных векторных полей* // Сиб. матем. журн. 1999. Т. 40. № 1. С. 30–48.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ «НОРМАЛЬНОГО РАЗМЕРА» КУБИЧЕСКИХ СИСТЕМ ЛЬЕНАРА

И.Н. Сидоренко

Рассмотрим каноническую систему Льенара

$$\frac{dx}{dt} = y, \;\; \frac{dy}{dt} = x\big(1 - x\big)\big(1 - (Lx)\big) - \varepsilon\big(a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3\big)y, \tag{1}$$

где $L\mathbb{R}$, $a_i \in \mathbb{R}$. Поместим в точку $O(0;0)$ седло, а в точку $E(1,0)$ – антиседло, что соответствует условию $L<0$. Данная работа является продолжением и развитием [1, 2]. Целью данной работы является исследование максимального количества предельных циклов «нормального размера» [2] у систем (1), а также построение конкретных систем рассматриваемого класса с различными распределениями предельных циклов. Для исследования семества систем (1) будем использовать прогнозный метод [3] оценки числа предельных циклов. Метод основывается на решении алгебраической системы уравнений

$$F(\xi) = F(\psi), \quad G(\xi) = G(\psi), \tag{2}$$

где $F(x) = \int f(x)du$, $G(x) = \int g(x)du$, промежутки изменения переменных ξ, ψ зависят от выбора особых точек, вокруг которых производится оценка числа предельных циклов. Для "улучшения" полученных систем используется метод, разработанный для возмущения негрубого фокуса [4]. Обозначим через a – вектор коэффициентов системы (1), и пусть при $a = a^0$ система имеет k предельных циклов вокруг точки $O(0,0)$, которые распределены не равномерно. Выберем на промежутке $I = [p,q]$, $p>0$, точки $x_1, \ldots, x_{k+1}$ и рассмотрим функцию последования $\Delta(x, a^0+\Delta a)$, $x \in I$, Δa некоторое возмущение системы (1), тогда $\Delta(x_i, a^0+\Delta a) = \Delta(x_i, a^0) + \sum\limits_{j=1}^{n} tp(i,j)\Delta a_j + o(\Delta a)$, где $tp(i,j) = \dfrac{\partial \Delta^k(x_i^k, a^0)}{\partial a_j}$ находятся численно. Далее решаем задачу линейного программирования

$$L \to \min, \quad \pm(-1)^i \left(\Delta(x_i, a^0) + \sum_{j=1}^{n} tp^k(i,j)\Delta a_j\right) \geqslant 0, \quad i = \overline{1, k+1}, \quad |\Delta a_j| \leqslant L. \tag{3}$$

Если задача (3) имеет решение $\Delta a = \Delta a^*$, $L = L^*$, то соответствующая система Льенара имеет, по крайней мере, k предельных циклов.

Теорема. *Для системы Льенара*

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x\big(1-(1+L)x+Lx^2\big) - \varepsilon(a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3)y \tag{4}$$

с $L = -\dfrac{1}{2}$, $a_3 = 1$, $a_4 = -1$, *имеющей антиседла* $A\,(-2,\,0)$, $E\,(1,\,0)$ *и седло* $O\,(0,\,0)$ *выполняются следующие утверждения:*

1. *Все решения соответствующей системы прогноза (2) для системы Льенара (4) типа* $\big((k_2,k_3),k_1\big)$ *удовлетворяют неравенству* $k_1+k_2+k_3 \leqslant 4$.

2. *Система прогноза (2) для рассматриваемой системы Льенара (4) может иметь решения только следующих типов:* $\big((1,0),0\big)$, $\big((0,1),0\big)$, $\big((0,0),1\big)$, $\big((1,0),1\big)$, $\big((0,1),1\big)$, $\big((1,1),1\big)$, $\big((0,2),0\big)$, $\big((2,0),0\big)$, $\big((0,0),2\big)$.

3. *В каждой области пространства коэффициентов, в которой система прогноза имеет решение типа* $\big((k_2,k_3),k_1\big)$, *существует подмножество, в котором система Льенара (3) при* $\varepsilon = 0.01$ *имеет такое же распределение* $\big((k_2,k_3),k_1\big)$ *предельных циклов.*

4. *Если* $k_2 = 0$ $(k_3 = 0)$, *то система Льенара (4) не имеет предельных циклов, окружающих особую точку* $A\,(-2,0)$ $(\,E\,(1,0)\,)$.

Литература

1. Сидоренко И. Н. *Предельные циклы «нормального размера», окружающие группу особых точек систем Льенара с симметрией* // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.А. Куляшова. 2019. № 2(54). С. 21—29.

2. Сидоренко И. Н. *Предельные циклы нормального размера систем Льенара с симметрией* // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.А. Куляшова. 2009. № 4(34). С. 167–174.

3. Сидоренко И. Н. *Предельные циклы «нормального размера» систем Льенара с пятью особыми точками* // Международная математическая конференция «Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям», посвященные 100-летию со дня рождения профессора Ю.С. Богданова: материалы Междунар. науч. конф. Минск, 1–4 июня 2021 г. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2021. С. 214-–215.

4. Черкас Л. А., Гринь А. А., Булгаков В. И. *Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход)*. Гродно: ГрГУ, 2013.

О КОМПАКТНЫХ ИНВАРИАНТНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.Ю. Тыщенко

Рассмотрим вполне разрешимую [1, с. 230] невырожденную [2] дискретную динамическую систему, образованную биголоморфизмами

$$f_j : G \to \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1,m}, \tag{1}$$

где область $G \subset \mathbb{R}^n,\ n > 1.$ При этом будем полагать, что все отображения $f_j^{s_j}$ имеют общую область определения, где $s_j \in \mathbb{Z},\ f_j^{-1}$ – отображение, обратное к $f_j,\ j = \overline{1,m}$, произведения отображений обозначают суперпозиции соответствующих отображений. Согласно [2, 3] система (1) определяет на G сингулярное слоение размерности m.

Определение 1. Изолированную компактную инвариантную гиперповерхность системы (1) будем называть *регулярной*, если данная гиперповерхность является в каждой из двух определяемых ею полуокрестностей локально притягивающей или локально отталкивающей для каждого биголоморфизма $f_j,\ j = \overline{1,m}$.

Наряду с пространством $\mathbb{R}^n$ будем использовать его компактификацию с использованием n-мерной сферы S^n, полученной добавлением бесконечно удаленной точки ∞ при применении многомерной стереографической проекции. При этом все вычисления будем проводить в карте сферы S^n, соответствующей пространству $\mathbb{R}^n$. Будем считать, что область G образована лакунами (линейно связными множествами, для каждого из которых существует гиперповерхность, гомеоморфная $(n-1)$-мерной сфере S^{n-1} и содержащая внутри себя это и только это множество) $\Gamma_l,\ l = \overline{1,r+1}$. При этом лакуны $\Gamma_l,\ l = \overline{1,r}$, не содержат бесконечно удаленную точку ∞ (их будем называть внутренними), а внешняя лакуна Γ_{r+1} содержит бесконечно удаленную точку ∞.

Расмотрим гладкие на области G дифференциальные $(n-1)$-формы ω и $\omega(g_j)$, а также образованную на их основе дифференциальную $(n-1)$-форму

$$\varpi_j(x) = \omega(g_j(x)) - \omega(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i^j(x) dx^i,$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, внешние произведения

$$dx^i = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n, \quad i = \overline{1,n}, \quad j \in \{1, \ldots, m\}.$$