

Литература

1. Сидоренко И. Н. *Предельные циклы «нормального размера», окружающие группу особых точек систем Лъенара с симметрией* // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.А. Куляшова. 2019. № 2(54). С. 21–29.
2. Сидоренко И. Н. *Предельные циклы нормального размера систем Лъенара с симметрией* // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.А. Куляшова. 2009. № 4(34). С. 167–174.
3. Сидоренко И. Н. *Предельные циклы «нормального размера» систем Лъенара с пятью особыми точками* // Международная математическая конференция «Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям», посвященные 100-летию со дня рождения профессора Ю.С. Богданова: материалы Междунар. науч. конф. Минск, 1–4 июня 2021 г. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2021. С. 214–215.
4. Черкас Л. А., Гринь А. А., Булгаков В. И. *Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход)*. Гродно: ГрГУ, 2013.

О КОМПАКТНЫХ ИНВАРИАНТНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ
ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.Ю. Тыщенко

Рассмотрим вполне разрешимую [1, с. 230] невырожденную [2] дискретную динамическую систему, образованную биголоморфизмами

$$f_j : G \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, m}, \quad (1)$$

где область $G \subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$. При этом будем полагать, что все отображения $f_j^{s_j}$ имеют общую область определения, где $s_j \in \mathbb{Z}$, f_j^{-1} – отображение, обратное к f_j , $j = \overline{1, m}$, произведения отображений обозначают суперпозиции соответствующих отображений. Согласно [2, 3] система (1) определяет на G сингулярное слоение размерности m .

Определение 1. Изолированную компактную инвариантную гиперповерхность системы (1) будем называть *регулярной*, если данная гиперповерхность является в каждой из двух определяемых ею полукрестностей локально притягивающей или локально отталкивающей для каждого биголоморфизма f_j , $j = \overline{1, m}$.

Наряду с пространством $\mathbb{R}^n$ будем использовать его компактификацию с использованием n -мерной сферы S^n , полученной добавлением бесконечно удаленной точки ∞ при применении многомерной стереографической проекции. При этом все вычисления будем проводить в карте сферы S^n , соответствующей пространству $\mathbb{R}^n$. Будем считать, что область G образована лакунами (линейно связными множествами, для каждого из которых существует гиперповерхность, гомеоморфная $(n-1)$ -мерной сфере S^{n-1} и содержащая внутри себя это и только это множество) Γ_l , $l = \overline{1, r+1}$. При этом лакуны Γ_l , $l = \overline{1, r}$, не содержат бесконечно удаленную точку ∞ (их будем называть внутренними), а внешняя лакуна Γ_{r+1} содержит бесконечно удаленную точку ∞ .

Рассмотрим гладкие на области G дифференциальные $(n-1)$ -формы ω и $\omega(g_j)$, а также образованную на их основе дифференциальную $(n-1)$ -форму

$$\varpi_j(x) = \omega(g_j(x)) - \omega(x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_i^j(x) dx^i,$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, внешние произведения

$$dx^i = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n, \quad i = \overline{1, n}, \quad j \in \{1, \dots, m\}.$$

Дифференциальной $(n-1)$ -форме ϖ_j на области G поставим в биективное соответствие гладкое векторное поле $a^j = (a_1^j, \dots, a_n^j)$. Также будем рассматривать всевозможные пределы

$$\lim_{\gamma \rightarrow \Gamma_l} \int_{\gamma} \varpi_j, \quad (2)$$

где γ_l есть простая замкнутая (т.е. гомеоморфная сфере S^{n-1}) кусочно-гладкая гиперповерхность (в дальнейшем все гиперповерхности будем полагать кусочно-гладкими), внутри которой расположена лакуна Γ_l (и только она одна), $l = \overline{1, r}$. При этом будем считать, что ориентация гиперповерхностей γ_l согласована с ориентацией внутренности.

Определение 2. Верхний (нижний) точный предел (2) будем называть *верхним (нижним) индексом внутренней лакуны Γ_l относительно дифференциальной $(n-1)$ -формы ϖ_j* и обозначать символом $\overline{\text{ind}}_{\varpi_j} \Gamma_l$ ($\underline{\text{ind}}_{\varpi_j} \Gamma_l$), $l = \overline{1, r}$.

При этом будем использовать следующие условные обозначения:

$$\text{sgn } \overline{\text{ind}}_{\varpi_j} \Gamma_l = \begin{cases} +1 : \overline{\text{ind}}_{\varpi_j} \Gamma_l \in (0, +\infty], \\ 0 : \overline{\text{ind}}_{\varpi_j} \Gamma_l = 0, \\ -1 : \overline{\text{ind}}_{\varpi_j} \Gamma_l \in [-\infty, 0); \end{cases} \quad \text{sgn } \underline{\text{ind}}_{\varpi_j} \Gamma_l = \begin{cases} +1 : \underline{\text{ind}}_{\varpi_j} \Gamma_l \in (0, +\infty], \\ 0 : \underline{\text{ind}}_{\varpi_j} \Gamma_l = 0, \\ -1 : \underline{\text{ind}}_{\varpi_j} \Gamma_l \in [-\infty, 0); \end{cases} \quad l = \overline{1, r}.$$

Имеют место следующие утверждения [4, 5].

Теорема 1. Пусть существует такая непрерывная на области G функция μ , что на данной области (кроме, быть может, множества n -мерной меры нуль) выполняется одно из двух условий:

$$\mu(f_j(x)) \det J(f_j(x)) - \mu(x) > 0 \quad \text{или} \quad \mu(f_j(x)) \det J(f_j(x)) - \mu(x) < 0,$$

где $J(f_j(x))$ есть матрица Якоби бигоморфизма f_j , $j \in \{1, \dots, m\}$. Тогда на области G система (1) может иметь не более r компактных инвариантных гиперповерхностей.

Теорема 2. Пусть существует такая непрерывная знакопостоянная на области G функция μ , что на данной области (кроме, быть может, множества n -мерной меры нуль) выполняется условие $\mu(f_j(x)) \det J(f_j(x)) - \mu(x) = 0$, $j \in \{1, \dots, m\}$. Тогда на области G система (1) может иметь не более r изолированных компактных регулярных инвариантных гиперповерхностей.

Теорема 3. Линейная система (1) (т. е. система, порожденная бигоморфизмами $f_j: x \rightarrow A_j x + b_j$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $j = \overline{1, m}$, где $A_j \in GL(n, \mathbb{R})$, $b_j \in \mathbb{R}^n$, $j = \overline{1, m}$) не имеет изолированных компактных регулярных инвариантных гиперповерхностей.

Теорема 4. Пусть существуют такие гладкая на области G дифференциальная $(n-1)$ -форма ω и индекс $j \in \{1, \dots, m\}$, что на данной области (кроме, быть может, множества n -мерной меры нуль) выполняется одно из двух условий:

$$\text{div } a^j > 0 \quad \text{или} \quad \text{div } a^j < 0,$$

где $\text{div } a^j$ – дивергенция векторного поля a^j . Тогда на области G система (1) может иметь не более r компактных инвариантных гиперповерхностей.

Теорема 5. Пусть существуют такие гладкая на области G дифференциальная $(n-1)$ -форма ω и индекс $j \in \{1, \dots, m\}$, что

$$\{\text{sgn } \overline{\text{ind}}_{\varpi_j} \Gamma_{\tau_i} \vee \text{sgn } \underline{\text{ind}}_{\varpi_j} \Gamma_{\tau_i}\} = \{\text{sgn } \overline{\text{ind}}_{\varpi_k} \Gamma_{\tau_k} \vee \text{sgn } \underline{\text{ind}}_{\varpi_k} \Gamma_{\tau_k}\},$$

$$\tau_i \in \{1, \dots, r\}, \quad \tau_k \in \{1, \dots, r\}, \quad i = \overline{1, s}, \quad k = \overline{1, s}, \quad s \leq r,$$

и при $\tau = \tau_i$ на данной области (кроме, быть может, множества n -мерной меры нуль) выполняется одна из шести серий условий:

$$\begin{aligned} & \operatorname{div} a^j \cdot \operatorname{sgn} \overline{\operatorname{ind}}_{\varpi_j} \Gamma_\tau > 0; \operatorname{div} a^j \cdot \operatorname{sgn} \underline{\operatorname{ind}}_{\varpi_j} \Gamma_\tau > 0; \operatorname{div} a^j > 0, \operatorname{sgn} \overline{\operatorname{ind}}_{\varpi_j} \Gamma_\tau = 0; \\ & \operatorname{div} a^j > 0, \operatorname{sgn} \underline{\operatorname{ind}}_{\varpi_j} \Gamma_\tau = 0; \operatorname{div} a^j < 0, \operatorname{sgn} \overline{\operatorname{ind}}_{\varpi_j} \Gamma_\tau = 0; \operatorname{div} a^j < 0, \operatorname{sgn} \underline{\operatorname{ind}}_{\varpi_j} \Gamma_\tau = 0. \end{aligned}$$

Тогда на области G система (1) может иметь не более $r - s$ компактных инвариантных гиперповерхностей.

Литература

1. Гайшун И. В. *Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения*. М.: УРСС, 2004.
2. Тыщенко В. Ю. *Об инвариантах дискретных динамических систем* // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 5. С. 752–755.
3. Тыщенко В. Ю. *Базис абсолютных инвариантов вполне разрешимых линейных и дробно-линейных дискретных динамических систем* // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 5. С. 758–760.
4. Тыщенко В. Ю. *О компактных инвариантных гиперповерхностях дискретных динамических систем* // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44. № 7. С. 1005–1006.
5. Тыщенко В. Ю. *Об инвариантах и инвариантных гиперповерхностях комплексных дискретных динамических систем* // Известия вузов. Математика. 2021. № 2. С. 44–45.

СИСТЕМЫ С НЕАНАЛИТИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ ЦЕНТРА

Д.Н. Чергинцев

А. Пуанкаре и А.М. Ляпунов показали, что необходимым и достаточным условием центра для систем с центром по линейным членам является обращение в ноль бесконечного числа ляпуновских фокусных величин, которые являются многочленами с целыми коэффициентами от коэффициентов разложения в ряд Тейлора правых частей системы. А.П. Садовским было доказано [1], что такой же вид имеют условия центра систем с линейной частью в виде ненулевой нильпотентной жордановой клетки. Ю.С. Ильяшенко для систем с особой точкой, не имеющей исключительных направлений, доказал [2] алгебраическую неразрешимость проблемы центра и фокуса, то есть что условия центра уже не определяются многочленами. Н.Б. Медведева доказала [3], что проблема центра и фокуса аналитически разрешима в любом простейшем монодромном классе, то есть множество определения параметров системы можно разбить на простейшие монодромные классы, на каждом из которых условия центра определяются аналитическими функциями от параметров системы. Н.Б. Медведева доказала [4] аналитическую неразрешимость проблемы устойчивости по Ляпунову на плоскости.

Автором получена система с аналитической правой частью, для которой условие центра определяется функцией, не являющейся аналитической в граничной точке множества значений параметров, при которых особая точка системы является монодромной. Данное множество будем называть областью монодромности. Найдена система с монодромной особой точкой, для которой условие центра определяется функцией, неаналитической в точке, принадлежащей области монодромности. Вычислено асимптотическое представление функции, определяющей условие центра, в точке, в которой нарушается её аналитичность.