$$\tau_i \in \{1,\ldots,r\}, \quad \tau_k \in \{1,\ldots,r\}, \quad i=\overline{1,s}, \quad k=\overline{1,s}, \quad s\leqslant r,$$

и при $\tau=\tau_i$ на данной области (кроме, быть может, множества n-мерной меры нуль) выполняется одна из шести серий условий:

$$\operatorname{div} a^j \cdot sgn\,\overline{ind}_{\varpi_j}\Gamma_\tau > 0;\ \operatorname{div} a^j \cdot sgn\,\underline{ind}_{\varpi_j}\Gamma_\tau > 0;\ \operatorname{div} a^j > 0,\ sgn\,\overline{ind}_{\varpi_j}\Gamma_\tau = 0;$$

$$\operatorname{div} a^j > 0,\ sgn\,\underline{ind}_{\varpi_j}\Gamma_\tau = 0;\ \operatorname{div} a^j < 0,\ sgn\,\overline{ind}_{\varpi_j}\Gamma_\tau = 0;\ \operatorname{div} a^j < 0,\ sgn\,\underline{ind}_{\varpi_j}\Gamma_\tau = 0.$$

Тогда на области G система (1) может иметь не более $r-s$ компактных инвариантных гиперповерхностей.

Литература

1. Гайшун И. В. *Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения.* М.: УРСС, 2004.
2. Тыщенко В. Ю. *Об инвариантах дискретных динамических систем* // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 5. С. 752–755.
3. Тыщенко В. Ю. *Базис абсолютных инвариантов вполне разрешимых линейных и дробно-линейных дискретных динамических систем* // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 5. С. 758–760.
4. Тыщенко В. Ю. *О компактных инвариантных гиперповерхностях дискретных динамических систем* // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44. № 7. С. 1005–1006.
5. Тыщенко В. Ю. *Об инвариантах и инвариантных гиперповерхностях комплексных дискретных динамических систем* // Известия вузов. Математика. 2021. № 2. С. 44–45.

СИСТЕМЫ С НЕАНАЛИТИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ ЦЕНТРА

Д.Н. Чергинец

А. Пуанкаре и А.М. Ляпунов показали, что необходимым и достаточным условием центра для систем с центром по линейным членам является обращение в ноль бесконечного числа ляпуновских фокусных величин, которые являются многочленами с целыми коэффициентами от коэффициентов разложения в ряд Тейлора правых частей системы. А.П. Садовским было доказано [1], что такой же вид имеют условия центра систем с линейной частью в виде ненулевой нильпотентной жордановой клетки. Ю.С. Ильяшенко для систем с особой точкой, не имеющей исключительных направлений, доказал [2] алгебраическую неразрешимость проблемы центра и фокуса, то есть что условия центра уже не определяются многочленами. Н.Б. Медведева доказала [3], что проблема центра и фокуса аналитически разрешима в любом простейшем монодромном классе, то есть множество определения параметров системы можно разбить на простейшие монодромные классы, на каждом из которых условия центра определяются аналитическими функциями от параметров системы. Н.Б. Медведева доказала [4] аналитическую неразрешимость проблемы устойчивости по Ляпунову на плоскости.

Автором получена система с аналитической правой частью, для которой условие центра определяется функцией, не являющейся аналитической в граничной точке множества значений параметров, при которых особая точка системы является монодромной. Данное множество будем называть областью монодромности. Найдена система с монодромной особой точкой, для которой условие центра определяется функцией, неаналитической в точке, принадлежащей области монодромности. Вычислено асимптотическое представление функции, определяющей условие центра, в точке, в которой нарушается её аналитичность.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \big(2a^2xy + y^2(bx^2+y^2)\big)x - (a^2x^2+y^2)y,\\ \frac{dy}{dt} &= \big(2a^2xy + y^2(bx^2+y^2)\big)y + (a^2x^2+y^2)x,\end{aligned} \tag{1}$$

$a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$. Автором доказана следующая

Теорема 1. *Положение равновесия* $O(0,0)$ *системы (1) является центром тогда и только тогда, когда* $b = -\Phi_4(a)/\Phi_2(a)$, *где*

$$\Phi_n(a) := \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^n}{(1+t^2)^{2+\sigma}(a^2+t^2)^{1-\sigma}}\,dt, \qquad \sigma := 2a^2/(1-a^2).$$

Причем

$$b = -\Phi_4(a)/\Phi_2(a) = -1 - 2a - 4a^2 - 8a^3\ln a + O(a^3), \qquad a \to +0.$$

Следствие 1. *Условие центра системы (1) определяется функцией, которая является неаналитической на границе области монодромности.*

При $a = 0$ положение равновесия $O(0,0)$ системы (1) не является изолированным, так как каждая точка оси OX является положением равновесия. Поэтому рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{1}{a^2+y^2}\Big(\big(2a^2xy + y^2(bx^2+y^2)\big)x - (a^2x^2+y^2)y\Big),\\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{a^2+y^2}\Big(\big(2a^2xy + y^2(bx^2+y^2)\big)y + (a^2x^2+y^2)x\Big),\end{aligned} \tag{2}$$

$a, b \in \mathbb{R}$, $-1 < a < 1$. Будем считать, что при $a = 0$ система (2) имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (bx^2+y^2)x - y,\\ \frac{dy}{dt} &= (bx^2+y^2)y + x.\end{aligned}$$

Для системы (2) справедлива нижепреведенная

Теорема 2. *Особая точка* $O(0,0)$ *системы (2) является центром тогда и только тогда, когда* $b = -\Phi_4(a)/\Phi_2(a)$, *причем*

$$-\Phi_4(a)/\Phi_2(a) = -1 - 2|a| - 4a^2 - 8|a|^3\ln|a| + O(a^3), \quad a \to 0.$$

Следствие 2. *Необходимое и достаточное условие центра для системы (2) определяется функцией, которая является неаналитической во внутренней точке области монодромности.*

Литература

1. Садовский А. П. *О проблеме различения центра и фокуса для систем с ненулевой линейной частью* // Дифференциальные уравнения. 1976. Т. 12. № 7. С. 1238–1246.

2. Ильяшенко Ю. С. *Алгебраическая неразрешимость и почти алгебраическая разрешимость проблемы центр–фокус* // Функц. анализ и его прил. 1972. Т. 6. № 3. С. 30–37.

3. Медведева Н. Б. *Об аналитической разрешимости проблемы различения центра и фокуса* // Сборник статей, Тр. МИАНГ. 2006. Т. 254. С. 11–100.

4. Медведева Н. Б. *Об аналитической неразрешимости проблемы устойчивости на плоскости* // УМН. 2013. Т. 68. Вып. 5(413). С. 147–176.