ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ

ОБ ЭФФЕКТИВНЫХ ПРИЗНАКАХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

А.С. Баландин

Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение нейтрального типа

$$(I-S)\dot{x}(t) = (Tx)(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

в следующих предположениях и обозначениях:

$$S = \sum_{j=1}^{J} a_j S_{h_j}, \quad (S_h y)(t) = \begin{cases} y(t-h), & t-h \geqslant 0, \\ 0, & t-h < 0, \end{cases} \quad (Ty)(t) = \int\limits_0^{\omega} (S_\xi y)(t)\, dr(\xi),$$

$J \in \mathbb{N}$, $a_j \in \mathbb{R}$, $h_j, \omega \in \mathbb{R}_+$, функция $r\colon [0,\omega] \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию, $r(0) = 0$, интеграл понимается в смысле Римана–Стилтьеса, функция $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ суммируема на каждом конечном отрезке.

Под *решением* уравнения (1) будем понимать абсолютно непрерывную на каждом конечном отрезке функцию $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую (1) почти всюду на $\mathbb{R}_+$. Как известно (см. [1, с. 84, теорема 1.1], [2]), уравнение (1) с заданными начальными условиями однозначно разрешимо и его решение представимо в виде

$$x(t) = X(t)x(0) + \int\limits_0^t Y(t-s)f(s)\, ds,$$

где $X\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ называется *фундаментальным решением*, а $Y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ – *функцией Коши* уравнения (1). Удобно доопределить нулём фундаментальное решение и функцию Коши на отрицательной полуоси.

Функция Коши и фундаментальное решение уравнения (1) связаны соотношением (см. [2])

$$X(t) = (I-S)Y(t).$$

Нас будет интересовать наличие у функции Коши уравнения (1) экспоненциальной оценки

$$|Y(t)| \leqslant Me^{-\gamma t}, \quad M, \gamma > 0. \tag{2}$$

Характеристическая функция уравнения (1) имеет вид:

$$g(p) = p\left(1 - \sum_{j=1}^{J} a_j e^{-ph_j}\right) - \int\limits_0^{\omega} e^{-p\xi}\, dr(\xi), \quad p \in \mathbb{C}.$$

Теорема 1. *Функция Коши уравнения (1) имеет оценку (2) тогда и только тогда, когда оператор $I-S$ имеет в пространстве L_p обратный и все нули функции g лежат слева от мнимой оси.*

Теорема 1 позволяет устанавливать эффективные, т.е. выраженные в терминах параметров исходного уравнения, признаки экспоненциальной устойчивости. В статье [3] была построена область экспоненциальной устойчивости для уравнения

$$(I - aS_h)\dot{x}(t) + (bI - cS)x(t) = f(t),$$

в работе [4] – для уравнения

$$(I - aS_1 - bS_2)\dot{x}(t) = c(S_1 x)(t) + f(t).$$

В статье [5] был предложен способ исследования экспоненциальной устойчивости уравнений нейтрального типа с помощью сведения к изучению экспоненциальной устойчивости уравнения запаздывающего типа и таким образом были найдены новые признаки.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) - a\dot{x}(t) + bx(t) + cx(t-1) + k\int_{t-1}^{t} x(s)\,ds = f(t), \tag{3}$$

где a, b, c, $k \in \mathbb{R}$.

Введём в системе координат $Ouvw$ поверхность

$$\Gamma = \left\{ u = -2\theta \operatorname{ctg}\theta + v, \quad w = \frac{\theta(2\theta - v\sin 2\theta)}{\sin^2\theta}, \quad \theta \in [0, \pi) \right\}.$$

Поверхность Γ и плоскость $u + v + w = 0$ ограничивают область D, содержащую положительную полуось Ou (см. рис. 1).

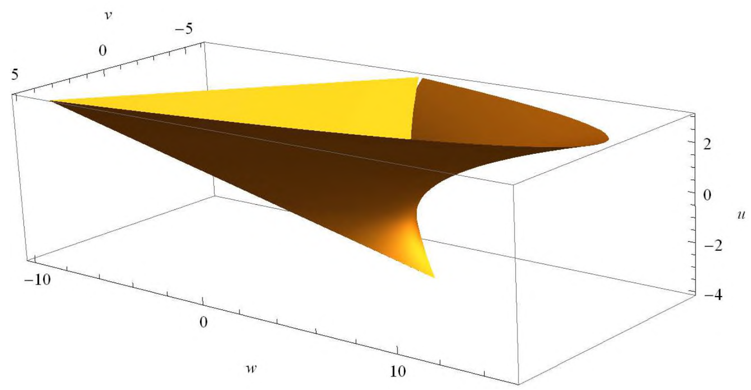

Рис. 1. Область D.

Теорема 2. *Функция Коши уравнения (3) имеет оценку (2) тогда и только тогда, когда* $|a| < 1$ *и точка* $\left\{\dfrac{b - ac}{1 - a^2}, \dfrac{c - ab}{1 - a^2}, \dfrac{k}{1 + a}\right\}$ *принадлежит области* D.

Работа выполнена в рамках госзадания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (задание FSNM-2020-0028).

Литература

1. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1991.

2. Баландин А. С. *О связи между фундаментальным решением и функцией Коши для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа* // Прикладная математика и вопросы управления. 2018. № 1. С. 13–25.

3. Баландин А. С., Малыгина В. В. *Асимптотические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений нейтрального типа* // Математические труды. 2020. Т. 23. № 2. С. 3–49.

4. Баландин А. С. *Об устойчивости некоторых автономных дифференциальных уравнений нейтрального типа* // Сборник трудов XII Международной конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2019)», Воронеж, 2019. С. 59–63.

5. Баландин А. С. *Редукция дифференциальных уравнений нейтрального типа к уравнениям запаздывающего типа* // Динамические системы. 2020. Т. 10(38). № 1. С. 7–22.

КРИТЕРИЙ СТАБИЛИЗИРУЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В.И. Булатов

Рассмотрим стационарную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

где x – n-вектор; u – r-вектор; A и B – соответственно $(n \times n)$ и $(n \times r)$-матрицы.

Систему (1) считаем *стабилизируемой*, если найдётся такая $r \times n$-матрица Q, что замыкание этой системы управлением

$$u = Qx$$

приводит к асимтотически устойчивой системе

$$\dot{x} = (A + BQ)x.$$

Пусть в матрице

$$H = [B;\ AB;\ \ldots;\ A^{n-1}B] \tag{2}$$

ненулевой минор k-го порядка, где $k = \operatorname{rank} H$, расположен в соответствующих строках и столбцах этой матрицы с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и $j_1, j_2, \ldots, j_k$.

Вычислим определитель n-го порядка $p(\lambda)$, получаемый из определителя λ-матрицы $D(\lambda) = \lambda E - A$ заменой столбцов с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ на выделенные в матрице (2) столбцы с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$.

На основании [1] доказывается следующая

Теорема. *Система (1) стабилизируема тогда и только тогда, когда $p(\lambda)$ является многочленом Гурвица.*

Литература

1. Булатов В. И. *Об одном способе вычисления максимально инвариантного многочлена спектра линейных стационарных систем управления* // Тез. докл. XVII Междунар. науч. конф. по дифференц. уравн. «Еругинские чтения-2017». Минск. 16-20 мая 2017 г. Ч. 1. С. 68–69.

О МНОЖЕСТВЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ ОДНОГО ОБЪЕКТА

М.Н. Гончарова

Рассмотрим управляемый объект, поведение которого описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{x} + \omega^2 x = u, \tag{1}$$