О МНОЖЕСТВЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ ОДНОГО ОБЪЕКТА

М.Н. Гончарова

Рассмотрим управляемый объект, поведение которого описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$x + w2x = u, \tag{1}$$

где $\omega > 0$, на управление наложено ограничение $u \in [-\varepsilon_1; \varepsilon_2]$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$.

Построим множество управлемости $Y(t)$ этого объекта в точку $O(0;0)$, то есть множество всех точек фазового пространства, из которых можно перейти на отрезке времени $[t;t_1]$ в начало координат при всевозможных допустимых управлениях. Так как конечное множество состоит из одной точки, то сначала вычислим опорную функцию множества $Y(t)$, а затем восстановим компакт $Y(t)$ по его опорной функции.

С помощью замены $x = y_1$, $\dot{x} = \omega y_2$ уравнение (1) сведем к нормальной системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= \omega y_2, \\ \dot{y}_2 &= -\omega y_1 + v, \end{cases} \tag{2}$$

в которой вектор управления $(o; v)$ будет принимать значения из отрезка

$$V = \Big\{(v_1; v_2) \in R^2 \,|\, v_1 = 0, -\frac{\varepsilon_1}{\omega} \leqslant v_2 \leqslant \frac{\varepsilon_2}{\omega}\} =$$

$$= \{(v_1; v_2) \in R^2 \,|\, v_1 = 0, -l_1 \leqslant v_2 \leqslant l_2\Big\}. \tag{3}$$

Экспоненциал e^{At} матрицы системы (2) есть матрица

$$\begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}.$$

Опорная функция множества (3) имеет вид $c(V,\psi) = \dfrac{l_2 - l_1}{2}\psi_2 + \dfrac{l_2 + l_1}{2}|\psi_2|$.

Используя формулу опорной функции множества управляемости [1] и проведя вычисления, получим

$$c(Y(t),\psi) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\tau\omega}\left(\frac{l_2 - l_1}{2}(\psi_1\sin\alpha + \psi_2\cos\alpha) + \frac{l_2 + l_1}{2}|\psi_1\sin\alpha + \psi_2\cos\alpha|\right)d\alpha,$$

где $\tau = t_1 - t$ – длина отрезка $[t;t_1]$. Произвольный вектор $\psi = (\psi_1, \psi_2)$, принадлежащий сфере радиуса 1 с центром в начале координат, представим в полярных координатах

$$\psi_1 = \cos\beta, \quad \psi_2 = \sin\beta, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant 2\pi. \tag{4}$$

Тогда для опорной функции $c\big(Y(t),\psi\big)$ получим выражение

$$c\big(Y(t),\psi\big) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\tau\omega}\left(\frac{l_2 - l_1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \frac{l_2 + l_1}{2}|\sin(\alpha+\beta)|\right)d\alpha. \tag{5}$$

Вычисление интеграла (5) зависит от длины интервала $\tau\omega$. При выполнении неравенств $0 \leqslant \tau\omega \leqslant \pi$ вычисление интеграла (5) распадается на четыре случая в зависимости от значения параметра β. Получаем

$$c\big(Y(t),\psi\big) = \begin{cases} \dfrac{l_2}{\omega}(1-\cos\tau\omega)\cos\beta + \dfrac{l_2}{\omega}\sin\tau\omega\sin\beta, \ 0 \leqslant \beta \leqslant \pi - \tau\omega, \\ \dfrac{l_1 + l_2}{\omega} + \left(\dfrac{l_2}{\omega} + \dfrac{l_1}{\omega}\cos\tau\omega\right)\cos\beta - \dfrac{l_1}{\omega}\sin\tau\omega\sin\beta, \ \pi - \tau\omega < \beta \leqslant \pi, \\ \dfrac{l_1}{\omega}(\cos\tau\omega - 1)\cos\beta - \dfrac{l_1}{\omega}\sin\tau\omega\sin\beta, \ \pi < \beta \leqslant 2\pi - \tau\omega, \\ \dfrac{l_1 + l_2}{\omega} - \left(\dfrac{l_1}{\omega} + \dfrac{l_2}{\omega}\cos\tau\omega\right)\cos\beta + \dfrac{l_2}{\omega}\sin\tau\omega\sin\beta, \ 2\pi - \tau\omega < \beta \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Разобъем вектора (4) плоскости на сектора следующим образом. К сектору I отнесем векторы, для которых выполняются неравенства $0 \leqslant \beta \leqslant \pi - \tau\omega$, к сектору II – векторы, для которых выполняются неравенства $\pi - \tau\omega < \beta \leqslant \pi$, к сектору III – векторы, для которых выполняются неравенства $\pi < \beta \leqslant 2\pi - \tau\omega$ и к сектору IV – векторы, для которых выполняются неравенства $2\pi - \tau\omega < \beta \leqslant 2\pi$.

Таким образом, в зависимости от того, в какой сектор попадает вектор ψ, заданный формулами (3), получаем разные выражения для опорной функции. Учитывая формулы (3) и тот факт, что $||\psi|| = 1$, окончательно получаем формулу

$$c\big(Y(t),\psi\big) = \begin{cases} \dfrac{l_2}{\omega}(1-\cos\tau\omega)\psi_1 + \left(\dfrac{l_2}{\omega}\sin\tau\omega\right)\psi_2,\ \psi \in I, \\ \dfrac{l_1+l_2}{\omega}||\psi|| + \left(\dfrac{l_2}{\omega} + \dfrac{l_1}{\omega}\cos\tau\omega\right)\psi_1 - \left(\dfrac{l_1}{\omega}\sin\tau\omega\right)\psi_2,\ \psi \in II, \\ \dfrac{l_1}{\omega}(\cos\tau\omega - 1)\psi_1 - \left(\dfrac{l_1}{\omega}\sin\tau\omega\right)\psi_2,\ \psi \in III, \\ \dfrac{l_1+l_2}{\omega}||\psi|| - \left(\dfrac{l_1}{\omega} + \dfrac{l_2}{\omega}\cos\tau\omega\right)\psi_1 + \left(\dfrac{l_2}{\omega}\sin\tau\omega\right)\psi_2,\ \psi \in IV. \end{cases}$$

Когда вектор ψ пробегает I сектор, то получаем опорную функцию точки с координатами $\left(\dfrac{l_2}{\omega}(1-\cos\tau\omega), \dfrac{l_2}{\omega}\sin\tau\omega\right)$, когда вектор ψ пробегает II сектор, то это – опорная функция круга радиуса $\dfrac{l_1+l_2}{\omega}$ с центром в точке $\left(\dfrac{l_2}{\omega} + \dfrac{l_1}{\omega}\cos\tau\omega, -\dfrac{l_1}{\omega}\sin\tau\omega\right)$, когда вектор ψ пробегает III сектор, то это – опорная функция точки $\left(\dfrac{l_1}{\omega}(\cos\tau\omega - 1), -\dfrac{l_1}{\omega}\sin\tau\omega\right)$ и, наконец, когда вектор ψ пробегает IV сектор, то это – опорная функция круга радиуса $\dfrac{l_1+l_2}{\omega}$ с центром в точке $\left(-\dfrac{l_1}{\omega} - \dfrac{l_2}{\omega}\cos\tau\omega, \dfrac{l_2}{\omega}\sin\tau\omega\right)$.

В результате получаем, что искомое множество управляемости является пересечением двух кругов: круга радиуса $\dfrac{l_1+l_2}{\omega}$ с центром в точке $\left(\dfrac{l_2}{\omega} + \dfrac{l_1}{\omega}\cos\tau\omega, -\dfrac{l_1}{\omega}\sin\tau\omega\right)$ и круга радиуса $\dfrac{l_1+l_2}{\omega}$ с центром в точке $\left(-\dfrac{l_1}{\omega} - \dfrac{l_2}{\omega}\cos\tau\omega, \dfrac{l_2}{\omega}\sin\tau\omega\right)$. При $\tau\omega = \pi$ опорная функция $c\big(Y(t),\psi\big)$ принимает постоянное значение для секторов II и IV, сектора I и III вырождаются. Таким образом, имеем, что при $\tau\omega = \pi$ множество управляемости является кругом радиуса $\dfrac{l_1+l_2}{\omega}$ с центром в точке $\left(-\dfrac{l_1}{\omega} + \dfrac{l_2}{\omega}, 0\right)$.

Построив множество управляемости, можно провести более подробный анализ поведения изучаемого объекта.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (ГПНИ "Конвергенция—2025", задание 1.2.04.4).

Литература

1. Киселев Ю. Н., Аввакумов С. Н., Орлов М. В. *Оптимальное управление. Линейная теория и приложения.* М.: МАКС Пресс, 2007.