ЗАДАЧА СТАБИЛИЗАЦИИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ЕЕ РЕДУЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ

В.В. Горячкин, В.В. Крахотко

Пусть задана система управления

$$x(t+1) = Ax(t) + B(t)u(t), \quad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^n$; A, B – постоянные матрицы соответствующих размеров.

Предположим, что вектор $x(t)$ измеряется полностью и управление задано в виде

$$u(t) = Cx(t), \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

где C – постоянная $(r \times n)$-матрица. Тогда для замкнутой системы

$$x(t+1) = (A + BC)x(t)$$

обратная связь (2) обеспечивает асимптотическую устойчивость, если

$$\|A + BC\| < 1. \tag{3}$$

Рассмотрим задачу стабилизации объекта (1) с установленной матрицей C, у которой часть столбцов примем равным нулю. Требуется найти тот максимальный по числу набор нулевых столбцов матрицы C, при которых сохраняется свойство стабилизируемости замкнутой системы.

Такую задачу стабилизации будем интерпретировать как задачу стабилизации исходного объекта управления на основе ее редуцированной модели.

Пусть D – диагональная $(n \times n)$-матрица с элементами d_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, n$, причем элемент d_{ii} может принимать одно из двух значений 0 или 1. Тогда, очевидно, в произведении $CDx(t)$ будут задействованы только те координаты вектора $x(t)$, которые соответствуют единичным элементам матрицы D. Это свойство так же переносится и на произведение $BCDx(t)$.

Потребуем, чтобы элементы матрицы D были подобраны так, чтобы замкнутая система оставалась стабилизируемой и выполнялось достаточное условие асимптотической устойчивости замкнутой системы

$$\|A + BCD\| < 1. \tag{4}$$

Введем обозначения: a_i – столбцы матрицы A; h_i – столбцы матрицы BC; φ_i – столбцы матрицы $\Phi = A + BCD$. Очевидно $\varphi_i = a_i + h_i d_{ii}$.

Матрица C была выбрана так, что выполняется достаточное условие (4), которое во введенных обозначениях эквивалентно неравенству

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i' \varphi_i < 1. \tag{5}$$

Ясно, что для построения редуцированной модели необходимо найти тот минимальный набор элементов матрицы D с единицами на главной диагонали, при котором сохраняется неравенство (5).

Приведем алгоритм нахождения нулевых столбцов матрицы C.

1. Положим для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ $d_{ii} = 1$ $(D = E)$.
2. Вычислим n скалярных произведений $s_i = \varphi_i' \varphi_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
3. Подсчитаем числа $\alpha_i = a_i' a_i - s_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
4. Заполним таблицу P, состоящую из четырех столбцов и n строк по правилу:

   в первый столбец заносим нули; во второй столбец номера индексов i, начиная с 1 до n; в третий и в четвертый столбцы занесем значения s_i и α_i согласно номеру индекса во втором столбце соответственно.
5. Выполним сортировку строк таблицы P по значениям третьего столбца в порядке возрастания.
6. Вычислим сумму всех элементов третьего столбца таблицы P. Пусть p_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, 3, 4$, – элементы таблицы P и $y = \sum\limits_{i=1}^{n} p_{i3} = \sum\limits_{i=1}^{n} s_i$.
7. Положим $i = 1$.
8. Вычислим $y = y + p_{i4}$.
9. Если $y \geqslant 1$, то переходим к шагу 14.
10. Если $y < 1$, то $p_{i1} = 1$.
11. Пусть $i = i + 1$.
12. Если $i \leqslant n$, то переходим к шагу 8.
13. Если $i > n$, то переходим к шагу 14.
14. Элементы первого столбца таблицы P определяют во втором столбце номера нулевых столбцов в матрице C.

Полученный результат подтверждается хорошо известным методом построения систем управления реальными объектами высокого порядка и фактом их стабилизации при использовании лишь редуцированных моделей [1, с. 74].

Заметим, если неравенство (3) выполняется с некоторым "запасом", то это в принципе открывает возможность построения стабилизирующего управления на основе редуцированной модели объекта.

Если рассмотреть процедуру задания искомой матрицы C в управлении (2) так, чтобы выполнялось достаточное условие (3), то можно воспользоваться экстремальным свойством псевдообратной матрицы. То есть существует одна и только одна матрица, которая минимизирует евклидову норму [2, гл. 1]: $\min\limits_{C} \|A + BC\| = \|A - BB^{+}A\|$. Это означает, что если взять $C = -B^{+}A$, и норма $\|A - BB^{+}A\| < 1$, то система (1) стабилизируема, т.е. имеется возможность построения ее редуцированной модели по приведенному выше алгоритму.

Литература

1. Кунцевич В. М. *Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации.* Киев: Наук. думка, 2006.

2. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц.* М: Наука, 1967.