Литература

1. Kajiwara K., Ohta Y. *Determinant structure of the rational solutions for the Painlevé II equation* // J. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 4393–4704.

2. Clarkson P. A. *Painlevé equations – nonlinear special functions.* Lect. Notes in Math. Springer-Verlag. 2006. V. 1883. P. 331–411.

3. Gromak V. I., Laine I., Shimomura S. *Painlevé Differential Equations in the Complex Plane* // De Gruyter. Studies in Mathematics. V. 28. Berlin; New-York, 2002.

4. Демина М. В., Кудряшов Н. А. *Специальные полиномы и рациональные решения иерархии второго уравнения Пенлеве* // Теоретическая и математическая физика. 2007. Т. 153. № 1. С. 58–67.

5. Bobrova I. *On symmetries of the non-stationary $P_{II}^{(n)}$ hierarchy and their applications* // arXiv: 2010.10617v2 [nlin.SI].

6. Громак В. И. *Аналитические свойства решений уравнений обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1017–1033.

7. Громак В. И. *О свойствах решений уравнений обобщенной иерархии уравнения P_{34}* // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 2. С. 153–163.

О МЕРОМОРФНЫХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ СО ВТОРЫМ УРАВНЕНИЕМ ПЕНЛЕВЕ

Е.В. Громак

В работе рассматриваются аналитические свойства решений линейных уравнений второго порядка с потенциалом, зависящим от мероморфных решений второго уравнения Пенлеве. Методом Фробениуса установлены достаточные условия мероморфности общего решения. Установлена интегрируемость в рациональных функциях линейного уравнения второго порядка с потенциалом, связанным с рациональными решениями второго уравнения Пенлеве.

Известно, что решения второго уравнения Пенлеве

$$w'' = 2w^3 + zw + \alpha \tag{1}$$

являются мероморфными фукциями [1, 2]. Одним из основных инструментов исследования аналитических свойств решений $w_\alpha = w(z,\alpha)$ уравнения (1) является преобразование Беклунда, которое позволило, в частности, доказать трансцендентность уравнения (1), а также разбить множество решений на три класса: 1. Рациональные решения; 2. Решения Эйри; 3. Трансцендентные решения, т.е. решения, не входящие в первые два класса [3].

Рациональные решения существуют только при $\alpha \in \mathbb{Z}$. Они порождаются тривиальным решением $w = 0$ при $\alpha = 0$ и последовательным применением к нему преобразования Беклунда. При каждом $\alpha \in \mathbb{Z}$ рациональное решение единственно и имеет структуру

$$w(z) = \frac{Q'_{n-1}(z)}{Q_{n-1}(z)} - \frac{Q'_n(z)}{Q_n(z)}, \quad \alpha = n \in \mathbb{N},$$

где полиномы Яблонского-Воробьева $Q_n = Q_n(z)$ определяются рекуррентным соотношением [4, 5]

$$Q_{n+1}Q_{n-1} = zQ_n^2 - 4\big(Q_nQ''_n - (Q'_n)^2\big), \quad Q_0 = 1, \quad Q_1 = z.$$

Для $\alpha = -n,\ n \in \mathbb{N}$, рациональное решение $w_{-n}(z) = -w_n(z)$ и $w = 0$ для $\alpha = 0$. Каждое рациональное решение имеет $l_+ = \alpha(\alpha-1)/2$ и $l_- = \alpha(\alpha+1)/2,\ \alpha \in \mathbb{Z}_+$, полюсов с вычетом 1 и -1 соответственно.

Решения второго класса порождаются решениями уравнений Риккати

$$w' = \varepsilon_1 w^2 + \varepsilon_1 z/2, \quad \alpha = \varepsilon_1/2, \quad \varepsilon_1^2 = 1$$

при последовательном применении к ним преобразований Беклунда. Эти решения удовлетворяют уравнениям P-типа первого порядка

$$w' + \sum_{j=1}^{n} P_j(z,w)w^{n-j} = 0, \quad \alpha = m + 1/2, \quad m \in \mathbb{Z}$$

и рациональным образом выражаются через функции Эйри и ее производные. Произвольное решение $w(z)$ из третьего класса имеет бесконечное число полюсов как с вычетом 1, так и с вычетом -1 [3].

Заметим, что решение $w(z) \neq 0$ уравнения (1) в окрестности полюса $z = z_0$ имеет разложение

$$w(z) = \frac{\varepsilon}{t} + \frac{1}{6} - \varepsilon z_0 t - \frac{\alpha + \varepsilon z}{4}t^2 + ht^3 + \frac{3\alpha + \varepsilon}{72}z_0 t^4 + O(t^5),$$

где $z - z_0 = t$, h – произвольная постоянная, $\varepsilon^2 = 1$.

Известно, что общее решение линейного уравнения $u'' + (\lambda\wp(z) + \mu)u = 0$, где $\wp(z)$ – двоякопериодическая эллиптическая функция Вейерштрасса с периодами ω, ω' и двукратными полюсами в точках $m\omega + m'\omega'$, $m', m \in \mathbb{Z}$, μ – произвольное постоянное, $\lambda = -n(n+1)$, где $n \in \mathbb{N}$ (уравнение Ламе), представляет собой мероморфную функцию [6].

В настоящей работе на множестве решений уравнения (1) рассмотрим линейное уравнение

$$u'' + (aw^2 + bw + cw' + \mu)u = 0, \tag{2}$$

где $w(z)$ – фиксированное решение уравнения (1), а a, b, c, μ – постоянные параметры. Нас интересуют условия на параметры, при выполнении которых общее решение уравнения (2) мероморфно или даже рационально. Ясно, что уравнение (2) – уравнение с конечными регулярными особыми точками в полюсах $w(z)$ и для построения фундаментальной системы можно использовать метод Фробениуса. При этом предполагаем, что уравнение (2) с регулярными конечными особыми точками $z = z_j$, корни определяющих уравнений, т.е. показатели, относящиеся к особым точкам $z = z_j$, целые и разложения решений в окрестностях особых точек не содержат логарифмов $ln(z - z_j)$. Справедлива

Теорема 1. *Если для уравнения (2), где $w(z)$ – фиксированное решение уравнения (1), выполняется хотя бы одно из условий*

$$\begin{aligned} &a)\ a = b = c = 0;\ \ n = p = 0;\\ &b)\ a = -1,\ \ b = 0,\ \ c = 1;\ \ \ n = 1,\ \ p = 0;\\ &c)\ a = -1,\ \ b = 0,\ \ c = -1;\ \ n = 0,\ \ p = 1,\end{aligned} \tag{3}$$

то общее решение уравнения (2) мероморфно.

Исключая тривиальный случай (3a), в случаях (3b) и (3c) имеем уравнения

$$u'' + (-w^2 + \varepsilon_2 w' + \mu)u = 0, \quad \varepsilon_2^2 = 1. \tag{4}$$

Для того, чтобы общее решение уравнения (4) было рациональным, необходимо, чтобы для решения $u(z)$ точка $z = \infty$ была полюсом или точкой голоморфности. Справедлива

Теорема 2. *Если в уравнении (4)* $\mu = 0$ *и* $w(z) = Q'_{n-1}(z)/Q_{n-1}(z) - Q'_n(z)/Q_n(z)$ – *рациональное решение уравнения (1) при* $\alpha = n \in \mathbb{Z}_+$, *где* Q_n – *полиномы Яблонского-Воробьева, то общее решение уравнения (4) имеет вид* $u(z) = (C_1 Q_n + C_2 Q_{n-2})/Q_{n-1}$ *при* $\varepsilon_2 = 1$ *и* $u(z) = (C_1 Q_{n-1}(z) + C_2 Q_{n+1}(z))/Q_n(z)$ *при* $\varepsilon_2 = -1$.

Литература

1. Голубев В. В. *К теории уравнений Пенлеве* // Мат. сборник. 1912. Т. 28. С. 323–349.

2. Hinkkonen A., Laine I. *Solutions of the first and second Painleve equations are meromorphic* // J. Anal Math. 79(1999). P. 345–377.

3. Gromak V. I. *The Backlund transformations of the higher order Painleve Equations* // Centre de Recherches Mathematiques, CRM Proceeding and Lecture Notes. 2001. V. 29. P. 3–28.

4. Яблонский А. И. *О рациональных решениях второго уравнения Пенлеве* // Изв. БССР. Сер. физ.-техн. наук. 1959. Т. 3. С. 30–35.

5. Воробьев А. Р. *О рациональных решениях второго уравнения Пенлеве* // Диффереинциальные уравнения. 1965. Т. 1. С. 79–81.

6. Гурса Э. *Курс математического анализа.* ГТТИ: М-Л., Том 3, Часть 2, 1933.

ОБ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ВТОРОГО УРАВНЕНИЯ ИЕРАРХИИ РИККАТИ

Е.В. Кузьмина

В работе [1] была построена иерархия уравнений, порожденная уравнением Риккати

$$w'(z) + \gamma w^2(z) = 0.$$

Это уравнения вида

$$D_R^n w = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

где D_R есть преобразование дифференциальных выражений, действующее по формуле

$$D_R = \frac{d}{dz} + \gamma w, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

При $n = 2$ получаем второе уравнение из иерархии Риккати

$$w''(z) + \gamma^2 w^3(z) + 3\gamma w(z) w'(z) = 0, \tag{1}$$

которое и будет предметом исследования.

Лемма. *Решение задачи Коши для уравнения (1) с условиями* $w(z_0) = C_1$, $w'(z_0) = C_2$ *является рациональной функцией и имеет следующий вид:*

1) если $C_2 \neq -\frac{1}{2}\gamma C_1^2$, $C_2 \neq -\gamma C_1^2$, *то*

$$w(z) = \frac{1}{\gamma}\left[\frac{1}{z-a} + \frac{1}{z-b}\right], \quad \text{где} \tag{2}$$

$$a = z_0 - \frac{C_1}{\gamma C_1^2 + C_2} + \frac{\sqrt{-2\gamma C_2 - \gamma^2 C_1^2}}{\gamma^2 C_1^2 + \gamma C_2}, \ b = z_0 - \frac{C_1}{\gamma C_1^2 + C_2} - \frac{\sqrt{-2\gamma C_2 - \gamma^2 C_1^2}}{\gamma^2 C_1^2 + \gamma C_2},$$

а знаком $\sqrt{\ }$ *обозначена одна из ветвей многозначной аналитической функции;*

2) если $C_2 = -\gamma C_1^2$, *то*

$$w(z) = \frac{1}{\gamma(z-a)}, \quad \text{где} \quad a = z_0 - \frac{1}{\gamma C_1};$$